وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش هم‌مکانی لژاندر-گاوس-راداو برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی

نگارش

فرشته اسلامی

اساتید راهنما

دکتر نبی ا... گودرزوند چگینی و دکتر رضا مختاری

استاد مشاور

دکتر محمد افضلی‌نژاد

مهر ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

پروردگارا

به من آرامش ده

تا بپذیرم آنچه را که نمی توانم تغییر دهم

دلیری ده

تا تغییر دهم آنچه را که می توانم تغییر دهم

بینش ده

تا تفاوت این دو را بدانم

مرا فهم ده

تا متوقع نباشم دنیا و مردم آن مطابق میل من رفتار کنند

تقدیم به

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم،

کوشیدند تا بیاسایم، رنج کشیدند تا بیارامم

سایه شان بر سرم همه مهر است و نثارم به پایشان همه سر

و

خواهر و برادران عزیزم

که به دستانم رفاقت، به چشمانم صداقت

و به قلبم مهربانی آموختند.

تشکر و سپاس

الهی تو می‌دانی که عاجزم از شکر، تو به‌جای من شکر کن خود را، که شکر آن است و بس.

در زیر این طاق بلند، آموختن و معرفت طلبی کیمیایی بود که در بهترین روزگار زندگانیم، بر من ارزانی شد و چنان است که نبض خاطرم همه لحظه به پاس شکر خواهد تپید و لطف بی‌دریغ و منتش را سپاس خواهم گفت.
برخود لازم می‌دانم که از صمیم قلب، از سر اخلاص از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند اساتید راهنمای بزرگوارم آقایان دکتر نبی‌ا... گودرزوند چگینی و دکتر رضا مختاری که همواره با رویی گشاده و مناعت طبع در تمامی مراحل این پژوهش مرا راهنمایی کردند، از استاد مشاور گرانقدرم آقای دکتر محمد افضلی‌نژاد که بنده را در این راه از هیچ مساعدتی دریغ نفرمودند و از استاد بزرگوارم آقای دکتر مهدی رمضانی که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام همچنین از آقای دکتر علی پارسیان و آقای دکتر محسن شاه‌رضایی که داوری این پایان نامه را به‌عهده داشتند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در نهایت آنچه نه وصف شدنیست و نه انکار پذیر زحمات، حمایت‌ها و محبت‌های بی‌دریغ و خالصانه پدر و مادر بزرگوارم می‌باشد که از حضورشان رخصت می‌خواهم تا در کنارشان زانو بزنم و بگویم هر آنچه هست و هر آنچه دارم از وجودشان است.

از خواهر و برادران عزیزم، که امیدبخش زندگیم بودند و همیشه در تمامی مراحل زندگی همراه و همگام من بوده‌اند، صمیمانه سپاسگزاری و قدردانی می کنم.
از دوستان عزیزم که همواره مایه دلگرمیم بودند و هرگز آفتاب مهرشان در خاطرم غروب نخواهد کرد نهایت سپاس و قدردانی را دارم و برایشان از خداوند منان بهترین‌ها را خواستارم.

در پایان به‌عنوان شکر نعمت و حق‌شناسی لازم می‌دانم که این کار کوچک علمی را به پیشگاه والای پدر و مادر و خانواده عزیزم تقدیم دارم، چرا که قسمت بزرگی از این توفیق را مرهون فداکاری، تشویق و گذشت ایشان می‌دانم. دانشی که در این زمینه آموختم به پشتوانه آنان بود و زمانی را که صرف مراحل تدوین این پایان‌نامه نمودم، متعلق به ایشان...

فرشته اسلامی، مهر ۱۳۹۲

چکیده

اکثر پدیده‌های حقیقی در فیزیک، شیمی، زیست شناسی، اقتصاد، ... با معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شوند. یافتن جواب تحلیلی برای این گونه مسایل از پیچیدگی خاصی برخوردار است. این در حالی است که بسیاری از این مسایل دارای جواب تحلیلی معلوم نیستند. بنابراین بایستی این گونه مسایل را با روش عددی حل کرد. در این پایان‌نامه به حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مقادیر اولیه بااستفاده از روش‌هم‌مکانی، مبتنی بر درونیاب لژاندر-گاوس-راداو می‌پردازیم. آنالیز همگرایی برای این معادلات انجام شده و دقت طیفی جواب را نشان خواهیم داد. سپس با ترکیب روش هم‌مکانی همراه با تجزیه دامنه مورد بررسی یک مدل تعمیم یافته برای حل انواع مسایل مقدار اولیه ارایه می‌نماییم. مثال‌های عددی در انتهای هر بخش کارایی و دقت بالای این روش را به‌خوبی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: روش هم‌مکانی لژاندار-گاوس-راداو، معادلات دیفرانسیل عادی، دقت طیفی، همگرایی سراسری

لیست تصاویر

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل تقریباً در تمامی زمینه‌های علوم و مهندسی، مدل‌سازی، پیش‌بینی هوا کاربرد دارد. روش‌های عددی بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مقادیر اولیه وجود دارد [۱۰، ۱۲، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۹، ۴۵]. روش‌های رانگ- کوتا ضمنی یک ابزار قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مقادیر اولیه است، که این روش‌های عددی معمولاً براساس بسط تیلور یا فرمول مربع‌سازی طراحی می‌شوند [۱۱، ۱۲، ۲۹، ۳۰، ۳۹]. در دو دهه اخیر روش‌های طیفی در تعیین جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مربوط به مساله‌های واقعی و گوناگون مانند دینامیک سیالات، حرکت موج، پیش‌بینی هوا، مدل‌سازی تلاطم و مدل‌سازی لرزه در مقابل روش‌های جاافتاده‌ای مانند تفاضل متناهی و المان‌های متناهی و حجم متناهی، بسیار دقیق و قدرتمند ظاهر شده یا دست‌کم در کنار آن‌ها به‌عنوان رقیب قدرتمند مطرح است. در حال حاضر روش‌های طیفی در چندین زمینه بسیار موفق هستند، از جمله مدل‌کردن تلاطم، پیش‌بینی هوا، امواج غیرخطی و... که این فهرست در حال رشد است و کار روی این روش‌ها در بیشتر مراکز تحقیقاتی و دانشکده‌های ریاضی و علوم مهندسی ادامه دارد.

در فصل اول ابتدا روش طیفی ارایه می‌گردد. ساختار این روش به‌طور کلی تقریب جواب معادله به همراه شرایط در کل حوزه مورد بحث براساس توابع پایه‌ای است که روی کل حوزه تعریف شده‌اند. این روش دارای مرتبه دقت بسیار بالایی است و برای مسایلی به‌کار برده می‌شود که شامل جواب هموار روی دامنه منظم است. روش طیفی براساس تجزیه دامنه به سه دسته تقسیم می‌شود. روش طیفی مرکب، روش طیفی مخلوط و روش ترکیبی. در روش طیفی مرکب تجزیه دامنه و تطبیق زیردامنه‌ها به پایه‌های جواب صورت می‌گیرد. در روش ترکیبی، روش تقریب سیستم از طریق توابع پایه‌ای پیوسته و توابع متعامد

تکه‌تکه پیوسته صورت می‌پذیرد. در هر قسمت سعی شده است تا با ارایه توضیح مختصری توانایی این روش‌ها در حل مسایل مشخص گردد. سپس برخی تعاریف، قضایای مهم و مفاهیم مربوط به فضاهای مختلف جواب را به اختصار معرفی می‌کنیم [۳۶، ۴۲] سپس به ارایه مساله بهترین تقریب در فضاهای نرم‌دار، ضرب داخلی و فضای هیلبرت می‌پردازیم. [۳۸، ۴۴] و بعد از آن به معرفی توابع و چندجمله‌ای‌های متعامد می‌پردازیم و خواص اساسی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل دوم این پایان‌نامه سعی بر ارایه روش عددی جهت حل معادلات دیفرانسیل معمولی شده است. این روش از رده روش‌های طیفی است که به اختصار توضیح داده شده است. روند این روش مبتنی بر آن است که جواب معادله مورد نظر را به‌صورت بسطی از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر-گاوس-راداو انتقال یافته در نظر گرفته و جهت حل مسأله با استفاده از روش هم‌مکانی، عملگر مشتق را با یک ماتریس جای‌گزین نموده تا دستگاه معادله دیفرانسیل به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل شود و با حل دستگاه معادلات جبری، تخمینی برای جواب معادله تعیین می‌شود. استفاده از توابع متعامد جهت حل این‌گونه مسایل دارای قابلیت انعطاف‌پذیری بسیار بالایی است. به‌علاوه سادگی و پایداری این روش از مزایای آن است. استفاده از این روش برای حل این گونه مسایل برخلاف روش‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی قابلیت انعطاف بسیار بالایی دارد .[۵، ۴۱، ۴۸] به‌طوری‌که براساس ساختار سیستم همواره می‌توان با انتخاب نقاط درونیاب بیشتر در کل بازه، جواب تقریبی سیستم را به نحو مطلوبی بهبود بخشید. این روش از نقطه نظر آنالیز عددی، بررسی نرخ همگرایی، پایداری و تحلیل خطا مورد بررسی قرار گرفته. هم‌چنین جهت آشنایی بیشتر با عناوین و اطلاعات تکمیلی لیست کاملی از مراجع در اختیار خواننده قرار داده شده است.

در فصل آخر به‌منظور بیان کارایی این روش ابتدا به معرفی دستگاه معادلات همیلتونی و معادلات سرسخت پرداخته سپس روش پیشنهادی را برای این مسایل پیاده‌سازی کرده. با ارایه مثال‌های عددی و مقایسه جواب دقیق و تقریبی، دقت این روش را بررسی کرد. روش‌های طیفی ابزار بسیار سودمندی برای حل انواع معادلات دیفرانسیل و اخیراً معادلات انتگرال می‌باشد روش‌های عددی بسیاری برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا وجود دارد، از جمله می‌توان به روش‌های هم‌مکانی، روش‌های انتگرال‌گیری حاصل‌ضرب اشاره

کرد. با این‌حال کارهای کمی برای تقریب‌های طیفی از معادلات انتگرال ارایه شده است.در این بخش سعی شده تا با استفاده از روش بیان شده در فصل دوم به حل معادلات انتگرال فردهلم پرداخته تا بتوانیم جواب‌های نسبتاً بهتری با عملیات کمتر به‌دست آوریم. سپس با تبدیل معادلات دیفرانسیل به انواع معادلات انتگرال به حل معادلات دیفرانسیل پرداخته. در انتها سعی شده است تا با ارایه مثال عددی و مقایسه جواب دقیق و تقریبی، دقت این روش را بررسی کرد. در پایان واژه نامه انگلیسی به فارسی و مراجع جای داده شده است.

فصل ۱

دیدگاه طیفی، تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا روش‌های عددی متداول برای حل انواع مسایل مقدار اولیه را بیان می‌کنیم. سپس برخی پژوهش‌های انجام گرفته در جهت حل عددی این مسایل را برخواهیم شمرد. در آخر تعاریف و مفاهیم مورد استفاده در پایان نامه را مطرح خواهیم کرد.

۱.۱ روش‌های عددی برای حل مسایل مقدار اولیه

مدل‌سازی اکثر مسایل ناشی از پدیده‌های فیزیکی، فرایندهای شیمیایی و معادلات مهندسی، منجر به معادلات دیفرانسیل عادی و یا پاره‌ای $(PDEs, ODEs)$ با شرایط اولیه می‌شوند. این معادلات اغلب بسیار پیچیده هستند و در کل نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت تحلیلی حل کرد. بنابراین ارایه یک روش عددی مناسب برای تقریب جواب و کنترل دقت این تقریب از اهمیت قابل توجهی برخوردار است.

روش‌هایی که برای حل معادلات دیفرانسیل عادی با شرایط اولیه به‌کار برده می‌شوند[۲]، به دو دسته کلی تفاضلی و طیفی تقسیم‌بندی می‌شوند. روش‌های تفاضلی به دو دسته تک‌گامی و چندگامی دسته‌بندی می‌شوند. در روش‌های چندگامی از چندین گام قبل، برای به‌دست آوردن گام جدید استفاده می‌شود که این چند گام اولیه با روش تک‌گامی محاسبه می‌شوند. روش‌های **رانگ- کوتا** [۱] جزء رده‌ی روش‌های تک‌گامی هستند که به دلیل مرتبه‌ی

[۱] Runge-Kutta

دقت بالا، اغلب برای تعیین گام‌های اولیه در روش‌های چندگامی استفاده می‌شوند [۲] . بزرگ‌ترین عیب روش‌های رانگ-کوتا در حل معادله کلی $y' = f(x, y)$، آن است که در مقایسه با روش‌های چندگامی، برای به‌دست آوردن جواب مسأله با دقت مورد نظر به تعداد محاسبات بیشتری نیاز است. با این حال کارایی و دقت این روش در حل $ODEs$ قابل توجه است[۱۰، ۱۲، ۱۵].

روش‌های طیفی[۲] توسعه‌ای از روش باقی‌مانده وزن-دار هستند که برای حل $ODEs$ و$PDEs$ روی دامنه‌های منظم به‌کار می‌روند. این روش‌ها در حل مسایل پیچیده از قبیل پیش‌بینی عددی هواشناسی، شبیه‌سازی عددی جریانات پرتلاطم، دینامیک سیالات و مسایلی از این قبیل که دقت بالایی را نیاز دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرند[۱۳، ۳۵]. اساس این روش‌ها استفاده از توابع پایه و توابع وزن است. به این صورت که یک ترکیب خطی از توابع پایه با ضرایب مجهول به‌عنوان تقریب تابع مجهول در نظر گرفته می‌شود و توابع وزن برای برقراری معادله دیفرانسیل به‌ازای جواب تقریبی با خطای حداقل به‌کار می‌روند. این هدف به‌وسیله به حداقل رساندن باقی‌مانده، که همان خطای حاصل از نشاندن تقریب به‌جای جواب واقعی با توجه به یک نرم مناسب است، محقق می‌شود. با این مینیمم سازی ضرایب مجهول به‌دست می‌آیند.

خانواده‌ای از توابع $(\chi_0, ..., \chi_n)$ که کوچکترین باقی‌مانده مانند Rرا تعریف می‌کنند، بدین صورت که حاصل ضرب داخلی آن‌ها در فضای هیلبرت

$$\forall n \in \{0, ..., N\}, \qquad (\chi_n, R) = 0$$

را **توابع آزمون** می‌نامند. یک ترکیب خطی از توابع پایه اساسی که یک تقریب مناسب از فضای جواب را ارایه می‌دهد، **توابع پایه** می‌نامند.

$$\mathcal{P}_N : (Q_0, ..., Q_N) \in \overline{u}(x) \qquad\qquad \overline{u}(x) = \sum_{n=0}^{N} \widehat{u}_n Q_n(x)$$

۲.۱ دسته‌بندی حوزه‌های مختلف توابع

در این بخش به ارایه حوزه‌های مختلف توابع پایه براساس رفتار دامنه فضای جواب و تابع جواب می‌پردازیم.

[۲] Spectral Method

۱. **حوزه توابع با دامنه متناهی**

۲. **حوزه توابع با دامنه نامتناهی**

۳. **حوزه توابع متناوب**

■ حوزه توابع با دامنه متناهی به دو دسته تقسیم می‌شود.

۱. ۱دسته اول از چندجمله‌ای‌های متعامد پیوسته تشکیل شده است. به‌عنوان نمونه **چندجمله‌ای‌های لژاندر** و **چبیشف**، این دسته از رده توابع پایه‌ای پیوسته هستند.

۲. ۱دسته دوم حوزه توابع متعامد پایه‌ای قطعه‌ای پیوسته را تشکیل می‌دهند. این حوزه نیز خود به دو دسته تقسیم می‌شود.

الف. این دسته شامل حوزه توابع ثابت تکه‌تکه پیوسته است که می‌توان به توابع **بلاک-پالس**[۳] ، **رادماچر**[۴] ، **والش**، **هار**، **هار گویا شده** و ... اشاره کرد.

ب. حوزه دوم تحت عنوان حوزه توابع ترکیبی معروف است. به‌عنوان مثال ترکیب تابع قطعه‌ای ثابت پیوسته بلاک-پالس به‌عنوان گسسته‌ساز و توابع پایه‌ای پیوسته را می‌توان در نظر گرفت.

■ حوزه توابع با دامنه نامتناهی را می‌توان به دو دسته چندجمله‌ای‌ها و غیرچندجمله‌ای ها تقسیم کرد. در رده چندجمله‌ای‌ها می‌توان برای بازه‌های نیمه نامتناهی $(\circ, \infty)$ به **چندجمله‌ای‌های متعامد لاگر** و روی بازه‌های نامتناهی $(-\infty, \infty)$ به **چندجمله‌ای‌های متعامد هرمیت** و **توابع سینک** از رده غیرچندجمله‌ای‌ها اشاره کرد[۴۰، ۳۳، ۳۴].

■ در حوزه توابع متناوب از توابعی مانند توابع سینوسی و کسینوسی و ... برای مسایلی با شرط مرزی متناوب استفاده می‌شود.

۳.۱ دسته‌بندی روش‌ها براساس توابع پایه

۱. **روش تفاضلات متناهی** که در این روش **توابع پایه** مبتنی بر چندجمله‌ای‌های متقاطع با درجات پایین انتخاب می شوند.

[۳] Block-Pulse Functions, BPF

[۴] Radmacher Functions, RF