دانشـگاه هـرمـزگان

دانشـکده علـوم پایـه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشـناسی ارشد رشـته ریاضی

عنوان پایان نامه :

مشتق و مشتق تعمیم یافته در مشبکه‌ها

استـاد راهنـما :

دکـتر مسعود هاوشکی

استـاد مشاور :

دکـتر محبوبه محمدحسنی

دانشجو :

فاطمه برمشوری

خرداد ۱۳۹۰

تقدیم به :

همسر مهربانم ....

چه خوب شد که به دنیا آمدی و

چه خوب شد که دنیای من شدی ...

چکیده

در این پژوهش مفهوم مشتق و تعدادی از خواص وابسته به آن در یک مشبکه توصیف شده است . سپس شرایط معادلی را بیان می‌کنیم که تحت آن مشتق یک مشبکه با بزرگترین عنصر، مشبکه های مدولار و مشبکه های توزیع پذیر، یکنوا شود بیان می کنیم.

مشبکه های مدولار و مشبکه های توزیع پذیر را به وسیله مشتق یکنوا مشخص می کنیم، بعلاوه ثابت می کنیم که اگر d یک مشتق یکنوا باشد مجموعه‌ی $Fix_d(L)$ یک ایده‌آل از L می‌باشد .

در ادامه مفهوم مشتق تعمیم یافته و f_مشتق از یک مشبکه بیان می شود و نتایج بدست آمده در مشتق را به مفهوم های مشتق تعمیم یافته و f_مشتق توسیع می دهیم .

کلمات کلیدی : مشبکه، مشبکه مدولار، مشبکه توزیع پذیر، مشتقات مشبکه، مشتقات تعمیم یافته، f_مشتق، جبر بول .

فهرستِ مطالب

فهرست نمادها

$\wedge$	و
$\vee$	یا
$\longrightarrow$	آن‌گاه
$\exists$	وجود دارد
$\leqslant$	کوچکتر مساوی
$\geqslant$	بزرگتر مساوی
$\nleqslant$	کوچکتر مساوی نیست
$\ngeqslant$	بزرگتر مساوی نیست
$=$	مساوی
$\neq$	مساوی نیست
$\in$	عضو
$\notin$	عضو نیست
$\subseteq$	زیر مجموعه
$\Rightarrow$	نتیجه‌می د هد
$\cap$	اشتراک
$\cup$	اجتماع
$\{\ \}$	مجموعه
min	مینیمم
max	ماکزیمم
sup	کوچکترین کران بالا
inf	بزرگترین کران پایین
$Su(A)$	مجموعه همه زیر مجموعه های A
ϕ	تابع فی
$\emptyset$	مجموعه تهی

مقدمه

مشبکه ها در شاخه های مختلف ریاضیات مانند جبر ـ منطق و ... نقش مهمی دارد . در منطق ریاضی یکی از مفاهیم مهم منطق فازی و جبر مربوط به آن جبرـBL می‌باشد. جبرهای ـBL در مرحله اول مشبکه می باشد ، لذا بررسی مشبکه ها و روابط مربوط به آن از اهمیت زیادی برخوردار می باشد .

سیستم جبری مشبکه ها نقش مهمی درفناوری اطلاعات [۲] و بازیابی اطلاعات [۵]،[۸] دارد . بل [۱] [۲] ، مفروضات هم معنی با مشبکه را بیان می کند و از آن برای نتیجه شدن مشبکه از مؤلفه های وابسته و تجزیه الگوریتم ها استفاده می کند .

کارپیتو [۲] و رومانو [۳] [۵] یک سری اطلاعات در مورد مشبکه ها و خصوصیات مفید دیگری از آن را بدست آوردند . دورفی [۸] [۷] هندسه اعداد را برای حل مسائل با استفاده از تکنیک های جبری و کشف چندین راه حل جدید بدست آورد .

مفهوم مشتق از قضایای آنالیزی معرفی می شود و تحقیق ساختارهای آن ها در سیستم های جبری است . اخیراً ویژگی های جبری مشبکه ها به طور وسیعی بررسی و در مورد آن ها تحقیق شده است [۷] . اکسیو لانگ اکسین [۵] و تی یو لی [۶] و جینگ هو لو [۷] مفهوم مشتق مشبکه را بیان کردند [۱۰] .

---

[۱] Bell

[۲] Carpineto

[۳] Romano

[۸] Durfee

[۵] Xiao Long Xin

[۶] Ti Yao Li

[۷] Jing Hua Lu

مفهوم مشتق تعمیم یافته توسط آلشری [8] بیان شده است [۱] . سیون [9] و علی اوزتورک [10] در [۶] باتوجه به مفهوم مشتق تعمیم یافته روی مشبکه ، مفهوم f_مشتق را معرفی کردند و بعضی از ویژگی های آن را شرح داده اند . آنها بسیاری از قضایای [۱۰] را برای f_مشتق نیز به طور تقریباً مشابه بیان و اثبات نموده اند .

این رساله از چهار فصل تشکیل شده است در فصل اول مفاهیم بنیادی که در طول مقاله به آنها نیاز داریم بیان می شود [۳]،[۴] .

در فصل دوم مفهوم مشتقات مشبکه ها و ویژگی های آنها بیان و در ادامه فصل گفته می شود که اگر تابع مشتق d یکنوا باشد ، مجموعه ثابت $Fix_d(L) = \{x \in L : dx = x\}$ یک ایده‌آل برای مشبکه L است ، همچنین رابطه مشبکه توزیع پذیر و مدولی با مشتق بیان می شود [۱۰] .

در فصل سوم مفهوم مشتقات تعمیم یافته و ویژگی های آنها بیان و مجموعه ثابت $Fix_D(L)$ معرفی و بعضی از ویژگی های آن مطرح می شود [۱] .

در فصل چهارم مفهوم f_مشتقات مشبکه ها با توجه به مفهوم مشتق تعمیم یافته بیان می شود و خواص آنها بیان و اثبات می شود [۶] .

---

[8] Alshehri

[9] Ceven

[10] Ali Ozturk

فصلِ ۱

مفاهیم بنیادی

۱-۱ مشبکه

در این فصل سعی بر آن است که مفاهیم بنیادی را که در طول مقاله به آنها نیاز داریم مطرح کنیم . ابتدا مفهوم مشبکه با ذکر چند مثال بیان می شود و سپس مشبکه های همریخت تعریف و بیان می شود که دو مشبکه توسط یک تابع خاص به هم مرتبط می شوند ، که با توجه به نوع تابع ، این ارتباط تغییر می کند . در ادامه زیر مشبکه تعریف و گفته می شود که زیر مشبکه خود نیز یک مشبکه است . سپس مشبکه های توزیع پذیر و مدولار و ارتباط بین آنها بیان می شود . همچنین تعریف دیگری را برای مشبکه بیان می کنیم که با تعریف اولیه مشبکه معادل است . در پایان جبر بول و ایده‌آل بیان می شود . [۲]،[۴]،[۷]،[۸]

تعریف ۱-۱.۱ مجموعه غیر تهی L را همراه با عملگرهای دوتایی $\vee$ و $\wedge$ مشبکه گویند هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ شرایط زیر برقرار باشد :

(۱) $x \vee x = x \ , \ x \wedge x = x$

(۲) $x \vee y = y \vee x \ , \ x \wedge y = y \wedge x$

(۳) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \ , \ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

(۴) $(x \wedge y) \vee x = x \ , \ (x \vee y) \wedge x = x$

مثال ۱-۲.۱ فرض کنید L مجموعه اعداد طبیعی باشد و $\vee$ کوچکترین مضرب مشترک و $\wedge$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک باشد ، آن گاه روابط (۱) تا (۴) در تعریف فوق برقرار است ، لذا $(L \ , \ \vee \ , \ \wedge)$ یک مشبکه است .

تعریف ۱-۱.۳ دو مشبکه L_1 و L_2 همریخت هستند هرگاه تابعی مانند θ از L_1 به L_2 وجود داشته باشد به طوری که برای هر $y, x \in L_1$ داشته باشیم $\theta(x \wedge y) = \theta(x) \wedge \theta(y)$ و $\theta(x \vee y) = \theta(x) \vee \theta(y)$.

همچنین تعاریف زیر را داریم :

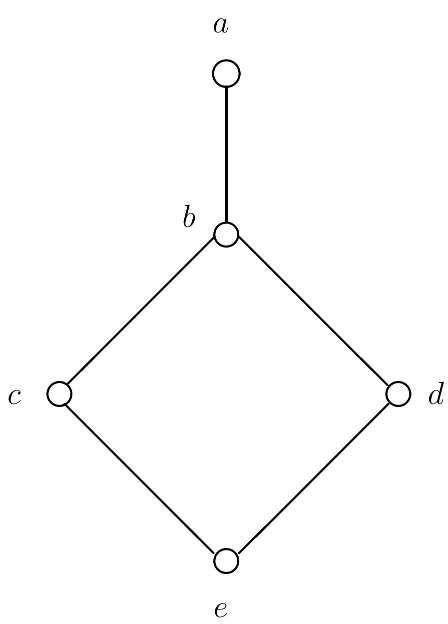
هرگاه θ یک به یک و پوشا باشد آن گاه L_1 و L_2 را یکریخت گویند .

هرگاه θ پوشا باشد آن گاه L_1 و L_2 را بروریختی گویند .

هرگاه θ یک به یک باشد آن گاه L_1 و L_2 را تکریختی گویند .

تعریف ۱-۱.۴ فرض کنید $(L\,,\,\vee\,,\,\wedge)$ یک مشبکه و L' زیر مجموعه ای غیر تهی از L باشد ، L' را زیر مشبکه L گویند هرگاه برای هر $a, b \in L'$ داشته باشیم $a \wedge b \in L'$ و $a \vee b \in L'$.

مثال ۱-۱.۵ مشبکه $A = \{\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,,\,e\,\}$ را با دیاگرام زیر درنظر بگیرید ،



زیر مجموعه $P = \{\, c \,,\, d \,,\, e \,\}$ از مجموعه A ، یک زیر مشبکه نمی باشد ، چون $c, d \in P$ و $d \vee c = b$ ولی $b \notin P$.

تعریف ۱-۶.۱ عملگر دو تایی $\leqslant$ را یک رابطه جزئاً مرتب روی مجموعه A گویند اگر شرایط زیر برای هر $a \,,\, b \,,\, c \in A$ برقرار باشد :

(۱) $a \leqslant a$ ،

(۲) اگر $a \leqslant b \,,\, b \leqslant a$ آن گاه $a = b$ ،

(۳) اگر $a \leqslant b \,,\, b \leqslant c$ آن گاه $a \leqslant c$.

و اگر برای هر $a \,,\, b \in A$ داشته باشیم :

(۴) $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$ ،

عملگر دو تایی $\leqslant$ را یک رابطه کلاً مرتب روی مجموعه A گویند .

یک مجموعه غیر تهی همراه با یک عملگر جزئاً مرتب را مجموعه جزئاً مرتب و همراه با یک عملگر کلاً مرتب را مجموعه کلاً مرتب گویند .

مثال ۱-۷.۱ فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی باشد ، و عملگر دوتایی $\leqslant$ ، رابطه تقسیم باشد آن گاه $\leqslant$ یک رابطه جزئاً مرتب روی مجموعه A است .

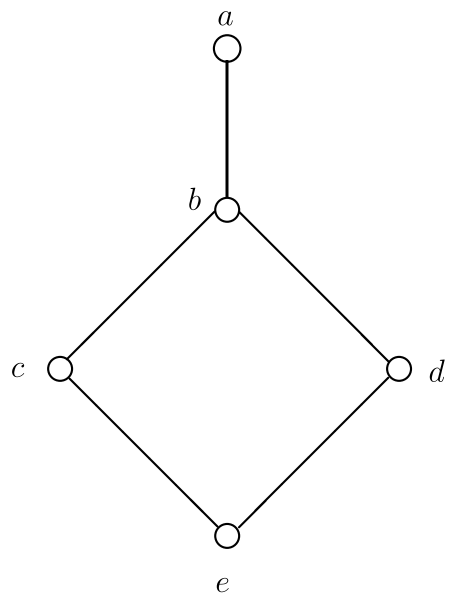
مثال ۱-۸.۱ فرض کنید A زیر مجمو عه ای از اعداد حقیقی باشد و عملگر دوتایی $\leqslant$ همان ترتیب معمولی روی اعداد باشد ، آن گاه $\leqslant$ یک رابطه کلاً مرتب روی مجموعه A است .

تعریف ۱-۹.۱ فرض کنید A یک زیر مجموعه از مجموعه جزئاً مرتب P باشد ، عضو $p \in P$ یک کران بالا برای مجموعه A است اگر برای هر عضو $a \in A$ ، $a \leqslant p$ باشد . $p \in P$ را کوچکترین کران

بالا (سوپریمم مجموعه A [1]) گویند ، اگر p یک کران بالای مجموعه A باشد ، و اگر b کران بالای دیگری برای مجموعه A باشد ، آن گاه $p \leqslant b$ باشد . به طور مشابه می توان کران پایین و بزرگترین کران پایین (اینفیمم مجموعه A [2]) را تعریف کرد .

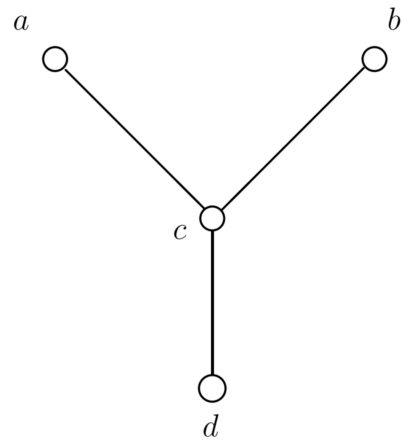
تعریف ۱-۱۰.۱ مجموعه جزئاً مرتب L را یک مشبکه گویند اگر و تنها اگر برای هر $a\,,\,b \in L$ ، $inf\{a\,,\,b\}$ و $sup\{\,a\,,\,b\,\}$ موجود و متعلق به مجموعه L باشد .

مثال ۱-۱۱.۱ در دیاگرام زیر مجموعه $L = \{\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,,\,e\,\}$ یک مشبکه است چون برای هر دو عضو دلخواه که در L در نظر بگیرید sup و inf آنها موجود است .



مثال ۱-۱۲.۱ مجموعه $L = \{\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,\}$ را با دیاگرام زیر در نظر بگیرید ،

[1] sup A
[2] inf A



مجموعه L یک مشبکه نیست زیرا $a\ ,\ b \in L$ ولی $sup\{a\ ,\ b\}$ وجود ندارد .

لم ۱-۱۳.۱ تعریف ۱-۱.۱ و تعریف ۱-۱۰.۱ در مورد مشبکه معادل هستند .

برهان : [۴] . ■

تعریف ۱-۱۴.۱ مشبکه L توزیع پذیر است هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

(۵) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(۶) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

لم ۱-۱۵.۱ رابطه‌های (۵) و (۶) درتعریف فوق معادلند .

برهان : [۴] . ■

تعریف ۱-۱۶.۱ فرض کنید $(L\ ,\ \vee\ ,\ \wedge)$ یک مشبکه باشد ، رابطه $\leqslant$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$x \leqslant y$ اگر و تنها اگر $x \vee y = y$ و یا $x \leqslant y$ اگر و تنها اگر $x \wedge y = x$.

لم ۱-۱.۱۷ اگر در تعریف فوق $x \leqslant y$ باشد آن گاه $x \wedge y = x$ ، معادل با $x \vee y = y$ است .

برهان : طبق فرض $x \wedge y = x$ لذا $x \vee y = (x \wedge y) \vee y$ و از رابطه (۴) در تعریف ۱-۱.۱ ، $(x \wedge y) \vee y = y$ بنابراین $x \vee y = y$ و بطور مشابه می توان برعکس را ثابت کرد . ■

قضیه ۱-۱.۱۸ اگر L یک مشبکه باشد آن گاه برای هر $x, y, z \in L$:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

برهان : طبق رابطه (۴) درتعریف ۱-۱.۱ ، $(x \wedge y) \vee x = x$ بنابراین طبق رابطه $\leqslant$ در تعریف ۱-۱.۹ ، $x \wedge y \leq x$ و همچنین چون $(x \wedge y) \vee y = y$ و $(y \vee z) \wedge y = y$ لذا $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$ بنابراین $x \wedge y$ یک کران پایین برای x و $y \vee z$ می باشد لذا $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$. بطور مشابه $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$ ، از دو رابطه اخیر نتیجه می شود $x \wedge (y \vee z)$ یک کران بالا برای $x \wedge z$ و $x \wedge y$ است ، لذا $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ می باشد . ■

نتیجه ۱-۱.۱۹ مشبکه $(L, \leq, \vee, \wedge)$ توزیع پذیر است اگر و تنها اگر :

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) .$$

برهان : بنا به تعریف ۱-۱.۱۴ و لم ۱-۱.۱۵ و قضیه ۱-۱.۱۸ واضح است . ■

تعریف ۱-۱.۲۰ مشبکه L مدولار است اگر برای هر $x, y, z \in L$ داشته باشیم :

اگر $x \leqslant z$ آن گاه $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

لم ۱-۱.۲۱ هر مشبکه توزیع پذیر یک مشبکه مدولار است .

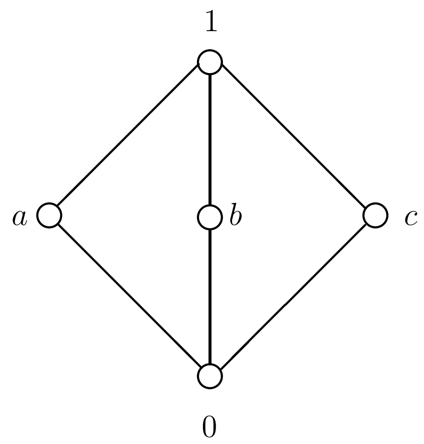
برهان : فرض کنید مشبکه L توزیع پذیر باشد و برای هر $x, y, z \in L$ ، $x \leqslant z$ و لذا طبق رابطه $\leqslant$ در تعریف ۱-۱.۹ ، $x \vee z = z$. و چون مشبکه L توزیع پذیر است لذا :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$$

و بنابراین مشبکه L مدولار است . ■

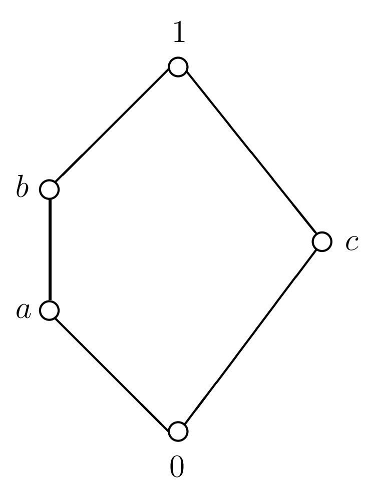
عکس لم فوق برقرار نیست ، یعنی هر مشبکه مدولار حتما توزیع پذیر نیست . این مطلب با ذکر یک مثال نشان داده می شود .

مثال ۱-۲۲.۱ مشبکه $L = \{\circ, a, b, c, ۱\}$ را با دیاگرام زیر در نظر بگیرید :



مشاهده می شود که مشبکه L مدولار است ، ولی مشبکه توزیع پذیر نیست ، زیرا $a \vee (b \wedge c) = a \vee \circ = a$ ولی $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ۱ \wedge ۱ = ۱$ و در نتیجه $a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

مثال ۱-۲۳.۱ مشبکه $L = \{\circ, a, b, c, ۱\}$ را با دیاگرام زیر در نظر بگیرید :



این مشبکه نه مدولار است و نه توزیع پذیر . توزیع پذیر نیست ، زیرا $a = \circ \vee a = (b \wedge c) \vee a$ و $b = ۱ \wedge b = (a \vee c) \wedge (a \vee b)$ ولی $a \neq b$ و مدولار هم نیست زیرا $a \leqslant b$ و $a = (c \wedge b) \vee a$ و $(a \vee c) \wedge b = b$ ولی $a \neq b$.

۱-۲ جبربول و ایده‌آل

تعریف ۱-۲.۱ دستگاه جبری $(B\ ,\vee,\wedge\ ,\circ,۱)$ را با دو عملگر دوتایی $\wedge\ ,\vee$ و عملگرهای خنثی $\circ$ و ۱ یک جبر بول گویند اگر شرایط زیر برقرار باشد :

(۱) $(B\ ,\ \vee\ ,\ \wedge)$ یک مشبکه توزیع پذیر باشد ،

(۲) برای هر $a \in B$ داشته باشیم $a \wedge ۱ = a\ ,\ \circ \vee a = a$ ،

(۳) برای هر $a \in B$ ، وجود داشته باشد $a' \in B$ به طوریکه ، $a \wedge a' = \circ\ ,\ a \vee a' = ۱$.

مثال ۱-۲.۲ فرض کنید X مجموعه دلخواهی باشد $(Su(X)\ ,\cup,\cap\ ,\varnothing,X)$ یک جبر بول است ، اگر مجموعه $Su(X)$ (مجموعه توانی X [۱]) و $\circ$ مجموعه تهی و ۱ مجموعه X و $\vee$ و $\wedge$ به ترتیب عملگرهای دوتایی $\cup$ (اجتماع) و $\cap$ (اشتراک) باشند .

تعریف ۱-۲.۳ یک زیر مجموعه غیر تهی I از مشبکه L را یک ایده‌آل گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشد :

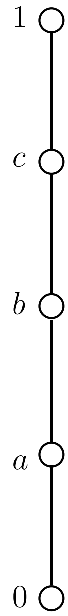
(۱) اگر $x \leqslant y$ و $y \in I$ ، آن گاه $x \in I$;

(۲) اگر $x\ ,\ y \in I$ ، آن گاه $x \vee y \in I$.

---

[۱] Su(X)={ X مجموعه همه زیر مجموعه های}

مثال ۱-۴.۲ مشبکه $L=\{0,a,b,c,1\}$ را با دیاگرام زیر در نظر بگیرید :



زیر مجموعه $I=\{0,a,b\}$ ایده‌آل می‌باشد .

لم ۱-۵.۲ اگر I_2,I_1 ایده‌آل باشند آن گاه $I_1\cap I_2$ ایده‌آل است .

برهان : ابتدا ثابت می‌شود که اگر I_1 و I_2 دو ایده‌آل باشند آن گاه $I_1\cap I_2\neq\emptyset$. چون $I_1\neq\emptyset$ و $I_2\neq\emptyset$ لذا وجود دارد $x\in I_1$ و $y\in I_2$. از طرفی $x\wedge y\leqslant x$ و $x\in I_1$ و I_1 ایده‌آل است لذا $x\wedge y\in I_1$ و چون $x\wedge y\leqslant y$ و $y\in I_2$ و I_2 ایده‌آل است لذا $x\wedge y\in I_2$ بنابراین $x\wedge y\in I_1\cap I_2$ یعنی $I_1\cap I_2\neq\emptyset$.

فرض کنید $x\leqslant y$ و $y\in I_1\cap I_2$ باشد ، ثابت می‌شود $x\in I_1\cap I_2$. از اینکه $y\in I_1\cap I_2$ نتیجه می شود $y\in I_1$ و $y\in I_2$ و چون I_1 و I_2 ایده‌آل هستند ، لذا $x\in I_1$ و $x\in I_2$ و بنابراین $x\in I_1\cap I_2$.

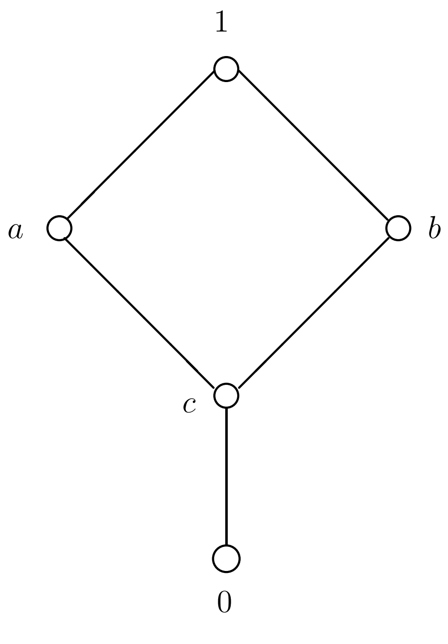
حال ثابت می شود که اگر $x\,,\,y\in I_1\cap I_2$ باشد آن گاه $x\vee y\in I_1\cap I_2$ است . از اینکه $x\,,\,y\in I_1\cap I_2$ است نتیجه می شود ، $x\,,\,y\in I_1$ و $x\,,\,y\in I_2$ است و چون I_1 و I_2 ایده‌آل هستند

پس ، $x \vee y \in I_۱$ و $x \vee y \in I_۲$ است بنابراین $x \vee y \in I_۱ \cap I_۲$ است . ■

نتیجه ۱-۶.۲ اگر $I_۱, I_۲, I_۳, ...$ ایده‌آلهایی از مشبکه L باشد آن گاه $\cap I_n$ نیز ایده‌آل L می‌باشد .

لم ۱-۷.۲ اگر $I_۱, I_۲$ ایده‌آلهای مشبکه L باشد آن گاه $I_۱ \cup I_۲$ لزوماً ایده‌آل نیست .

مثال ۱-۸.۲ مشبکه $L = \{۰, a, b, c, ۱\}$ رابادیاگرام زیر در نظر بگیرید :



مشاهده می شود که زیر مجموعه های $I_۱ = \{۰, a, c\}$ و $I_۲ = \{۰, b, c\}$ ایده‌آل می‌باشند ولی $I_۱ \cup I_۲ = \{۰, a, b, c\}$ ایده‌آل نیست . چون $a, b \in I_۱ \cup I_۲$ و $a \vee b = ۱$ ولی $۱ \notin I_۱ \cup I_۲$.

فصلِ ۲

مشتق در مشبکه‌ها