

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه کارشناسی ارشد برق-کنترل

شناسایی، مدلسازی، آنالیز و شبیه سازی جستجوگر یک
موشک زمین به هوا با هدایت PN

توسط: امیر نقوی

استاد راهنما: دکتر جعفر حیرانی نوبری

اساتید مشاور: دکتر علی خاکی صدیق
مهندس محمدرضا عاروان

چکیده

در این پروژه، حلقهٔ ردیابی یک موشک زمین به هوا در حالت سه بعدی تحلیل کامل گردیده و معادلات آن بدست آمده است. برای این کار ابتدا مدل قسمتهای مختلف حلقهٔ ردیابی بدست آمده است. بعد از مدلسازی قسمتهای مختلف، به تحلیل حلقهٔ ردیابی پرداخته‌ایم. حلقهٔ ردیابی دو وظیفهٔ اصلی دارد. اول، ردیابی خط دید موشک- هدف توسط محور ژایرو که با اعمال گشتاور لازم به ژایرو این تعقیب صورت می‌گیرد. وظیفهٔ دوم، اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای خط دید، برای پیاده‌سازی قانون هدایت می‌باشد، که هر دو وظیفه مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. معادلات سه بعدی بدست آمده، دارای پیچیدگی زیادی بوده و تعبیر فیزیکی خاصی نداشتند. لذا ما دستگاه مختصات خاصی به نام دستگاه خط دید تعریف کرده‌ایم، که معادلات پیچیدهٔ حلقه، در این دستگاه بسیار ساده بیان شده و معلوم می‌گردد که حلقهٔ ردیابی دو پارامتر اصلی هندسهٔ درگیری را اندازه می‌گیرد، که دقیقاً همان پارامترهای مورد نیاز برای محاسبهٔ قانون هدایت می‌باشد. به این ترتیب تعبیر فیزیکی جالبی برای خروجی‌های حلقه بدست آمد که هم برای درک نحوهٔ اندازه‌گیری و هم برای درک نحوهٔ هدایت و کنترل موشک مفید خواهند بود. در ادامه خطاهای سیستم نیز بررسی و تحلیل شده‌اند. در آخر حلقه را شبیه‌سازی نموده و خروجی‌های حلقه را به‌زای ورودی‌های مختلف مشاهده نموده‌ایم، که مشاهدات با نتایج بدست آمده از تحلیل‌ها مطابقت کامل دارد.

کلمات کلیدی: جستجوگر، حلقهٔ ردیابی، خط دید، هدایت، موشک آشیانه‌یاب، اپتیک.

فهرست مطالب

| صفحه | عنوان |
|--|---|
| فصل اول : مقدمه | |
| ۱ | ۱-۱ مقدمه |
| ۲ | ۲-۱ هدف پروژه |
| ۳ | ۳-۱ نحوه بیان مطالب پایان نامه |
| فصل دوم : سیستم اپتیکی | |
| ۵ | ۱-۲ مقدمه |
| ۵ | ۲-۲ عملکرد سیستم اپتیکی |
| ۶ | ۳-۲ رتیکل (صفحه نمونه بردار) |
| ۸ | ۴-۲ دتکتور |
| ۸ | ۵-۲ تحلیل ریاضی عملکرد سیستم اپتیکی |
| فصل سوم : شناسایی مدلاتور و دمدولاتور | |
| ۱۹ | ۱-۳ مقدمه |
| ۲۰ | ۲-۳ شناسایی از طریق نرم افزار شبیه سازی شده |
| ۲۵ | ۳-۳ شناسایی از طریق آزمایش روی سیستم واقعی |

فصل چهارم : ژيروسکوپ

| | |
|----|------------------------------------|
| ۲۸ | ۱-۴ مقدمه |
| ۲۹ | ۲-۴ ساختمان و اساس کار ژيروسکوپ |
| ۳۰ | ۳-۴ خواص ژيروسکوپ |
| ۳۰ | ۱-۳-۴ صلبیت |
| ۳۰ | ۲-۳-۴ حرکت تقدیمی |
| ۳۲ | ۴-۴ معادلات ژيروسکوپ دو درجه آزادی |

فصل پنجم : سیستم الکترومغناطیسی

| | |
|----|---|
| ۳۸ | ۱-۵ مقدمه |
| ۴۱ | ۲-۵ تحلیل کارکرد سیم پیچ تصحیح |
| ۴۵ | ۳-۵ تحلیل کارکرد سیم پیچ λ |
| ۴۹ | ۴-۵ تحلیل کارکرد سیم پیچ مقایسه کننده فاز |
| ۵۱ | ۵-۵ سیم پیچ تثبیت دور |
| ۵۳ | ۶-۵ سیم پیچ مدولاسیون |
| ۵۳ | ۷-۵ جمع بندی |

فصل ششم : آنالیز و شبیه‌سازی حلقه

| | |
|----|---|
| ۵۵ | ۱-۶ مقدمه |
| ۵۵ | ۲-۶ هدایت |
| ۵۶ | ۱-۲-۶ هدایت تعقیب |
| ۵۷ | ۲-۲-۶ هدایت با زاویه تقدم ثابت |
| ۵۸ | ۳-۲-۶ هدایت متناسب |
| ۶۰ | ۳-۶ دستگاه‌های مختصات |
| ۶۱ | ۴-۶ مدل قسمتهای مختلف حلقه ردیابی |
| ۶۴ | ۵-۶ حلقه ردیابی |
| ۶۴ | ۱-۵-۶ حلقه ردیابی در حالت دو بعدی |
| ۶۶ | ۲-۵-۶ شبیه‌سازی حلقه ردیابی در حالت دو بعدی |
| ۶۸ | ۳-۵-۶ هندسه درگیری در حالت سه بعدی |
| ۶۹ | ۴-۵-۶ بلوک دیاگرام حلقه ردیابی در حالت سه بعدی |
| ۷۰ | ۵-۵-۶ تفکیک بلوک دیاگرام به دو بلوک دیاگرام مجزا |
| ۷۱ | ۶-۵-۶ تحلیل خروجی‌های حلقه ردیابی در حالت سه بعدی |
| ۷۲ | ۱-۶-۵-۶ تعبیر فیزیکی \mathcal{E}_1 |
| ۷۳ | ۲-۶-۵-۶ تعبیر فیزیکی \mathcal{E}_2 |
| ۷۴ | ۷-۵-۶ ارتباط خروجی‌های حلقه با پارامترهای مورد نیاز جهت هدایت |
| ۷۵ | ۸-۵-۶ محاسبهٔ ماکزیمم اندازه‌های r, q, p و \mathcal{E}_2 |
| ۷۶ | ۹-۵-۶ بررسی تقریب‌های بکار رفته |

۷۷

۶-۶ شبیه‌سازی حلقهٔ ردیابی

۸۵

۶-۷ جمع بندی

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

مراجع و منابع

پیوست ۱

پیوست ۲

۱-۱ مقدمه

یکی از مهمترین مسایل برای بهینه‌سازی و افزایش کیفیت هر سیستم شناخت کامل آن سیستم و تحلیل دقیق عملکرد آن می‌باشد. سیستم مورد نظر ما جستجوگر یک موشک زمین به هوا می‌باشد. این موشک از موشک‌های آشیانه‌یاب^۱ است. معمولاً سیستم هدایت این نوع موشک‌ها از نوع هدایت متناسب^۲ است. همچنین سیستم هدایت این موشک با توجه به امواج مادون قرمز^۳ کار می‌کند، و ردیابی هدف بصورت غیرفعال^۴ انجام می‌شود. یعنی این موشک به دنبال انرژی گرمایی منتشر شده از هدف می‌رود. اگزوز هواپیما یا دودکش کشتی و همچنین حرارت بدنه هواپیماهای مافوق صوت، منبع حرارتی بسیار خوبی برای سیستم هدایت مادون قرمز است. در انواع مختلفی از این موشک‌ها، حساسه‌ای که به این امواج مادون قرمز حساس می‌باشد، در داخل موشک قرار دارد، به همین دلیل به سیستم هدایت این نوع موشک‌ها، هدایت آشیانه‌یاب می‌گویند [۱۴].

حساسه مورد استفاده در سیستم‌های آشیانه‌یاب را سرجستجوگر^۵ و یا به اختصار جستجوگر می‌نامند.

حسن بزرگ سیستم‌های هدایت آشیانه‌یاب این است که چون جستجوگر روی موشک قرار دارد، آنچه که این وسیله اندازه‌گیری می‌کند موقعیت نسبی موشک و هدف است. این موقعیت، اطلاعات زاویه‌ای خط دید^۶ (خط واصل از موشک به هدف) می‌باشد که موشک به کمک سرعت زاویه‌ای خط دید، دستور شتاب مورد نیاز برای هدایت موشک را محاسبه می‌کند.

تقریباً در تمامی سیستم‌های آشیانه‌یاب (از جمله موشک مورد نظر) جستجوگر از بدنه موشک مستقل است و نسبت به آن قاب‌بندی شده است. در این سیستم، اجزاء حساس به انرژی مادون قرمز، روی روتور و قاب‌های یک ژيروسکوپ دو درجه آزادی نصب شده‌اند و به همین خاطر در بسیاری از مواقع سیستم جستجوگر را سیستم ژایرواپتیک نیز می‌نامند [۹].

وظیفه اصلی جستجوگر بدست آوردن مشخصات موقعیتی هدف (اطلاعات زاویه‌ای خط دید) می‌باشد.

¹ Homing Missile

² Proportional Navigation Guidance (PNG)

³ Infrared

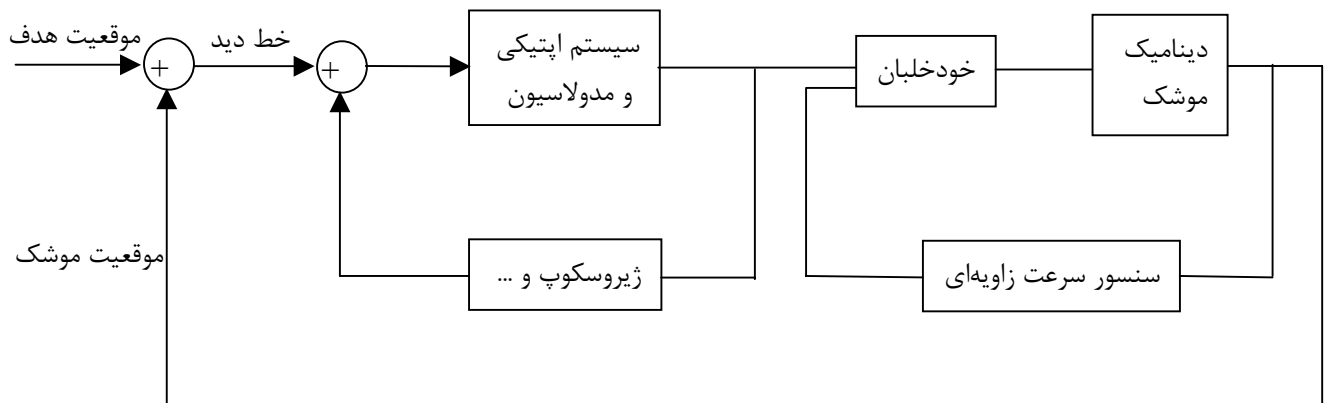
⁴ Passive Target Tracking

⁵ Seeker Head

⁶ Line Of Sight

۲-۱ هدف پروژه

همانطور که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است، سیستم هدایت-کنترل موشک مورد نظر شامل یک حلقه اصلی به نام حلقه هدایت و دو حلقه داخلی به نام‌های حلقه ردیابی و حلقه کنترل می‌باشد. وظیفه حلقه ردیابی تعقیب خط دید بوسیله محور ژيروسکوپ می‌باشد، بطوریکه ما در حلقه کنترل فرض می‌کنیم که محور ژایرو منطبق بر خط دید است. در حلقه کنترل با اجرای فرامین هدایتی، هدایت موشک به سمت هدف انجام می‌گیرد.



شکل (۱-۱) سیستم هدایت-کنترل موشک

در این پروژه ما می‌خواهیم قسمت‌های مختلف حلقه ردیابی را آنالیز، مدل‌سازی و در صورت نیاز شناسایی کرده و در نهایت کلیه قسمت‌ها را شبیه‌سازی کامپیوتری نموده و سپس برای مانورهای مختلف هدف، عملکرد حلقه ردیابی را بررسی نماییم.

حلقه ردیابی که جستجوگر نیز نامیده می‌شود اطلاعات زاویه‌ای خط دید را اندازه‌گیری می‌نماید. سپس لازم است گشتاورهایی ایجاد گردد تا محور ژيروسکوپ را بر خط دید منطبق نماید. برای این کار سیم‌پیچ‌های مغناطیسی وجود دارند که با دریافت اطلاعات زاویه‌ای خط دید، گشتاورهای لازم را ایجاد می‌نمایند و در نتیجه محور ژایرو، خط دید را دنبال می‌کند. همچنین خروجی حلقه که همان اطلاعات زاویه‌ای خط دید است به اتوپیلوت فرستاده شده و فرامین هدایتی صادر می‌گردد.

۱-۳ نحوه بیان مطالب پایان نامه

مطالبی که در این پایان نامه آورده شده است بصورت زیر بیان گردیده‌اند :

در فصل اول، ابتدا اطلاعات کلی در مورد موشک مورد نظر بیان شده و سپس مسئله مورد نظر این پروژه طرح و بیان گردیده است.

در فصل دوم، قسمت‌های مختلف سیستم اپتیکی توضیح داده شده است. این سیستم شامل آیینه‌های محدب و مقعر، لنزهای اپتیکی، مدولاتور اپتیکی و حساسه مادون قرمز (دکتور) می‌باشد. امواج گسیل گردیده از هدف بعد از برخورد به آیینه محدب اولیه به آیینه مقعر ثانویه منعکس شده و در نهایت روی رتیکل متمرکز می‌گردد. رتیکل که در واقع مدولاتور اپتیکی می‌باشد، باعث مدولاسیون نوری شده و با جابجایی نور بر اثر حرکت هدف بر روی رتیکل مقدار و فاز انحراف هدف مشخص می‌شود. در این فصل کلیه این قسمت‌ها آنالیز دقیق و مدلسازی شده و توسط نرم‌افزار Matlab شبیه‌سازی گردیده است، و در نهایت خروجی واقعی سیستم اپتیک و مدل کلی این بلوک استخراج شده است.

در فصل سوم، مدولاتور اپتیکی و دمدولاسیون الکترونیکی بررسی شده است. پس از بررسی مختصر این بخش، توسط آزمایش‌های مختلف و جمع‌آوری داده‌های مختلف، مدل این قسمت را شناسایی کرده‌ایم.

در فصل چهارم، توضیحاتی در مورد ژيروسکوپ مکانیکی و ساختمان داخلی آن آورده شده است. سپس معادلات یک ژيروسکوپ دو درجه آزادی استخراج شده و در نهایت مدل ساده شده آن بدست آورده شده است.

در فصل پنجم، در مورد پنج نوع سیم‌پیچی استفاده شده، توضیحاتی داده شده است. از این سیم‌پیچ‌ها، دو سیم‌پیچ به عنوان گشتاورساز و سه سیم‌پیچ به عنوان سنسور عمل می‌کنند. در این فصل به تحلیل ریاضی عملکرد این سیم‌پیچ‌ها پرداخته‌ایم.

لازم به ذکر است بعضی از مطالب فصول دوم تا پنجم قبلاً انجام گرفته است ولی در این پایان‌نامه، سعی شده است آنالیز کاملتر، روابط و مدل‌ها دقیق‌تر بیان شود. در کارهای قبلی آنالیزها بصورت دوبعدی انجام گرفته که در این پروژه آنالیز بصورت سه بعدی صورت گرفته است.

در فصل ششم، با توجه به مدلسازی کلیه قسمت‌های حلقه ردیابی در فصول گذشته، حلقه ردیابی را بسته و آنالیز حلقه را بصورت سه بعدی انجام داده‌ایم. نکته قابل توجه در این فصل و در این پروژه، تعریف دستگاه‌های مختصات

جدید می‌باشد که روابط در این دستگاه‌ها بصورت سه بعدی نوشته شده و آنالیز در این دستگاه‌ها انجام شده است. تعریف مناسب این دستگاه‌ها باعث شده است که روابط پیچیده سه بعدی ساده شده و تحلیل آنها به راحتی انجام پذیرد. بعد از آنالیز و تحلیل حلقه، شبیه‌سازی به کمک نرم افزار Matlab انجام شد و خروجی حلقه به ازای ورودی‌های مختلف مشاهده شد که این خروجی‌ها با تحلیل‌های بدست آمده کاملاً مطابقت داشتند. در انتها نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه شده است.

۲-۱ مقدمه

سیستم اپتیکی یکی از قسمتهای مهم جستجوگر مادون قرمز بوده که شامل آینه‌های محدب و مقعر، رتیکل، دتکتور و لنزهای اپتیکی می‌باشد. وظیفه آن، دریافت تشعشعات مادون قرمز هدف و مدوله کردن این تشعشعات بصورت کدهای خاص می‌باشد. شکل (۱-۲) سیستم اپتیکی و قسمتهای مختلف آن را نشان می‌دهد.

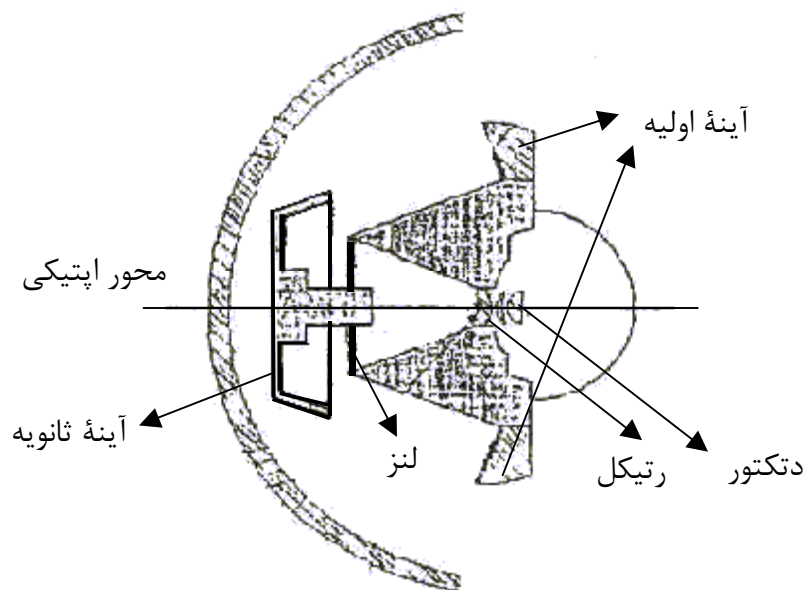
آینه اولیه (آینه اصلی) : یک آینه مقعر که بصورت قطاعی از یک کره می باشد.

آینه ثانویه : این آینه نیز بصورت قطاعی از یک کره (البته با شعاع کوچکتر) و محدب می‌باشد.

رتیکل : یک دیسک با قسمتهای تیره و روشن

دتکتور : سنسور مادون قرمز جهت تشخیص امواج مادون قرمز

لنز : لنز اپتیکی جهت متمرکز کردن امواج مادون قرمز

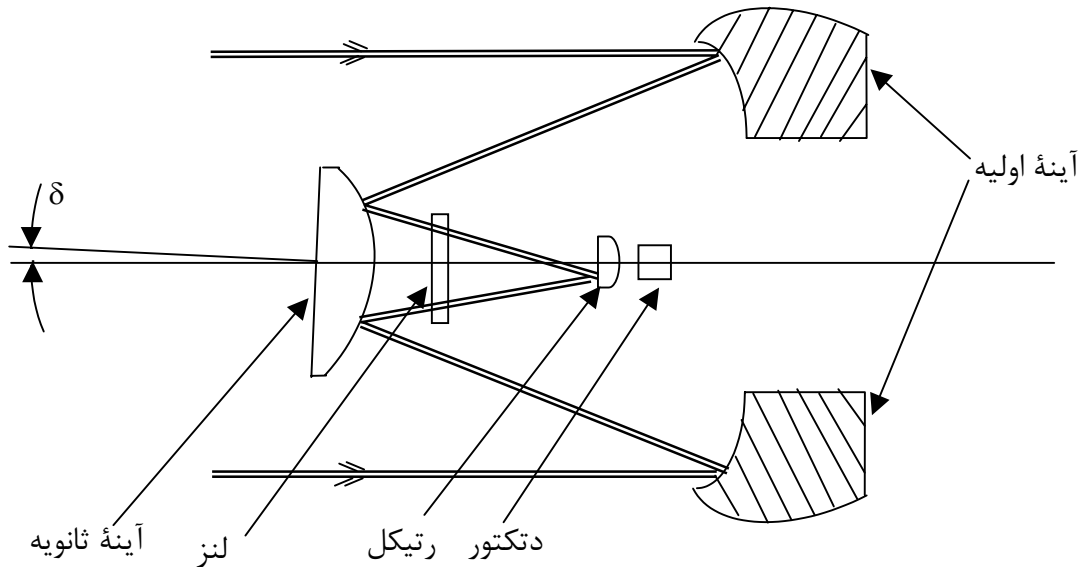


شکل (۱-۲) سیستم اپتیکی [۱۱]

۲-۲ عملکرد سیستم اپتیکی

وقتی که هدف در میدان دید جستجوگر قرار بگیرد، انرژی تشعشعی مادون قرمز هدف که به موشک می‌رسد، به آینه مقعر اولیه برخورد نموده و در کانون این آینه متمرکز می‌شود. با توجه به اینکه آینه محدب ثانویه بین آینه اولیه و کانون آن قرار دارد قبل از اینکه امواج در کانون متمرکز شوند به این آینه برخورد کرده و در حکم جسم مجازی برای این آینه می‌باشد. آینه ثانویه این امواج را بر روی رتیکل متمرکز می‌نماید. مسیر امواج در سیستم

اپتیکی در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. امواج پس از عبور از رتیکل بر روی دتکتور متمرکز می‌شوند. دتکتور انرژی مادون قرمز دریافتی را به سیگنال الکتریکی تبدیل کرده و این سیگنال توسط قسمت الکترونیکی پردازش می‌شود. [۵]



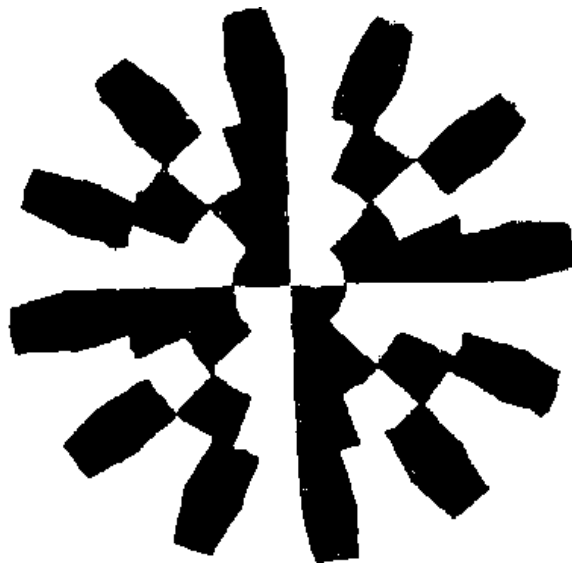
شکل (۲-۲) مسیر امواج در سیستم اپتیکی

۳-۲ رتیکل (صفحه نمونه بردار)

یکی از مسایل مهم در امر ردیابی نوری، نحوه جمع‌آوری اطلاعات هدف و تبدیل آنها به سیگنال الکتریکی می‌باشد. این مسئله با نام مدولاسیون نوری عبارتست از سوار شدن اطلاعات هدف بر روی سیگنال الکتریکی که این اطلاعات موقعیت هدف را شامل می‌شود. رتیکل که مدولاتور نوری می‌باشد، عمل مدولاسیون را انجام می‌دهد. رتیکل در اینجا، یک صفحه نمونه‌بردار دایره‌ای شکل با شعاع تقریبی ۲ میلی‌متر با قسمتهای تیره و شفاف می‌باشد. عمل چرخش آینه‌ها و وجود قسمتهای تیره و شفاف باعث می‌شود که اطلاعات مربوط به هدف در فرکانسهای بالا مدوله شود. اغتشاشات محیطی بوسیله فیلترهای مناسب حذف می‌گردد. [۹]

نحوه دوران نسبی تصویر هدف و رتیکل و همچنین نحوه قرارگیری قسمتهای تیره و شفاف در روی رتیکل نوع مدولاسیون را تعیین می‌کند. با بررسی این دو می‌توان به نحوه قرارگیری اطلاعات هدف در سیگنال الکتریکی تولیدی توسط عنصر حساس به نور (دتکتور) پی‌برد و بوسیله دمدولاسیون مناسب موقعیت نسبی هدف را مشخص نمود.

انواع مختلفی از رتیکل‌ها وجود دارد که هر کدام مزایا و معایبی دارند. اما بطور کلی، رتیکل‌ها را از نظر طراحی به دو دسته می‌توان تقسیم نمود: یک دسته از رتیکل‌ها مدولاسیون دامنه (AM) تولید می‌کنند که سیستم‌های اولیه بیشتر از این نوع استفاده می‌کردند. دسته دیگر، مدولاسیون فرکانسی (FM) تولید می‌کنند که در بیشتر جستجوگرهای مدرن استفاده می‌شود. سیستم‌های هدایت امروزه از جمله موشک مورد بحث، ترکیبی از مدولاسیون AM و FM را بکار می‌برند، که در آنها قسمت FM برتری بیشتری را دارا می‌باشد. یکی از مزایای این نوع رتیکل‌ها، این است که برای اهداف نقطه‌ای بهینه شده‌اند و اهداف بزرگ را از خود عبور نمی‌دهند. بنابراین منابع تشعشع کننده مادون قرمز که بزرگ باشند (مانند ابرها) بوسیله آن‌ها حذف می‌شوند. [۹]



شکل (۳-۲) رتیکل

شکل (۳-۲) رتیکل موشک مورد بحث را نشان می‌دهد، که دارای پنج ناحیه مختلف شعاعی می‌باشد. با چرخش آینه‌ها حول محور اپتیکی، تصویر هدف روی رتیکل یک مسیر دایروی را طی خواهد کرد که در بخش ۲-۵ به طور کامل توضیح داده خواهد شد. با توجه به قسمت‌های تیره و روشن روی رتیکل، سیگنال تولید شده بصورت یک پالس PWM می‌باشد. این سیگنال توسط قسمت‌های الکترونیکی دم‌دوله شده و اطلاعات مورد نظر (میزان انحراف هدف و جهت این انحراف) از آن استخراج می‌شود. در فصل بعد معادلات مدولاتور و دم‌دولاتور شناسایی خواهد شد.

۲-۴ دکتور

دکتور یک عنصر حساس به نور و یک مبدل انرژی مادون قرمز می‌باشد. دکتورهایی که در این موشکها بیشتر استفاده شده‌اند از دو نوع می‌باشند. نوع اول از فتورزیستور PbS می‌باشد، که به تشعشعات ناشی از نازل موتور حساس بوده، بنابراین موشک فقط قادر به حمله از سمت پشت به هدف می‌باشد، که توانایی موشک را کم می‌کند. نوع دوم از فتورزیستور InSb می‌باشد که حساس به شعله انتهایی هدف می‌باشد، در نتیجه موشک قادر به ردیابی هدف از تمامی جهات می‌باشد. بکاربردن هر یک از این دکتورها بر هدایت موشک تاثیر خاصی می‌گذارد. [۹]

۲-۵ تحلیل ریاضی عملکرد سیستم اپتیکی

آینه‌های اولیه و ثانویه بر روی روتور ژيروسکوپ نصب شده‌اند لذا همراه روتور، حول محور ژيروسکوپ که منطبق بر محور اپتیکی آینه اولیه است، با سرعت ω_s دوران می‌نمایند. با توجه به تقارن آینه اولیه و اینکه حول محور اپتیکی خودش دوران می‌کند، دوران آن تاثیری بر سیستم نمی‌گذارد. همانطور که در شکل (۲-۲) مشخص است بین محورهای اپتیکی آینه اول و ثانویه، انحراف δ توسط طراح ایجاد شده است که این انحراف در حدود یک درجه می‌باشد. وقتی که آینه ثانویه می‌چرخد اگر این انحراف وجود نداشته باشد تصویر هدف روی رتیکل یک نقطه تشکیل می‌دهد، ولی بدلیل وجود انحراف δ ، با چرخش آینه ثانویه، تصویر هدف روی رتیکل، یک دایره تشکیل خواهد داد. مکان مرکز این دایره بر روی رتیکل، اطلاعاتی در مورد مکان هدف نسبت به موشک می‌دهد، که این اطلاعات از سیگنال خروجی دکتور قابل استخراج است.

در این قسمت برای اینکه بصورت تحلیلی مکان دقیق تصویر هدف بر روی رتیکل را مشخص کنیم هدف را در یک نقطه دلخواه از فضا در نظر گرفته و با توجه به روابط آینه‌ها محل تشکیل تصویر بر روی رتیکل را بدست می‌آوریم.

ابتدا دستگاه‌های D و S را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

دستگاه D (Dish) : دستگاه چسبیده به صفحه رتیکل

محور اول این دستگاه همان محور اپتیکی آینه اصلی به سمت جلو (محور دوران ژيروسکوپ) می‌باشد. محور دوم در جهت اتصال قاب داخلی به قاب خارجی ژيروسکوپ و محور سوم از ضرب خارجی محور اول در محور دوم بدست می‌آید.

دستگاه S: دستگاه چسبیده به آینه ثانویه

محور اول این دستگاه، محور اصلی آینه ثانویه بوده و محورهای دوم و سوم بصورت زیر از دوران دستگاه D بدست می‌آید.

دستگاه D را حول محور X خودش به اندازه $\omega_s t$ دوران می‌دهیم. \Leftarrow دستگاه V

سپس حول محور Y دستگاه جدید به اندازه δ دوران می‌دهیم. \Leftarrow دستگاه S

مرکز این دو دستگاه را محل برخورد محور اول دستگاه D با آینه ثانویه در نظر می‌گیریم.

حال ماتریس دوران از دستگاه S به دستگاه D را بدست می‌آوریم.

$$C_{\omega_s t} = \text{Cos}(\omega_s t) \quad S_{\omega_s t} = \text{Sin}(\omega_s t)$$

$${}^D_V C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\omega_s t} & -S_{\omega_s t} \\ 0 & S_{\omega_s t} & C_{\omega_s t} \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

$${}^V_S C = \begin{bmatrix} C_\delta & 0 & S_\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\delta & 0 & C_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

رابطه (۲-۲) با توجه به کوچک بودن زاویه δ نوشته شده است. ($\text{Sin } \delta = \delta$)

$$\Rightarrow {}^D_S C = {}^D_V C {}^V_S C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta \\ \delta S_{\omega_s t} & C_{\omega_s t} & -S_{\omega_s t} \\ -\delta S_{\omega_s t} & S_{\omega_s t} & C_{\omega_s t} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

مطابق شکل (۲-۴) اگر هدف در نقطه A قرار داشته باشد، نقطه A' تصویر آن در آینه اولیه و نقطه A'' تصویر

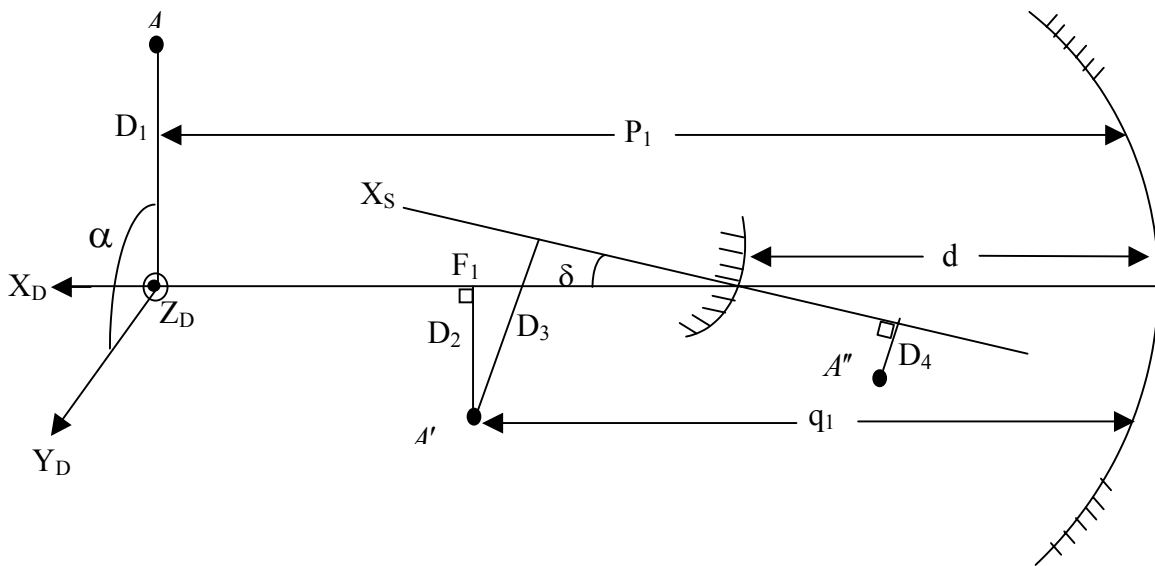
نقطه A' در آینه ثانویه می‌باشد.

f_1 = فاصله کانونی آینه اولیه

P_1 = فاصله نقطه هدف (A) از مرکز آینه اولیه

q_1 = فاصله نقطه A' از مرکز آینه اولیه

D_1 = فاصله نقطه A از محور X_D



شکل (۴-۲) هدف و تصاویر آن در آینه‌های اولیه و ثانویه

در این قسمت می‌خواهیم مختصات نقاط A, A', A'' را در دستگاه‌های D و S بدست آوریم.

اگر از نقطه A به محور X_D عمود کنیم و زاویه این خط عمود با محور Y_D را α و اندازه آن را D_1 بنامیم با توجه به روابط آینه‌ها داریم:

$${}^D A = \begin{bmatrix} P_1 - d \\ D_1 \cos \alpha \\ D_1 \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (۴-۲) \quad \text{مختصات نقطه } A \text{ در دستگاه } D :$$

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow q_1 = \frac{f_1 p_1}{p_1 - f_1} \quad (۵-۲)$$

$$q_1 \approx \frac{f_1 p_1}{p_1} = f_1 \quad (۶-۲) \quad \text{با توجه به اینکه } P_1 \gg f_1 :$$

یعنی همواره تصویر در کانون تشکیل می‌گردد.

تصویر نقطه A نسبت به آینه اولیه را A' می‌نامیم.

$$D_2 = \text{فاصله نقطه } A' \text{ از محور } X_D$$

$${}^D A' = \begin{bmatrix} f_1 - d \\ -D_2 \cos \alpha \\ -D_2 \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

علامت منفی به خاطر این است که تصویر جسم حقیقی در آینهٔ مقعر، وارونه می‌شود.

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{q_1}{p_1} \Rightarrow D_2 = \frac{D_1 q_1}{p_1} \approx \frac{D_1 f_1}{p_1} \quad (8-2)$$

برای اینکه تصویر نقطه A' را نسبت به آینهٔ ثانویه پیدا کنیم باید ابتدا مختصات نقطه A' را در دستگاه S پیدا کنیم.

$${}^S A' = {}^S C {}^D A'$$

$${}^S A' = \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{bmatrix} \quad (9-2)$$

$D_3 =$ فاصلهٔ نقطهٔ A' از محور X_S

$$D_3 = \sqrt{A_y'^2 + A_z'^2} \quad (10-2)$$

با توجه به روابط آینهٔ محدب ثانویه و اینکه این آینه در جایی قرار گرفته که جسم A' برای آن به عنوان یک جسم مجازی می‌باشد داریم:

$$-\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = -\frac{1}{f_2} \Rightarrow q_2 = \frac{f_2 p_2}{f_2 - p_2} \quad (11-2)$$

اگر تصویر نقطهٔ A' را A'' بنامیم و فاصلهٔ A'' از محور X_S را D_4 ، داریم:

$$\frac{D_4}{D_3} = \frac{q_2}{p_2} = \frac{f_2}{f_2 - p_2} \Rightarrow D_4 = \frac{f_2}{f_2 - p_2} D_3 \quad (12-2)$$

با توجه به اینکه نقاط A' و A'' و محور X_S در یک صفحه می‌باشند، اگر زاویه D_3 با صفحه $X_S Y_S$ برابر β باشد، زاویه D_4 با آن صفحه نیز β می‌باشد. لذا:

$$\cos \beta = \frac{A'_y}{D_3}$$

$$\cos \beta = \frac{A''_y}{D_4} \Rightarrow \frac{A'_y}{D_3} = \frac{A''_y}{D_4} \Rightarrow A''_y = \frac{D_4}{D_3} A'_y$$

$$\Rightarrow A''_y = \frac{f_2}{f_2 - p_2} A'_y \quad (۱۳-۲)$$

به همین ترتیب :

$$A''_z = \frac{f_2}{f_2 - p_2} A'_z$$

$${}^S A'' = \begin{bmatrix} A''_x \\ A''_y \\ A''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_2 \\ \frac{f_2}{f_2 - p_2} A'_y \\ \frac{f_2}{f_2 - p_2} A'_z \end{bmatrix} \quad (۱۴-۲)$$

با توجه به اینکه : $p_2 = A'_x$ و $q_2 = \frac{f_2 p_2}{f_2 - p_2}$

$${}^S A'' = \frac{f_2}{f_2 - A'_x} \begin{bmatrix} -A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{bmatrix} \quad (۱۵-۲)$$

حال مختصات نقطه A'' را در دستگاه D بدست می آوریم.

$${}^D A'' = {}^D C {}^S A'' \quad (۱۶-۲)$$

با توجه به اینکه مقدار زاویه α ، در فاصله مرکز دایره ایجاد شده از مرکز رتیکل، تاثیری ندارد، در اینجا برای حالت

$\alpha = 180$ مقدار ${}^D A''$ را بصورت تحلیلی بدست می آوریم.

$${}^D A'' = \frac{f_2}{f_2 - f_1 + d - \frac{D_1 f_1 \delta S_{\omega_s t}}{p_1}} \begin{bmatrix} (f_1 - d)(\delta^2 - 1) - \frac{2D_1 f_1 \delta S_{\omega_s t}}{p_1} \\ -2(f_1 - d)\delta S_{\omega_s t} + \frac{D_1 f_1}{p_1} - \frac{D_1 f_1 \delta^2 S_{\omega_s t}^2}{p_1} \\ 2(f_1 - d)\delta C_{\omega_s t} + \frac{D_1 f_1 \delta^2 S_{\omega_s t}^2}{p_1} \end{bmatrix} \quad (۱۷-۲)$$

مقدار $\frac{D_1 f_1 \delta}{p_1} S_{\omega_s t}$ در مخرج و ضرایب δ^2 قابل صرف نظر می باشند. در نتیجه داریم :

$${}^D A'' = \frac{f_2}{f_2 - f_1 + d} \begin{bmatrix} (f_1 - d)(\delta^2 - 1) - \frac{2D_1 f_1}{P_1} \\ -2(f_1 - d)\delta S_{\omega_s t} + \frac{D_1 f_1}{P_1} \\ 2(f_1 - d)\delta C_{\omega_s t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A''_{x_D} \\ A''_{y_D} \\ A''_{z_D} \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

باتعریف متغیرهای R و θ_ε بصورت زیر داریم :

$$R = \frac{+2f_2(f_1 - d)\delta}{f_2 - f_1 + d} = 37.44\delta \quad (19-2)$$

$$\theta_\varepsilon = \frac{D_1 f_1 f_2}{P_1 (f_2 - f_1 + d)} = 52.14 \frac{D_1}{P_1} \quad (20-2)$$

$$A''_{y_D} = -R S_{\omega_s t} + \theta_\varepsilon$$

$$A''_{z_D} = R C_{\omega_s t}$$

$$S_{\omega_s t}^2 + C_{\omega_s t}^2 = 1 \Rightarrow (A''_{y_D} - \theta_\varepsilon)^2 + A''_{z_D}^2 = R^2 \quad (21-2)$$

اگر A''_{x_D} مقدار ثابتی باشد و برابر فاصلهٔ رتیکل از مبدا مختصات، آنگاه با چرخش آینهٔ ثانویه، دایره‌ای به شعاع R و مرکز $(0$ و $k)$ روی رتیکل تشکیل می‌شود. با تغییر زاویهٔ α ، شعاع دایره و فاصلهٔ مرکز آن از مرکز رتیکل تغییر نخواهد کرد ولی مکان مرکز دایره تغییر خواهد کرد. با استفاده از روابط فوق سیستم اپتیک را شبیه‌سازی کرده‌ایم (که m -file آن در پیوست شمارهٔ ۱ آورده شده است). مشاهده می‌شود به ازای مقادیر متفاوت α ، D_1 و P_1 مقدار A''_{x_D} بین 18.6^{mm} و 18.8^{mm} تغییر می‌کند که با فاصله رتیکل از مبدا تقریباً برابر است. لذا دایره تشکیل شده بر روی رتیکل قرار می‌گیرد. وجود لنزهای اپتیکی قبل از رتیکل باعث می‌شود که تصویر کاملاً بر روی رتیکل متمرکز گردد.

در نمودار شکل (۲-۵) خروجی شبیه‌سازی به ازای مقادیر $P_1 = 2000m$ و $D_1 = 50m$ و $\delta = 1^\circ$ و $\alpha = 45, 150^\circ$ رسم شده است.

در نمودار شکل (۲-۶) خروجی شبیه‌سازی به ازای مقادیر $P_1 = 2000m$ و $D_1 = 50m$ و $\delta = 1^\circ, 2^\circ$ و $\alpha = 60^\circ$ رسم شده است.