دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

**پای‌ان‌نامه**

**برای دری‌افت درجه کارشناسی ارشد  در رشته**
**ریاضی ، گرای‌ش جبرلی**

**عنوان**

# حسابان دیفرانسیل جبری برای نظریه های پیمانه

استاد راهنما

**دکتر ولی اله خلیلی**

استاد مشاور

**دکتر اسماعیل پیغان**

پژوهشگر

زهرا باقری

۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: باقری　　　　　　نام: زهرا

---

عنوان: حسابان دیفرانسیل جبری برای نظریه های پیمانه

---

استاد راهنما: دکتر ولی اله خلیلی

استاد مشاور: دکتر اسماعیل پیغان

---

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　رشته: ریاضی　　　گرایش: جبرلی

---

دانشگاه: اراک　　　　　　دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۳　　　تعداد صفحات: ۱۲۶

---

واژگان کلیدی: نظریه پیمانه- جبرلی و ابرجبرلی-جبرمدرج- کروشه نیجن- هیوس- جبر انشتینی

---


**چکیده**

در این پایان‌نامه، ابتدا محاسبات دیفرانسیل به صورت مجرد روی جبرهای لی بررسی شده و سپس نظریه پیمانه ی جبری در جبرهای لی و ابرجبرهای لی شرح داده شده و پس از معرفی چند عملگر دیفرانسیل روی جبرهای لی، توسیعی از جبرهای لی میدان های برداری ارائه شده و نظیری از پتانسیل پیمانه ها روی آن معرفی می شود.

با احترام

تقدیم به پدرم، اول استادم، که همواره چتر محبتش بر سرم است

بزرگواری که الفبای زندگی را از او آموختم.

و

مادرم، بلند تکیه گاهم، که دامان پرمهرش یگانه پناهم است

مهربانی که عشق ورزیدن را از او آموختم.

"و همه کسانی که دوستشان دارم"

## بارالها!

در پیشگاه تو ایستاده‌ام، و دست‌هایم را به سوی تو بلند کرده‌ام، آگاهم که در بندگی‌ات کوتاهی نموده و در فرمانبری‌ات سستی کرده‌ام، اگر راه حیا را می‌پیمودم از خواستن و دعا کردن می‌ترسیدم ...

ولی ۰۰۰ پروردگارم! آن گاه که شنیدم گناهکاران را به درگاهت فرا می‌خوانی، و آنان را به بخشش نیکو و ثواب وعده می‌دهی، برای پیروی ندایت آمدم، و به مهربانی‌های مهربان‌ترین مهربانان پناه آوردم. و به وسیله پیامبرت که او را بر اهل طاعتت برتری داده، و اجابت و شفاعت را به او بخشیدی، و به وسیله برترین زن، و به فرزندانش، که پیشوایان و جانشینان اویند، و به تمامی فرشتگانی که به وسیله اینان به تو روی می‌کنند، و در شفاعت نزد تو، آنان را که خاصان درگاه تواند، وسیله قرار می‌دهند، به تو روی می‌آورم. پس بر ایشان درود فرست، و مرا از دلهره ملاقاتت در امان دار، و مرا از خاصّان و دوستانت قرار ده، پیشاپیش، خواسته و سخنم را آنچه سبب ملاقات و دیدن تو می‌شود قرار دادم اگر با این همه، خواسته‌ام را رد کنی، امیدهایم به تو به یأس مبدّل می‌گردد، همچون مالکی که از بنده خود گناهانی دیده و او را از درگاهش رانده، و آقایی که از بنده‌اش عیوبی دیده و از جوابش سر باز می‌زند. وای بر من اگر رحمت گسترده‌ات مرا فرانگیرد، اگر مرا از درگاهت برانی، پس به درگاه چه کسی روی کنم؟ اما ۰۰۰اگر برای دعایم درهای قبول را گشوده، و مرا از رساندن به آرزوهایم شادمان گردانی، چونان مالکی هستی که لطف و بخششی را آغاز کرده، و دوست دارد آن را به انجام رساند، و مولایی را مانی که لغزش بنده‌اش را نادیده انگاشته و به او رحم کرده است. در این حالت نمی‌دانم کدام نعمتت را شکر گزارم؟ آیا آن هنگام که به فضل و بخششت از من خشنود شده، و گذشته‌هایم را بر من می‌بخشایی؟ یا آن گاه که با آغاز کردن کرم و احسان بر عفو و بخششت می‌افزایی؟

پروردگارا! خواسته‌ام در این جایگاه، یعنی جایگاه بنده فقیر ناامید، آن است که: گناهان گذشته‌ام را بیامرزی، و در باقیمانده عمرم مرا از گناه بازداری، و پدر و مادرم را که دور از خانه و خانواده و غریبانه در زیر خاک‌ها خفته‌اند، ببخشی . تنهایی‌شان را با انوار احسانت از بین ببر، و وحشتشان را با نشانه‌های بخششت به انس بدل کن، و به نیکوکارشان دم به دم نعمت و شادمانی بخش، و به گناهکارشان مغفرت و رحمت عطا کن، تا به لطف و مرحمتت از خطرات قیامت در امان باشند، به رحمتت در بهشت ساکنشان گردان، و بین من و آنان در آن نعمت گسترده شناسایی برقرار کن، تا مشمول شادمانی گذشته و آینده شویم.

# سپاس گزاری:

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :ازپدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛ از استاد شایسته؛ جناب آقای دکتر ولی اله خلیلی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ از استاد فرزانه و دلسوز، جناب آقای دکتر اسماعیل پیغان که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛ و از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند. از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر باقری که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید .

زهرا باقری

۱۳۹۳

# چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا محاسبات دیفرانسیل به صورت مجرد روی جبرهای لی بررسی شده و سپس نظریه پیمانه ی جبری در جبرهای لی و ابرجبرهای لی شرح داده شده و پس از معرفی چند عملگر دیفرانسیل روی جبرهای لی، توسیعی از جبرهای لی میدان های برداری ارائه شده و نظیری از پتانسیل پیمانه ها روی آن معرفی می شود.



# واژگان کلیدی

نظریه پیمانه- جبرلی و ابرجبرلی-جبرمدرج- کروشه نیجن- هیوس- جبر انشتینی.

# پیشگفتار

از نقطه نظر فیزیکی توابع و میدان هایی که با آنها کار می شود نسبت به فضایی که این میدان ها و توابع روی آن تعریف می شوند از اهمیت بیشتری برخوردارند. در سال ۱۹۸۹ میلادی، لندی [۱] با بهره گیری از این ایده که توابع و میدان ها اصولا روی منیفلدها تعریف می شوند تصمیم گرفت که منیفلد ها را با یک حلقه جایگزین کند و در این روش فقط به عملگرهای دیفرانسیلی خاصی نظیر مشتق لی، ضرب درونی و دیفرانسیل خارجی توجه خاصی نشان داد که در راستای مطالعات او احتیاج بود. لندی با استفاده از این روش توانست بسیاری از مفاهیم هندسی (نظیر التصاق، انحنا، تاب، لاگرانژ، اسپری و ... ) را در قالب جبری تعمیم دهد و این امر به زیبایی و جذابیت این موضوع افزود.

بحث اصلی در این پایان نامه " محاسبات دیفرانسیل جبری " است که ابتدا به صورت مجرد روی جبرهای لی بررسی می شود و سپس نظریه پیمانه جبری در جبرهای لی و ابرجبرهای لی شرح داده شده و به معرفی چند عملگر دیفرانسیلی روی جبرهای لی پرداخته می شود. در ادامه توسیعی از جبرهای لی میدان های برداری ارائه شده و این توسیع برای جبرهای لی دلخواه ( نه لزوما جبرهای لی میدان های برداری) مورد مطالعه قرار می گیرد.

فصل اول این پایان نامه شامل چهار بخش است، که در آنها مفاهیم مقدماتی از جبرلی و هندسه منیفلد که در فصل های بعد کاربرد دارد بیان شده است.

در فصل دوم محاسبات دیفرانسیل روی جبرهای لی بیان شده و عملگر های دیفرانسیلی مشتق لی، ضرب درونی و دیفرانسیل خارجی روی جبر خارجی و فضاهای خطی تعریف می شود.

در فصل سوم به بیان و تعریف توسیع جبرهای لی حاصل از میدان های برداری پرداخته شده و برای هر توسیع از جبرهای لی مفاهیمی چون التصاق، التصاق ۱- فرمی، انحنا، انحنا ۱- فرمی و ... بحث خواهد شد. همچنین در راستای این مباحث چندین مثال کاربردی ارائه می شود.

فصل چهارم به بیان حسابان دیفرانسیل مرتبط با یک ابرجبرلی اختصاص داده شده و یا به عبارتی تمام مباحثی که در فصل های دوم و سوم روی جبرهای لی بحث شده روی ابرجبرهای لی تعمیم داده

[۱] G. Landi

می شود.

در فصل پنجم نیز مکانیک لاگرانژ را از دید جبری مورد بحث و بررسی قرار داده و سرانجام یک مسئله متغیر برای نظریه پیمانه ارائه داده می شود.

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

## ۱.۱ فضای برداری مدرج- جبر خارجی

**تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری مدرج:**

فرض کنیم $V$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ و $Q$ یک گروه آبلی جمعی باشند، یک مدرج سازی از $V$ به وسیله $Q$ یک خانواده $\{V^\alpha\}_{\alpha\in Q}$ از زیر فضاهای $V$ است به طوری که

$$V = \bigoplus_{\alpha\in Q} V^\alpha,$$

در این صورت گوئیم $V$، $Q$ -مدرج است و برای هر $\alpha \in Q$، $v^\alpha \in V^\alpha$ را عضو همگن از درجه $\alpha$ نامیم. همچنین یک نگاشت خطی از درجه $n$ بین فضاهای برداری $\mathbb{Z}$ - مدرج یک نگاشت خطی $f : V \longrightarrow W$ است به طوری که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $f(V^i) \subseteq W^{i+n}$ .

**تعریف ۲.۱.۱. جبرهای مدرج:**

یک $\mathbb{K}$ - جبر مدرج عبارت است از یک جبر $A$ که به عنوان یک فضای برداری

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$$

مدرج است به طوری که برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم:

$$A^m A^n \subseteq A^{m+n}.$$

جبر مدرج $A$ یک جبر جابه جایی مدرج نامیده می شود هرگاه برای هر $a \in A^m, b \in A^n$ ،

$$ab = (-1)^{mn} ba.$$

همچنین یک همریختی از جبرهای مدرج یک نگاشت خطی از درجه صفر از فضاهای برداری مدرج است.

**تعریف ۳.۱.۱. مشتق مدرج:**

فرض کنیم $A$ یک جبر مدرج باشد. یک مشتق روی $A$ یک نگاشت خطی همگن از درجه $n$ ، $\delta : A \longrightarrow A$ است به طوری که برای هر $a \in A^m, b \in A^n$ ، در شرط زیر صدق کند:

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{mn} a\delta(b).$$

بنابراین یک مشتق مدرج همگن از درجه فرد (یا زوج) یک مشتق (یا پاد مشتق) است.

**تعریف ۴.۱.۱. تکواره**

فرض کنیم $X = \{x_j\}_{j \in J}$ مجموعه ای از اشیاء باشد. یک تکواره در $X$ یک دنباله مرتب از اعضای $X$ است. مجموعه همه تکواره ها در $X$ را با $M = M(X)$ نمایش می دهیم و آن را تکوار می نامیم.

**تعریف ۵.۱.۱. جبرشرکت پذیر**

فرض کنیم $A(X)$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ با پایه $M$ باشد، در این صورت هر عضو $A(X)$ به طور یکتا به صورت ترکیب خطی متناهی $a_1m_1 + \cdots + a_mm_m$ نوشته می شود، که در آن $a_k$ ها اعضای $\mathbb{K}$ و $m_k$ اعضای $M$ اند. روی $A(X)$ یک ضرب به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(\sum a_i m_i).(\sum b_j m_j) = \sum a_i b_j m_i.m_j.$$

با این ضرب $A(X)$ تبدیل به یک جبر شرکت پذیر می شود.

**تعریف ۶.۱.۱. جبر شرکت پذیر آزاد**

فرض کنیم $X$ یک مجموعه ناتهی باشد. یک جبر شرکت پذیر آزاد روی $X$ یک جبر شرکت پذیر $A$ همراه با نگاشت $i : X \longrightarrow A$ است به طوری که برای هر جبر شرکت پذیر $B$ و هر نگاشت $f : X \longrightarrow B$ همریختی یکتایی مانند $\bar{f} : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که $\bar{f} \circ i = f$ .

یا به عبارتی دیاگرام زیر جابه جایی باشد:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

فرض کنیم $A(X)$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ و $M^n(X)$ مجموعه همه تکواره ها با $n$ شیء باشند. برای هر $n \in \mathbb{Z}$ قرار می دهیم:

$$A^n(X) = \begin{cases} \{\sum a_m m| \quad m \in M^n(X), a_m \in \mathbb{K}\} & if \quad n \geq 0 \\ 0 & if \quad n < 0 \end{cases}$$

در این صورت داریم:

$$A(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A^n(X), \tag{۱.۱}$$

و بدیهی است که:

$$A^m(X)A^n(X) \subset A^{m+n}(X), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

یا به عبارت دیگر $A(X)$ ، $\mathbb{Z}$ - مدرج است.

**تعریف ۷.۱.۱. جبر تانسوری**

فرض کنیم $V$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ با پایه $\{v_j\}_{j \in J}$ و $A(X)$ فضای برداری مدرج تعریف شده با رابطه (۱.۱) باشند. تحت نگاشت دوسویی $x_j \longrightarrow v_j$ می توان $V$ را به عنوان یک زیر فضای برداری از $A(X)$ در نظرگرفت. در این روش $A(X)$ ساختار یک جبر شرکت پذیر روی $V$ را دارد. این جبر را با $T(V)$ نمایش می دهیم و آن را جبر تانسوری روی $V$ می نامیم. هر عضو از $T(V)$ به شکل $\sum a_{j_1,j_2,\cdots,j_n} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_n}$ است که در آن $a_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ به میدان $\mathbb{K}$ تعلق دارند.

**تعریف ۸.۱.۱. جبرخارجی**

فرض کنیم $V$ یک فضای برداری با پایه $X$ و $T(V)$ جبر تانسوری باشند، فرض کنیم $I = \langle x \otimes x | x \in X \rangle$ ایدآلی از $T(V)$ باشد، آنگاه تعریف می کنیم $\Lambda(V) := \frac{T(V)}{I}$ و آن را جبر خارجی می نامیم.

**تعریف ۹.۱.۱. ترانهاده یک تبدیل خطی**

فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ و $\top : V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد در این صورت

$$\top^t : W^\star \longrightarrow V^\star,$$

که در آن $V^\star$ و $W^\star$ فضاهای دوگان $V$ و $W$ هستند را ترانهاده $T$ گوییم و با ضابطه زیر است:

$$\top^t f(\alpha) = f(\top\alpha).$$

**تعریف ۱۰.۱.۱. فضای آفین:**

فرض کنیم $V$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک فضای آفین یک مجموعه $A$ همراه با نگاشت

$$\phi : V \times A \longrightarrow A; \quad (v, a) \mapsto v + a,$$

بوده به طوری که واجد خواص زیر است:

۱) $\forall a \in A, \quad \circ + a = a,$

۲) $\forall v, w \in V, \forall a \in A, \quad v + (w + a) = (v + w) + a,$

۳) برای هر $a \in A$ و $v \in V$، نگاشت $v \mapsto v + a$ دوسویی باشد.

## ۲.۱ مقدماتی بر جبرهای لی

**تعریف ۱.۲.۱. جبرلی:**

فرض کنیم $g$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، $g$ را یک جبرلی بر میدان $\mathbb{K}$ نامیم هرگاه همراه با حاصلضرب $g \longrightarrow g \times g : \lceil , \rceil$ ( این حاصلضرب موسوم به براکت لی است. ) در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\lceil z, ax+by \rceil = a\lceil z,x \rceil + b\lceil z,y \rceil,$ (دو خطی).

$\lceil ax+by, z \rceil = a\lceil x,z \rceil + b\lceil y,z \rceil.$

۲) $\lceil x,x \rceil = \circ,$ (انعکاسی).

۳) $\lceil x,\lceil y,z \rceil\rceil + \lceil y,\lceil z,x \rceil\rceil + \lceil z,\lceil x,y \rceil\rceil = \circ,$ (اتحاد ژاکوبی).

**تذکر ۲.۲.۱.** در صورتی که میدان $\mathbb{K}$ از مشخصه مخالف ۲ باشد آنگاه شرط (۲ با پادمتقارنی بودن براکت هم ارز است به عبارت دیگر شرط (۲ برقرار است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in g$ داشته باشیم:

$$\lceil x,y \rceil = -\lceil y,x \rceil.$$

**مثال ۳.۲.۱.** هر جبر شرکت پزیر مانند $A$ همراه با براکت متعارف زیر

$$\lceil x,y \rceil = xy - yx, \quad \forall x,y \in A,$$

یک جبرلی است ( به مرجع [۴۰] صفحه ۲ مراجعه شود). اکنون اگر $V$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. در این صورت $End(V)$ فضای برداری متشکل از تمام تبدیلات خطی روی $V$ همراه با براکت

$$\lceil f,g \rceil = f \circ g - g \circ f,$$

یک جبرلی است و آن را با $gl(V)$ نشان می دهیم.

**تعریف ۴.۲.۱. جبرلی آبلی**

جبرلی $g$ را آبلی گوئیم اگر $\lceil g,g \rceil = \circ$ به عبارت دیگر برای هر $x, y \in g$ ، $\lceil x,y \rceil = \circ$

**تعریف ۵.۲.۱. زیرجبرلی:**

فرض کنیم $g$ یک جبرلی روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک زیر مجموعه $A$ از $g$ را یک زیرجبرلی از $g$ گوییم هرگاه $A$ یک زیر فضای برداری $g$ باشد و همچنین $A$ نسبت به عمل براکت بسته باشد.

**تعریف ۶.۲.۱.** فرض کنیم $g$ یک جبرلی روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، زیر مجموعه $I$ از $g$ را یک ایدآل از $g$ می نامیم هرگاه $I$ یک زیر فضای برداری $g$ باشد و همچنین داشته باشیم:

$$\lceil I, g \rceil \subset I.$$

**تعریف ۷.۲.۱. جبرلی خارج قسمتی:**

فرض کنیم $g$ یک جبرلی و $I$ ایدآلی از آن باشد .جبرلی خارج قسمتی عبارت است از فضای خارج قسمتی $\frac{g}{I}$ همراه با براکت زیر

$$\lceil x+I, y+I \rceil = \lceil x, y \rceil + I.$$

که بنابر گزاره ۱.۵ از مرجع [۴۰] یک جبرلی است.

**تعریف ۸.۲.۱. مشتق روی جبرلی:**

فرض کنیم $g$ یک جبرلی روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک مشتق روی جبرلی $g$ یک نگاشت خطی $\partial : g \longrightarrow g$ است به طوری که برای هر $x, y \in g$ در شرط زیر صدق کند:

$$\partial \lceil x, y \rceil = \lceil \partial x, y \rceil + \lceil x, \partial y \rceil.$$

مجموعه ی همه ی مشتقات روی $g$ را با $Der(g)$ نمایش می دهیم که همراه با براکت

$$\lceil \partial, \sigma \rceil = \partial \circ \sigma - \sigma \circ \partial,$$

یک جبرلی است. همچنین زیر فضای $Inn(g) = \{adx : y \mapsto \lceil x, y \rceil, \quad x \in g\}$ از $Der(g)$ را فضای مشتقات درونی می نامیم.

**تعریف ۹.۲.۱. همریختی جبرهای لی:**

فرض کنیم $g$ و $g'$ دو جبرلی رو ی میدان $\mathbb{K}$ باشند. در این صورت تبدیل خطی

$$\varphi : g \longrightarrow g',$$

را یک همریختی جبرهای لی گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\varphi[x,y] = [\varphi(x), \varphi(y)]; \quad \forall x, y \in g.$$

**تعریف ۱.۲.۱۰. نمایش از یک جبرلی:**

فرض کنیم $g$ یک جبرلی و $V$ یک فضای برداری باشد. یک نمایش از $g$ روی $V$ یک همریختی جبرهای لی به صورت زیر است:

$$\phi : g \longrightarrow gl(V).$$

**تعریف ۱.۲.۱۱. مدول:**

فرض کنیم $g$ یک جبرلی روی میدان $\mathbb{K}$ و $V$ یک فضای برداری باشد.گوییم $V$ یک مدول چپ برای جبرلی $g$ یا به عبارت دیگر یک $g$ -مدول چپ است هرگاه مجهز به یک ضرب به صورت زیر باشد:

$$g \times V \longrightarrow V,$$

$$(x,v) \mapsto xv; \quad \forall x \in g, v \in V.$$

به طوری که در خواص زیر صدق کند:

$$۱) \quad x(v_۱ + v_۲) = xv_۱ + xv_۲; \quad \forall x \in g, v_۱, v_۲ \in V.$$

$$۲) \quad (x_۱ + x_۲)v = x_۱v + x_۲v, \quad \forall x_۱, x_۲ \in g, v \in V.$$

$$۳) \quad [x,y]v = x(yv) - y(xv); \quad \forall x, y \in g, v \in V.$$

**تعریف ۱.۲.۱۲. زیر مدول:**

فرض کنیم $g$ یک جبرلی روی میدان $\mathbb{K}$ و $V$ یک $g$ - مدول باشد. زیر فضای $W$ از $V$ را یک زیر مدول از $V$ گوییم هرگاه $gW \subset W$ ، در حالت خاص، صفر و $V$ یک زیر مدول هستند و آن ها را زیر مدول های بدیهی نامیم.

**تذکر ۱.۲.۱۳.** فرض کنیم $g$ یک جبرلی و $V$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد در این صورت $V$ یک $g$ -مدول است اگر وتنها اگر یک نمایش برای جبرلی $g$ باشد.

**برهان.** برای اثبات به مرجع [۴۰] صفحه ۵ مراجعه شود. □

**مثال ۱.۲.۱۴. نمایش الحاقی:**

فرض کنیم $g$ یک جبرلی روی میدان $\mathbb{K}$ باشد.در این صورت $g$ تحت نگاشت خطی

$$ad : g \longrightarrow End(g)$$

یک نمایش در خود $g$ است، این نگاشت را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$adx(y) = \lceil x, y \rceil,$$

و آن را نمایش الحاقی می نامیم.

**تعریف ۱.۲.۱۵.** فرض کنیم $g$ و $h$ دو جبرلی باشند. جمع نیم مستقیم (ضرب) $g$ و $h$ فضای برداری $g \times h$ است که همراه با براکت زیر یک جبرلی خواهد بود:

$$\lceil (A,X),(B,Y) \rceil_\tau = (\lceil A,B \rceil, \lceil X,Y \rceil + \tau(A)Y - \tau(B)X); \quad A,B \in g, X,Y \in h.$$

که در آن $\tau \in Hom(g, Derh)$ . جمع نیم مستقیم $g$ و $h$ را با $g \oplus_\tau h$ نمایش می دهیم.

## ۱.۳ ابرجبرهای لی

**تعریف ۱.۳.۱.** یک ابر جبرلی یک فضای برداری $Z_۲$ - مدرج $g = g^{(۰)} \oplus g^{(۱)}$ همراه با یک براکت مدرج

$$\lceil , \rceil_G : g \times g \longrightarrow g,$$

از درجه صفر است، یعنی $\lceil , \rceil_G$ نگاشتی دو خطی است با این شرط که $\lceil g^i, g^j \rceil_G \subseteq g^{i+j}$ ، به طوری که برای اعضای همگن $X \in g^x$ و $Y \in g^y$ و $Z \in g^z$ در شرایط زیر صدق کند:

$$\lceil X, Y \rceil_G = -(-۱)^{|X||Y|} \lceil Y, X \rceil_G, \quad \text{(پادمتقارنی مدرج)}$$

$$\lceil X, \lceil Y, Z \rceil_G \rceil_G = \lceil \lceil X, Y \rceil_G, Z \rceil_G + (-۱)^{|X||Y|} \lceil Y, \lceil X, Z \rceil_G \rceil_G.$$

(اتحاد ژاکوبی مدرج)

**تعریف ۲.۳.۱. مشتق روی یک ابر جبرلی:**

فرض کنیم $g = g^{(0)} \oplus g^{(1)}$ یک ابر جبرلی باشد. یک مشتق از درجه $s$ روی ابرجبرلی $g$ یک نگاشت خطی $D : g \longrightarrow g$ است به طوری که:

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{s(dega)} AD(b).$$

فضای همه ی مشتقات از درجه $s$ روی $g$ را با $GDer(g)$ نمایش داده و قرار می دهیم :

$$Der(g) = Der(g^{(0)}) \oplus Der(g^{(1)}).$$

**مثال ۳.۳.۱.** فرض کنیم $g$ یک ابر جبرلی باشد. در این صورت برای هر $a \in g$ نگاشت $ada : g \longrightarrow g$ تعریف شده با ضابطه $ada(b) = \lceil a, b \rceil_G$ یک مشتق از درجه $a$ روی $g$ است و مشتق درونی نامیده می شود.

**تعریف ۴.۳.۱. همریختی ابرجبرهای لی:**

فرض کنیم $g_1$ و $g_2$ دو ابر جبرلی باشند. در این صورت تبدیل خطی $\theta : g_1 \longrightarrow g_2$ را یک همریختی ابرجبرهای لی نامیم هرگاه داشت باشیم:

$$\theta \lceil a, b \rceil_G = \lceil \theta(a), \theta(b) \rceil_G.$$

**تعریف ۵.۳.۱. مدول:**

فرض کنیم $g$ یک ابر جبرلی و $V = V^{(0)} \oplus V^{(1)}$ یک فضای برداری $Z_2$ - مدرج باشد. فضای برداری مدرج $V$ را یک $g$ - مدول چپ نامیم هرگاه مجهز به یک ضرب به صورت زیر باشد:

$$. : g \times V \longrightarrow V,$$

به طوری که در شرط زیر صدق کند:

$$\lceil a, b \rceil_G(v) = a(b(v)) - (-1)^{(derga)(dergb)} b(a(v)).$$

**تعریف ۶.۳.۱. نمایش:**

فرض کنیم $V = V^{(0)} \oplus V^{(1)}$ یک فضای برداری $Z_2$ - مدرج باشد. یک نمایش از ابر جبرلی $g$ روی $V$ عبارت است از یک همریختی از ابر جبرهای لی $\varphi : g \longrightarrow End(V)$.

**تذکر ۱.۳.۷.** نمایش ها و مدول های یک ابر جبرلی در تناظر دو سویی هستند.

**تعریف ۱.۳.۸.** فرض کنیم $g$ یک ابر جبرلی و $V$ و $V'$ دو $g$ - مدول باشند. نگاشت خطی $\phi : V \longrightarrow V'$ را یک همریختی مدولی گوییم هرگاه $\phi(v_i) = V'_{\psi(i)}$ که در آن $\psi : Z_2 \longrightarrow Z_2$ یک نگاشت دو سویی است.

## ۱.۴ منیفلدهای دیفرانسیل پذیر

**تعریف ۱.۴.۱.** فضای توپولوژیک $M$ را موضعا اقلیدسی از بعد $n$ نامیم، هرگاه هر نقطه $p$ در $M$ دارای یک همسایگی $U$ همئومورف با زیر مجموعه ای باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر

$$\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

همئومورفیسم مورد نظر باشد، آنگاه زوج $(U, \phi)$ را یک کارت می نامند. یک منیفلد توپولوژیک عبارت است از یک فضای موضعا اقلیدسی شمارای نوع دوم و هاسدورف.

منیفلد توپولوژیک را از بعد $n$ گوییم هرگاه این منیفلد یک فضای موضعا اقلیدسی از بعد $n$ باشد.

### ۱.۴.۱ کارت های سازگار

فرض کنیم $(U, \phi)$ و $(V, \psi)$ دو کارت از یک منیفلد توپولوژیک باشند. چون $U \cap V$ در $U$ باز است و

$$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

یک هموئومورفیسم بتوی یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ است، لذا $\phi(U \cap V)$ نیز یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ خواهد بود. به طور مشابه $\psi(U \cap V)$ یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ می باشد.