وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل معادلات انتگرال - دیفرانسیل سهموی با استفاده از روش موجک گالرکین

استاد راهنما

دکتر ناصر آقازاده

استاد مشاور

دکتر محمد جهانشاهی - دکتر علی خانی

پژوهشگر

مینا شکرائی

تبریز، ایران
۱۳۸۹

تقدیم به همسر آرامشگرم

استاد صبورم،

خانواده‌ام و دوستان مهربانم...

خداوند

روزگاری از نور و روح و عشقوات به ذره‌ای خاک دمیدی، نور چشمانم شد، روح نبضم، عشق قلب و آنگاه خاک من شد، انسان...

و روزگاری دیگر به حکم و مشیت، خداوند، باز پس می‌گیری همه‌ی نور و همه‌ی روح‌ات را و خاک می‌شوم، و اما عشق را، عشق را نه، که هر چند همه‌ی حیات و مماتم در گرو اراده‌ی توست، اما اجازه میخواهم تا در حیات و ممات، عشق در هست و نیستم باقی باشد، عشق تو.

و خداوند

انگار همین عشقوات که این الوهیت و این ربوبیت عظیم را برای کوچکی چون من معنا می‌بخشد، که چون نیستی را فرمان داده‌ای به عشق، در دم هست شدم، بی‌درنگ، و من که در تمام این هست و هستی، هیچم و هیچ...

خداوند، نزدیکتر از...

آنسوی دلتنگی‌ها خدایی هست که داشتن‌اش

جبران همه نداشتن‌هاست

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوند را که مرا از فروخفتگی شب خویش، که غافل از اقامه‌ی قدقامت نور به سر می‌بردم، از سنگینی کلام‌اش وزین گرداند و به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ناصر آقازاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، دانش بسیارشان و تسلط کامل به بسته زی‌پرشین و برنامه‌های ریاضی این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمد جهانشاهی و جناب آقای دکتر علی خانی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر که همیشه آماده‌ی پاسخگویی به سوال‌های بیشمار من بودند و به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از معلم گرامی دوران تحصیلم، خانم اعظم دزفولیان که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، و همچنین از جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست، مدیر گروه محترم ریاضی، که همیشه قوت قلب گروه ریاضی هستند تشکر می‌نمایم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم و خواهرم شبنم و همسر گرامی‌ام به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند و دوست ارزشمند و همیشه‌ام میدیا، که وجودی آرامش‌بخش در کنار من بود و دوستان پر مهرم، چرو، رمیسا و میترا که مهرشان همچون نور خورشید، بی‌منت بر من تابید.

مینا شکرائی

تیر ۱۳۸۹

چکیده

این پایان‌نامه، به بحث در مورد حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل سهموی و خطاهای ناشی از تقریب زدن جواب می‌پردازد. روشی که در اینجا برای تقریب زدن جواب معادله‌ی مورد نظر استفاده می‌شود روش فشرده‌سازی موجک گالرکین ناپیوسته است و در هر مرحله از تقریب، خطای جواب تقریبی نیز محاسبه می‌شود. معادلات انتگرال-دیفرانسیل سهموی غالباً در مسائل فیزیک ایجاد می شوند مانند مسائل استاتیک، حالت مانا، و معادلات گرما که به زمان وابسته می‌باشند.

کلید واژه‌ها: معادلات انتگرال دیفرانسیل سهموی، فشرده سازی با استفاده از موجک، خطاهای تقریب، روش گالرکین ناپیوسته، نظم پذیری ضعیف.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ تعاریف و پیشنیازها

تعریف ۱.۱.۱. مرز پیوسته لیپ شیتز[۱]
گوییم مجموعه‌ی باز $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ دارای مرز پیوسته لیپ شیتز است، اگرشرطهای زیر برقرار باشد: ثابت‌های $0 < \alpha$ و $0 < \beta$ وجود داشته باشد و تعداد متناهی دستگاههای مختصات موضعی و نگاشت‌های موضی a_r برای $1 \le r \le R$ که روی دامنه‌های $\{\hat{x}^r \in \mathbb{R}^{n-1}, |\hat{x}^r| \le \alpha\}$ پیوسته‌ی لیپ شیتز هستند به طوریکه:

$$\Gamma = \cup_{r=1}^{R}\{(x_1^r, \hat{x}^r);\ x_1^r = a_r(x^r),\ |\hat{x}^r| < \alpha\},$$

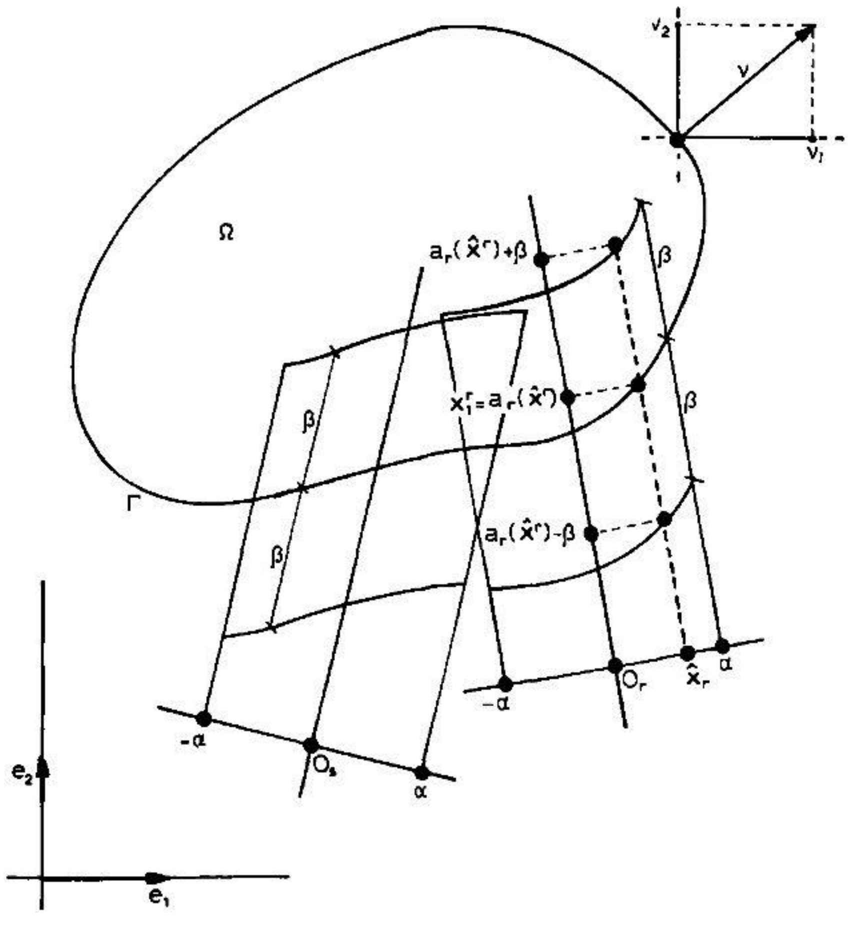
$$\{(x_1^r, \hat{x}^r);\ a_r(\hat{x}^r) < x_1^r < a_r(\hat{x}^r) + \beta;\ |\hat{x}^r| < \alpha\} \subset \Omega,\ 1 \le r \le R,$$

$$\{(x_1^r, \hat{x}^r);\ a_r(\hat{x}^r) - \beta < x_1^r < a_r(\hat{x}^r);\ |\hat{x}^r| < \alpha\} \subset C\bar{\Omega},\ 1 \le r \le R,$$

که $\hat{x}^r = (x_2^r, \cdots, x_n^r)$ و $|\hat{x}^r| < \alpha$ برای $|x_i^r| < \alpha,\ r \le i \le n$ برقرار است. ملاحظه می‌شود که یک مجموعه‌ی باز با مرز پیوسته لیپ شیتز کراندار است (شکل ۱.۱).

تعریف ۲.۱.۱. اندیس چندگانه[۲]
فرض کنید d بعد فضا باشد، اندیس چندگانه یک بردار به شکل $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ است که شامل اعداد صحیح نامنفی α_j است. طول اندیس چندگانه α را با $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$ نشان میدهیم.

[۱] Lipschitz-continuous boundary
[۲] Multi-index



Ω
Γ
$a_r(\hat{x}^r)+\beta$
$x_1^r = a_r(\hat{x}^r)$
$a_r(\hat{x}^r)-\beta$
β
β
β
β
v_2
v
v_1
$-\alpha$
O_s
α
$-\alpha$
O_r
$\hat{x}_r$
α
e_2
e_1

شکل ۱.۱:

تابع m بار مشتق پذیر پیوسته f را در نظر بگیرید، مشتق جزئی α ام f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۸] :

$$D^{\alpha}f = \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial {x_1}^{\alpha_1}\partial {x_2}^{\alpha_2}\dots\partial {x_d}^{\alpha_d}}.$$

ملاحظه ۳.۱.۱. *فضای لبگ L^p شامل تابع‌های ناپیوسته و ناهموار است که مشتق‌های آنها با روش‌های کلاسیک تعریف نشده‌اند. به هر حال در بسیاری از موارد مشتق‌های کلاسیک تقریباً همه جا وجود دارند. چیزی که نیاز داریم این است که مفهوم مشتق را مستقل از زیر مجموعه‌هایی با اندازه صفر تعمیم دهیم. سوبولف [۳] این کار را با تعریف کردن مشتق‌های ضعیف انجام داده است. جزء اصلی برای تعریف مشتق‌های ضعیف، توزیع‌ها هستند.*

تعریف ۴.۱.۱. فضای توزیع‌ها[۴]

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه‌ی باز است. فضای توزیع‌ها (تابع‌هایی با محمل فشرده که بینهایت بار هموار هستند) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_0^{\infty}(\Omega) = \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega);\ supp(\varphi) \subset \Omega;\ supp(\varphi)\ is\ compact\}.$$

در بعضی از جاها از نمادهای $\mathcal{D}(\Omega)$ یا $D(\Omega)$ به جای ${C_0}^{\infty}(\Omega)$ استفاده می‌کنند. یادآوری می‌کنیم که محمل فشرده‌ی یک تابع مانند φ به صورت زیر تعریف می‌شود که همیشه بسته و کراندار است:

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

در تعریف مشتق‌های ضعیف از بعضی نتایج اولیه انتگرالگیری جزءبه جزء استفاده می‌شود، ابتدا این نتایج را به صورت قضایایی در زیر می‌آوریم.

قضیه ۵.۱.۱. گوس[۵]

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه کراندار با مرز پیوسته لیپ شیتز است. برای هر $u, v \in C^1 \bigcap C(\bar{\Omega})$ داریم:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}v dx = -\int_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega}uv\nu_i dS$$

که $\nu(x) = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)^T(x)$ بردار نرمال خارجی واحد مرز $\partial\Omega$ است.

---
[۳] S.L.Sbolev
[۴] space of distributions
[۵] Gauss's theorem

برهان. [۸] □

قضیه ۱.۱.۶. استوکس[۶]

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه کراندار با مرز پیوسته لیپ شیتز است. هر بردار هموار

$$\omega \in [C^1 \bigcap C(\bar{\Omega})]^d$$

در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \omega(x) dx = \int_{\partial\Omega} \omega(x) \cdot \nu(x) dS$$

که $\nu(x)$ بردار نرمال خارجی واحد به $\partial\Omega$ و $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_d}$ بردار گرادیان است.

برهان. [۸] □

قضیه ۱.۱.۷. *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه باز است و $f \in C^m(\Omega)$ و α یک اندیس چندگانه است به طوریکه $|\alpha| \leq m$. آنگاه رابطه زیر برای هر $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ برقرار است:*

$$\int_\Omega D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

برهان. [۸] □

با این قضیه خیلی به تعریف مشتق‌های ضعیف نزدیک شدیم. آخرین چیزی که نیاز داریم تعریف فضای ${L^p}_{loc}(\Omega)$ است.

تعریف ۱.۱.۸. فضای تابع‌های انتگرال پذیر موضعی[۷]

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه باز است و $1 \leq p < \infty$. تابع $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$، p−انتگرال پذیر موضعی در Ω نامیده می‌شود اگر برای هر زیر مجموعه فشرده‌ی K از Ω داشته باشیم $f \in L^p(K)$.

فضای همه‌ی تابع‌های p−انتگرال پذیر موضعی در Ω با $L^p_{loc}(\Omega)$ نشان داده می‌شود.

---

[۶] Stokes's theorem

[۷] Space of locally-integrable functions

ملاحظه ۹.۱.۱. *به وضوح برای هر مجموعه‌ی باز $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ و $1 \le p < \infty$ داریم:*

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)\cdot$$

فضای L^p_{loc} خیلی بزرگ است. برای مثال تابع $\frac{1}{x}$ در فضای $L^p(0,\infty)$ برای هر $1 \le p$ قرار ندارد، اما در فضای $L^p_{loc}(0,\infty)$ برای هر $1 \le p$ قرار دارد.

ملاحظه ۱۰.۱.۱. *اگر $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ مجموعه‌ای باز و نه لزوماً کراندار باشد، آنگاه هرجا که $1 \le q \le p$ شمول زیر برقرار است:*

$$L^p_{loc}(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega)$$

تعریف ۱۱.۱.۱. مشتق ضعیف[۸]

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز است. $f \in L^1_{loc}$ و α یک اندیس چندگانه است. تابع $D^\alpha_w f \in L^1_{loc}$ را مشتق ضعیف αام f می‌گوییم اگر رابطه‌ی زیر برای هر $\varphi \in {C_0}^\infty(\Omega)$ برقرار باشد:

$$\int_\Omega D^\alpha_w f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx$$

لم ۱۲.۱.۱. *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز است و $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ و α یک اندیس چندگانه است. مشتق ضعیف α ام $D^\alpha_w f \in L^1_{loc}(\Omega)$ به طور منحصر به فرد در Ω تعریف می‌شود.*

برهان. [۸] □

تعریف ۱۳.۱.۱. فضاهای سوبولف[۹]

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز است، $1 \le k$ عدد صحیح و $p \in [1,\infty]$. فضاهای سوبولف را با $W^{k,p}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega);\ D^\alpha_w f\ exists\ and\ lies\ in\ L^p(\Omega)\ for$$
$$all\ multi-indices\ \alpha,\ |\alpha| \le k\}\cdot$$

[۸] Weak Derivative
[۹] Sobolev spaces

برای هر $1 \leq p < \infty$ نرم $\|\cdot\|_{k,p}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\|f\|_{k,p} &= \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |D_w^\alpha f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D_w^\alpha f\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

و برای $p = \infty$ تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\leq k} \|D_w^\alpha f\|_\infty,$$

در مورد خاصی که $p = 2$ داریم

$$W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)\cdot$$

قضیه ۱.۱.۱۴. *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز و $k \geq 1$ عدد صحیح است. فضای سوبولف $W^{k,2}(\Omega)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است:*

$$\begin{aligned}(f,g)_{k,2} &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} D^\alpha f D^\alpha g dx \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

برهان. [۸] □

تعریف ۱.۱.۱۵. موجک[۱۰]

اصطلاح **موجک** اولین بار توسط مورلت [۱۱] در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. موضوع موجک با سرعت چشم گیری توسعه یافت و کاربردهای زیادی در حوزه‌های مختلف برای آن شکل گرفت، از جمله در پردازش سیگنال، گرافیک کامپیوتری، پردازش تصویر، نظریه تقریب، نظریه ماتریس، نظریه عملگرها و معادلات دیفرانسیل.

این بخش را با تعریف آنالیز تجزیه‌ی چندگانه [۱۲] آغاز میکنیم. ابتدا این مفهوم را در فضای توابع انتگرال پذیر مجذوری روی $\mathbb{R}$ یعنی $L^2(\mathbb{R})$ بررسی می‌کنیم.

---

[۱۰] Wavelet

[۱۱] J.Morlet

[۱۲] Multiresolution Analysis

منظور از آنالیز تجزیه‌ی چندگانه MRA دنباله‌ای از زیر فضاها متشکل از توابعی روی $\mathbb{R}$ است بطوریکه در خواص زیر صدق کنند:

۱. برای هر n، V_n زیر فضای بسته‌ای از $\mathbb{R}$ باشد.

۲. $V_n \subset V_{n+1}$

۳. $\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} V_n} = L^2(\mathbb{R})$

۴. $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} V_n = 0$

۵. $f(x) \in V_0 \Longleftrightarrow f(2^n x) \in V_{n+1}$

۶. $\phi \in V_0$ به گونه‌ای موجود باشد که $\{\phi_{0,k}(x) = \phi(x-k) \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ پایه متعامد یکه برای V_0 باشد.

به تابع ϕ، تابع مقیاس گفته می‌شود، که می‌تواند به صورت ترکیب خطی از توابع $\phi(2x-k)$ نوشته شود:

$$\phi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x-k)\cdot$$

به رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی دومقیاسی برای توابع مقیاس گفته می‌شود و به $\{p_k\}$ دنباله‌ی دومقیاسی ϕ می‌گوییم. با توجه به شرط (2)، آنالیز تجزیه‌ی چندگانه بصورت دنباله تو در توی

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$$

ساخته می‌شود و با توجه به شرط (5) اگر فضای V_n معلوم باشد هر فضای V_m (m دلخواه) را می‌توان ساخت. بنابراین با داشتن تابع مقیاس ϕ که فضای V_0 را تشکیل می‌دهد می‌توان آنالیز تجزیه‌ی چندگانه‌ی V_n را مشخص نمود.

حال به تعریف موجک باز می‌گردیم. فرض کنید که یک دنباله‌ی تودرتو از زیر فضاهای V_n داده شده که در خواص آنالیز تجزیه‌ی چندگانه صدق می‌کند. زیر فضاهای W_n وجود دارند که مکمل‌های متعامد V_n در V_{n+1} هستند، یعنی:

$$V_{n+1} = V_n \bigoplus W_n$$

و

$$W_n \perp W_{n'}, \quad if\ n \neq n'\cdot$$

از آنجایی که زیر فضاهای V_n تودرتو هستند نتیجه می‌شود:

$$V_N = V_n \bigoplus_{k=0}^{N-n-1} W_{n+k}, \quad n < N\cdot$$

همه‌ی زیر فضاهای W_n نسبت به هم متعامد هستند. از خواص (3) و (4) از آنالیز تجزیه‌ی چندگانه، تجزیه‌ی متعامد $L^2(\mathbb{R})$ بدست می‌آید:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = \cdots \bigoplus W_{-1} \bigoplus W_0 \bigoplus W_1 \bigoplus \cdots,$$

به علاوه فضاهای W_n خاصیت مقیاس (4) را همانند فضاهای V_n دارند:

$$f(x) \in W_n \Longleftrightarrow f(2x) \in W_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}\cdot$$

حال فرض کنید تابع مقیاس ϕ در V_n داده شده است. اساس ساختن آنالیز تجزیه‌ی چندگانه وجود تابع ψ در W_0 است که موجک نامیده می‌شود و

$$\{\psi_{n,k} : k \in \mathbb{Z}\}$$

W_n را تولید می‌کند، که

$$\psi_{n,k}(x) := \psi(2^n x - k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2n-1\cdot$$

از آنجایی که $V_1 = V_0 \bigoplus W_0$، $\psi(x) \in W_0$ می‌تواند به صورت ترکیب خطی از $\phi(2x-k)$ها، که یک پایه برای V_1 را تشکیل می‌دهند، نوشته شود. همانند رابطه‌ی دومقیاسی برای توابع مقیاس، دنباله‌ی دومقیاسی $\{q_k\}$ به گونه‌ای وجود دارد که:

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} q_k \phi(2x-k)\cdot$$

رابطه‌ی بالا رابطه‌ی دومقیاسی برای موجک نام دارد.

تعریف ۱.۱.۱۶. پایه‌های متعامد دوگان[۱۳]
مجموعه‌ی تابع‌های پایه‌ای $\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in L^2$ را پایه‌ی متعامد دوگان گوییم، اگر مجموعه‌ی تابع‌های پایه‌ای دیگری مانند $\{\tilde{\phi}_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in L^2$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$\langle \phi_k, \tilde{\phi}_l\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(x)\overline{\tilde{\phi}_l(x)}dx = \delta_{k,l}.$$

مجموعه‌ی $\{\tilde{\phi}_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ پایه‌ی دوگان $\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ نامیده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که در پایه‌های متعامد همه‌ی تابع‌های پایه‌ای به یک فضا تعلق دارند اما در پایه‌های متعامد دوگان، پایه‌های دوگان لزوماً به فضای اصلی تعلق ندارند.

حال موجک‌های متعامد دوگان را تعریف می‌کنیم. فرض کنید زیرفضاهای موجک W_n به صورت زیر تولید می‌شوند:

$$W_n = \{\psi_l^n := 2^{n/2}\psi(2^n x - l);\ l\in\mathbb{Z}\}$$

اگر موجک $\psi_l^n \in W_n$ دارای دوگان $\tilde{\psi}_l^n \in \tilde{W}_n$ باشد و در شرط متعامد دوگان زیر صدق کند، به پایه‌ی $\{\psi_l^n\}$، پایه‌ی موجک متعامد دوگان گوییم:

$$\langle \psi_l^n, \tilde{\psi}_k^j\rangle = \delta_{n,j}\cdot\delta_{l,k}, \quad j,k,l,n\in\mathbb{Z}.$$

تعریف ۱.۱.۱۷. درجه‌های آزادی[۱۴]
پارامترهایی که به طور منحصر به فرد تابعی در فضای V را به صورت زیر تعریف می‌کنند، درجه‌های آزادی آن تابع نامیده می‌شوند:

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i$$

که ϕ_iها پایه‌های فضای V و c_iها درجه‌های آزادی u هستند.

تعریف ۱.۱.۱۸. پایه‌های ریز[۱۵]

[۱۳] biorthogonal basis
[۱۴] degrees of freedom
[۱۵] Riesz basis

فرض کنید $g(x) \in L^2$ به شکل سری زیر با پایه‌های $\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in L^2$ نوشته می‌شود:

$$g(x) = \sum_k c_k \phi_k(x)\cdot$$

مجموعه‌ی پایه‌های $\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$، پایه‌های ریز نامیده می‌شود اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$R_1 \|c_k\|_{l^2}^2 \leqslant \|g(t)\|^2 \leqslant R_2 \|c_k\|_{l^2}^2$$

$$R_1 \|c_k\|_{l^2}^2 \leqslant \| \sum_k c_k \phi_k(x)\|^2 \leqslant R_2 \|c_k\|_{l^2}^2,$$

که $0 < R_1 \leqslant R_2 < \infty$ کرانهای ریز نامیده می‌شوند.

ملاحظه ۱۹.۱.۱. *اگر پایه‌ی $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ دارای ویژگی پایه‌های ریز باشد، آنگاه بسط سری زیر برای هر تابع $f \in L^2(\mathbb{R})$ موجود می‌باشد:*

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x)\cdot$$

فصل ۲

روش عناصر متناهی

۱.۲ مقدمه

روش عناصر متناهی روشی است که در آن دامنه‌ی داده شده به مجموعه‌ای از زیردامنه‌ها تقسیم می‌شود، که این زیر دامنه‌ها از نظر هندسی از دامنه‌ی اصلی ساده‌تر هستند و «عناصر متناهی» نامیده می‌شوند. ویژگی دیگر این روش پیدا کردن تقریبی از جواب معادله بر روی هر عنصر است. این جواب اغلب چند جمله‌ای پیوسته‌ای است که به صورت ترکیب خطی از مقدارهای نقاط گرهی نوشته می‌شود، و پس از بدست آوردن معادله‌ی هر عنصر، با اعمال کردن شرطهای پیوستگی عناصر، معادلات را با هم ترکیب می‌کنیم. در اینجا جواب معادله را روی هر عنصر با روش‌های تغییراتی [۱] به‌دست‌می‌آوریم. در روش‌های تغییراتی معادله دیفرانسیلی را که می‌خواهیم حل کنیم با فرم ضعیف انتگرال وزندار معادل‌اش عوض می‌کنیم. جواب تقریبی را به صورت ترکیب خطی از تابع‌های تقریب ϕ_j و ضرایب مجهول c_j در نظر می‌گیریم و در فرم به‌دست‌آمده جایگذاری می‌کنیم. ضرایب c_j را باید به‌گونه‌ای تعیین کنیم که در فرم معادل به‌دست‌آمده صدق کنند. در بخش‌های ۲.۲ و ۳.۲ مقدمات مورد نیاز برای معرفی روش‌های تغییراتی آورده شده و در بخش ۴.۲ توضیحات کامل روش بیان شده است.

برای مسائل وابسته به زمان از روش تفاضلات متناهی [۲] استفاده می‌کنیم. در روش تفاضلات متناهی ابتدا دامنه را به زمان‌های دلخواه افراز می‌کنیم آنگاه مقدار جواب در گام زمانی t^n را با توجه به مقدار جواب در گام‌های زمانی قبل به‌دست‌می‌آوریم. در بخش ۵.۲ توضیحات بیشتر

[۱] variational methods
[۲] finite difference

آورده شده و در بخش ۶.۲ گام‌های اساسی روش عناصر متناهی در حالت کلی بیان شده است.

۲.۲ فرم های انتگرالی وزندار

فرض کنید u جواب معادله دیفرانسیل اصلی است. در روش عناصر متناهی تقریب u به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u \approx \sum_{j=1}^{n} u_j \psi_j \tag{۱.۲}$$

که در آن ψ_jها تابع‌های تقریب و u_jها ضرایب مجهول هستند. برای به‌دست‌آوردن ضرایب مجهول u_j نیاز به یک دستگاه مستقل خطی داریم که در آن تعداد معادلات و مجهولات با هم برابر باشند. همیشه جایگذاری جواب تقریبی در معادله‌ی اصلی دستگاه مورد نظر را تولید نمی‌کند. برای اینکه این مطلب روشن‌تر شود مثالی می‌آوریم. فرض کنید می‌خواهیم جواب تقریبی معادله‌ی زیر را مشخص کنیم:

$$-\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx}) + u = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{۲.۲}$$

$$u(0) = 1, \quad \left(x\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = 0\cdot \tag{۳.۲}$$

جواب تقریبی روی کل دامنه‌ی $\Omega = (0, 1)$ را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$u \approx U_N = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \tag{۴.۲}$$

که c_j ها ضرایب مجهول هستند که باید مشخص شوند و $\phi_j(x)$ و $\phi_0(x)$ تابع‌هایی هستند که باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که جواب تقریبی N-پارامتری U_N در شرایط مسأله صدق کند. برای مثال $N = 2$ را درنظر می‌گیریم و جواب تقریبی معادله‌ی(۲.۲) را برای $\phi_0 = 1$ ، $\phi_1 = x^2 - 2x$ و $\phi_2 = x^3 - 3x$ به فرم زیر می‌نویسیم:

$$u \approx U_N = c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + 1\cdot$$

ثابت‌های c_1 و c_2 باید به گونه‌ای مشخص شوند که جواب تقریبی U_N در (۴.۲)، در (۳.۲) صدق

کند. اگر U_N در (۳.۲) صدق کند، نتیجه می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
-\frac{dU_N}{dx} - x\frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N = &- 2c_1(x-1) - 3c_2(x^2-1) - 2c_1x - 6c_2x^2 \\
&+ c_1(x^2-2x) + c_2(x^3-3x) + 1 = 0
\end{aligned}
$$

بنابراین عبارت بالا برای هر مقدار x باید صفر شود پس داریم:

$$
\begin{aligned}
1 + 2c_1 + 3c_2 &= 0 \\
-6c_1 + 3c_2 &= 0 \\
c_1 - 9c_2 &= 0 \\
c_2 &= 0
\end{aligned}
$$

روابط بالا ناسازگارند بنابراین جوابی برای معادلات وجود ندارد. پس همیشه با جایگذاری جواب تقریبی به فرم (۱.۲) در معادله‌ی مورد نظر به جواب نخواهیم رسید. حال با استفاده از فرم‌های انتگرالی وزندار [۳] معادله‌ی (۲.۲) را با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۳.۲) حل می‌کنیم. اگر جواب تقریبی U_N در معادله دیفرانسیل (۲.۲) صدق کند، باید در فرم انتگرال وزندار زیر هم صدق کند:

$$
\int_0^1 \omega R dx = 0 \tag{۵.۲}
$$

که R باقی‌مانده نامیده می شود،

$$
R \equiv -\frac{dU_N}{dx} - x\frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N
$$

و ω تابع وزن نام دارد. از (۵.۲) برای توابع مستقل ω می‌توانیم به تعداد دلخواه معادله‌ی مستقل خطی نتیجه بگیریم. برای مثال اگر قرار دهیم $\omega = 1$ و $\omega = x$، نتیجه می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 1 R dx = (1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{2}(-6c_1 + 3c_2) + \frac{1}{3}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{4}c_2 \\
0 &= \int_0^1 x R dx = \frac{1}{2}(1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{3}(-6c_1 + 3c_2) + \frac{1}{4}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{5}c_2
\end{aligned}
$$

[۳] weighted-integral forms