وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

بررسیِ رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی گراف‌ها

پایان‌نامه‌ی دکتری

فاطمه سادات موسوی

استاد راهنما: دکتر سیّد عباداﷲ محمودیان
استاد مشاور: دکتر منوچهر ذاکر

بهمن ۱۳۸۸

بەنام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه برنگذرد

تقدیم به:

پیشگاه حضرت ولیّ‌عصر امام زمان (عج)

قدردانی و تشکّر

در نوشتن این رساله رهین منّت خدای تعالی هستم که بنده‌ی ناچیز خود را مورد لطف قرار داده است.

ابتدا بر خود لازم می‌دانم مراتب قدردانی و سپاس ویژه را نسبت به استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سیّد عبدالّله محمودیان اعلام دارم که در تمام مراحل انجام این رساله با راهنمائیهای ارزنده و صبوری فراوان بنده را مورد لطف و تفقّد قرار دادند.

از اساتید محترم جناب آقایان دکتر امیر دانشگر، دکتر منوچهر ذاکر، دکتر علی فروش باستانی، دکتر بهروز میرزائی و سرکار خانم دکتر مژگان امامی به‌خاطر تقبّل داوری رساله و نظرات ارزشمندشان سپاس‌گزارم.

از بانیان دانشگاه به ویژه ریاست آن، جناب آقای دکتر یوسف ثبوتی به‌خاطر ایجاد محیط علمی پویا برای پژوهش و ارتقای دانش استان زنجان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از خانواده‌ی خوبم به‌خصوص پدر و مادر مهربانم که همواره در تمام مراحل تحصیل مشوّق و پشتیبان من بوده‌اند تشکّر ویژه دارم.

بسیار ممنونم از همسر عزیزم که تکیه‌گاه من درتدوین این رساله بودند.

چکیده

در این رساله رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی گراف‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی از گراف G، عبارت از تخصیص رنگ‌ها به رأس‌های گراف G است به‌طوری که در همسایگی بسته‌ی هر رأس G، رنگ‌ها متمایز از هم باشند. به‌طور معادل یک رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی از گراف G، یک رنگ‌آمیزیِ مجذور گراف G است و برعکس. با این رهیافت، رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی تورها $(P_m \square P_n)$، استوانه‌ها $(P_m \square C_n)$، و چنبره‌ها $(C_m \square C_n)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با اثبات‌های ساختاری، عدد رنگی مجذور تورها، استوانه‌ها و برخی از چنبره‌ها را معین می‌کنیم و برای سایر موارد کران‌های دست‌یافتنی ارائه می‌دهیم. در ادامه بر روی گراف‌های مکعبی و زیرمکعبی اعمّ از مسطّح و غیرمسطّح متمرکز می‌شویم و با مطالعه‌ی رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی این دسته از گراف‌ها با اندازه‌ی کمر ۳، ۴ و ۵، نتیجه‌ای مشابه با نتیجه‌ی به‌دست‌آمده برای گراف‌های زیرمکعبی مسطّح به‌دست می‌آوریم. ثابت می‌کنیم عدد رنگی مجذور این رده از گراف‌ها حداکثر ۸ است. سرانجام به‌دنبال پیدایش ارتباط راهبردی این مفهوم با احاطه‌گری، عدد محاطی برخی از گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته را محاسبه می‌کنیم و رده‌بندی این دسته از گراف‌ها با عدد محاطی ماکسیمم را کامل می‌کنیم.

کلمات کلیدی: رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی، مجذور یک گراف، تور، استوانه، چنبره، گراف‌های زیرمکعبی، گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته، عدد محاطی.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

پیش‌گفتار

ایده‌ی رنگین‌کمانی در زمینه‌های مختلف نظریه گراف مطرح شده است و مطالعات فراوانی بر روی آن انجام گرفته است و به دلیل درگیربودن آن با مسائل کاربردی گسترش چشم‌گیری یافته است. تعریف جامع این مفهوم عبارت است از:

خانواده‌ی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های M و یک برچسب‌گذاری از اعضای M داده شده است. گوئیم $S \in \mathcal{F}$ رنگین‌کمان است اگر عضوهای S، برچسب‌های متمایز از هم داشته باشند.

همواره در مفهوم رنگین‌کمانی دو برچسب‌گذاری حائز اهمّیّت بوده است:

- برچسب‌گذاری از اعضای M، که حداقل یک عضو $S \in \mathcal{F}$ رنگین‌کمان باشد؟
- برچسب‌گذاری از اعضای M، که هر عضو $S \in \mathcal{F}$ رنگین‌کمان باشد؟

و به‌دنبال آن محاسبه‌ی مینیمم تعداد برچسب‌ها در هر کدام از برچسب‌گذاری‌ها سؤال اصلی پژوهش‌گران در این زمینه می‌باشد.

حال برحسب انتخاب‌های مختلف از خانواده‌ی $\mathcal{F}$، مباحث گوناگون و متنوّعی در نظریّه‌ی گراف مطرح می‌شود. در این‌جا به برخی از آن‌ها که مورد مطالعه قرار گرفته است اشاره می‌کنیم: خانواده‌ی مجموعه یال‌های واقع در یک دور به طول k [۵] و [۲۱]، خانواده‌ی مجموعه یال‌های واقع در یک مسیر به طول t [۹] و [۴۴]، خانواده‌ی مجموعه یال‌های واقع در یک تطابق [۱۶]، خانواده‌ی مجموعه رأس‌های واقع در مرز هر ناحیه از یک گراف مسطّح [۲۷]، خانواده‌ی مجموعه رأس‌های زیرگراف‌های کامل دوبخشی [۱۷] و غیره.

اما آن‌چه مدّنظر ما در این رساله است؛ $\mathcal{F}$ خانواده‌ی مجموعه رأس‌های واقع در همسایگی بسته‌ی هر رأس از گراف G، یا به‌طور هم‌ارز $\mathcal{F}$، مجموعه رأس‌ها در مسیرهای به طول نابیشتر از ۲ در G است. علاوه بر این، برچسب‌گذاری از رأس‌های G برای ما اهمّیّت دارد که در آن هر عضو $\mathcal{F}$ رنگین‌کمان باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این برچسب‌گذاری که از آن به‌عنوان رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی نام می‌بریم معادل با رنگ‌آمیزی از مجذور یک گراف است. در فصل ۱ به‌طور اجمال، مروری بر

پژوهش‌های انجام‌شده درباره‌ی رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی گراف‌ها می‌آوریم و به کاربردهایی از آن اشاره می‌کنیم. هم‌چنین همه‌ی تعاریف و قضیّه‌های مرسوم که برای مطالعه‌ی این مسأله نیاز داریم را گردآوری کرده‌ایم. تعریف‌های غیرمرسوم و جدید را در همان‌جایی که لازم است بیان می‌کنیم.

فصل ۲، اختصاص به بررسی رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی تورها $(P_m\Box P_n)$، استوانه‌ها $(P_m\Box C_n)$ و چنبره‌ها $(C_m\Box C_n)$ دارد. در این فصل با استفاده از برهان‌های ساختاری عدد رنگی مجذور تورها، استوانه‌ها و برخی از چنبره‌ها را تعیین می‌نماییم. در بقیّه‌ی موارد با استفاده از ترکیب رنگ‌آمیزی‌ها، رنگ‌آمیزی‌های رنگین‌کمانی جدیدی را تولید می‌کنیم و با استفاده از آن ثابت می‌کنیم، مجذور کلّیه‌ی چنبره‌ها به‌غیر از $C_۳\Box C_۳$، همگی ۸ـ رنگ‌پذیرند و در حالت اخیر ۹ـ رنگ‌پذیر است. این نتیجه را برای مجذور دسته‌ی $C_{۶k}\Box C_n$ و $C_{۳k}\Box C_{۲l}$ بهبود بخشیده و نشان می‌دهیم ۶ـ رنگ‌پذیر هستند و مجذور رده‌ی $C_{۳k}\Box C_{۲l+۱}$، ۷ـ رنگ‌پذیر است.

وگنر [۴۸] حدس زد که مجذور گراف‌های زیرمکعبی مسطّح، ۸ـ رنگ‌پذیر است و این حدس را اثبات کرد. در فصل ۳، بر روی گراف‌های زیرمکعبی اعمّ از مسطّح و غیرمسطّح متمرکز می‌شویم و نتیجه‌ی مشابه با نتیجه‌ی وگنر را برای گراف‌های زیرمکعبی با اندازه‌ی کمر ۳، ۴ و ۵ ثابت می‌کنیم. در این فصل نیز اساس برهان‌ها، ساختاری است. به‌این‌صورت که ابتدا یک ترتیب روی زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها قرار می‌دهیم، این رأس‌ها را آزمند نسبت به این ترتیب رنگ‌آمیزی کرده و در انتها رأس‌های باقی‌مانده را با کمی دقّتِ‌نظر بیشتر، رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

در فصل ۴، از ارتباط ساختاری سودمندی که بین مفهوم رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی و احاطه‌گری برقرار می‌شود کمک می‌گیریم و از یکی در جهت حل مسأله‌ی دیگر بهره‌مند می‌شویم. زلینکا [۵۱] برای آن دسته از k و nهایی که $gcd(n,k) = ۱$ است، یک رده‌بندی از گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته با عدد محاطی ماکسیمم را انجام داده است. در این فصل این رده‌بندی را برای تمامی kها و nها کامل می‌کنیم. در ادامه صورت ضعیف‌تری از رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی به‌نام رنگ‌آمیزی شبه‌رنگین‌کمانی را تعریف می‌کنیم و مشابهاً ارتباط ساختاری دیگری بین این مفهوم با احاطه‌گری پدید می‌آوریم. با بهره‌گیری از آن، عدد محاطی برخی از دسته‌های دیگر گراف پترسن تعمیم‌یافته را محاسبه می‌کنیم.

فصل اول

مقدمه

یکی از مسائل مهم در نظریّه‌ی گراف، که توجّه چشم‌گیری به آن شده است مسأله‌ی رنگ‌آمیزی است. مراجع [۲۶] و [۱۰]، شامل سؤال‌های باز و مطالعات انجام‌شده در حیطه‌های مختلف آن گواهی بر این ادّعا است. رنگ‌آمیزی گراف‌ها، مدلی از مسأله‌ی افراز مجموعه‌ها است. افراز یک مجموعه از عناصر به زیرمجموعه‌هایی با محدودیّت‌های تعیین‌شده، که عناصر را رأس‌های یک گراف درنظر می‌گیریم و دو رأس را با یک یال به‌هم متّصل می‌کنیم اگر عناصر متناظر نتوانند در یک زیرمجموعه از افراز قرار گیرند. زیرمجموعه‌های این افراز را با رنگ‌ها نام‌گذاری می‌کنیم که معمولاً رنگ‌های ما اعداد صحیح نامنفی هستند. در اغلب موارد، سعی ما بر مینیمم‌سازی تعداد رنگ‌ها در رنگ‌آمیزی است. برحسب محدودیّت‌های مختلف، رنگ‌آمیزی‌های متنوّعی از گراف متولّد می‌شوند. رنگ‌آمیزی مدّنظر ما در این رساله، که در فصل‌های آتی به آن خواهیم پرداخت، رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی [۱] است. قبل از تعریف آن در بخش دوّم، تعریف‌ها و قضیّه‌های کلاسیک اساسی را در بخش اوّل بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد از آن استفاده خواهیم نمود. در خاتمه این فصل مروری بر مطالعات انجام‌گرفته در این حیطه رنگ‌آمیزی و کاربردهای عملی آن می‌کنیم.

[۱] Rainbow coloring

۱.۱ تعریف‌ها و نمادگذاری‌ها

مرجع اصلی نمادگذاری‌ها و اصطلاحات در این پایان‌نامه، مرجع [۴۹] است که ترجمه‌ی پنج فصل آن در مرجع [۴] آمده است. در این بخش نمادهای استفاده‌شده و بعضی از تعریف‌ها را می‌آوریم. لازم به ذکر است که به جز واژه‌هایی که برای اوّلین بار در این پایان‌نامه آمده‌اند، برای معادل‌های فارسی بقیّه از مرجع‌های [۱] و [۲] استفاده کرده‌ایم.

در این رساله منظور ما از یک گراف، همواره یک گراف ساده است. مجموعه رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. **درجه‌ی** رأس v در گراف G را با $d(v)$ و مینیمم و ماکسیمم درجه رأس‌های G را به‌ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم. اگر درجه‌ی هر رأس G برابر با k باشد، G را k**ـ منتظم** گوئیم. گراف‌های ۳ـ منتظم را **مکعبی** و گراف‌های با ماکسیمم درجه‌ی نابیشتر از ۳ را **زیرمکعبی** می‌نامیم.

همسایگی رأس v در G با $N_G(v)$ و **همسایگی بسته‌ی** رأس v را با $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ نمایش می‌دهیم. یک **زیرگراف** از گراف G، یک گراف H است که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و می‌نویسیم $H \subseteq G$. درصورتی‌که H زیرگراف G نباشد G را **بدون** H گوئیم. یک **زیرگراف القایی** H از گراف G، یک زیرگراف ماکسیمال G با مجموعه رأس‌های $V(H)$ است. زیرگراف‌های حاصل از حذف مجموعه یال‌های E_1 یا مجموعه رأس‌های V_1 را به‌ترتیب با $G-E_1$ و $G-V_1$ و زیرگراف حاصل از انقباض یال e را با $G.e$ نمایش می‌دهیم. هرگاه E_1 یا V_1 یک تک‌عضوی باشد از نمادهای مختصر $G-e$ یا $G-v$ استفاده می‌کنیم. به زیرگراف حاصل از حذف یا انقباض زیرمجموعه‌ای از عناصر G (رأس‌ها و یال‌ها)، یک **کهاد** G گوئیم.

حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف G و H، $G\square H$، یک گراف با مجموعه رأس‌های $V(G)\times V(H)$ است و دو رأس (u,v) و (u',v') با هم مجاورند اگر $v=v'$ و $uu' \in E(G)$ و یا $u=u'$ و $vv' \in E(H)$. همواره ترسیمی از گراف $G\square H$ را درنظر می‌گیریم که در آن کپی‌های افقی یکریخت با G و کپی‌های

عمودی یکریخت با H هستند. v_{ij} را رأس متناظر با کپی iام G از پایین و کپی jام H از چپ فرض می‌کنیم.

یک **مسیر** از u به v، با n رأس متمایز را با P_n و **فاصله‌ی** بین دو رأس u و v را با نماد $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم. درصورتی‌که چنین مسیری بین دو رأس u و v در یک گراف G وجود نداشته باشد $d(u,v)$ را بی‌نهایت قرار می‌دهیم. یک مسیر که ابتدا و انتهای آن یکی باشد را **دور** می‌نامیم. **اندازه‌ی کمر** یک گراف G را کوچکترین اندازه یک دور و **قطر** یک گراف را اندازه‌ی بزرگترین مسیر در G فرض می‌کنیم و به‌ترتیب با نمادهای $g(G)$ و $D(G)$ نشان می‌دهیم.

یک گراف G را **مسطّح** می‌نامیم، اگر بتوان آن را به طریقی رسم کرد که هر یال آن، تنها در رأس‌های دو سر خود با یال‌های دیگر برخورد داشته باشد. هر ترسیم از یک گراف مسطّح، دقیقاً یک ناحیه‌ی بی‌کران دارد که آن را **ناحیه‌ی بیرونی** گوییم. در صورتی که یک ترسیم از گراف مسطّح G وجود داشته باشد که همه‌ی رأس‌های آن در مرز ناحیه‌ی بیرونی قرار گیرند، G را یک گراف **برون مسطّح** می‌نامیم.

به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k، **توان** kام گراف G، G^k، گرافی است با مجموعه رأس‌های یکسان با $V(G)$ و دو رأس در G^k مجاورند اگر فاصله‌ی نابیشتر از k در G داشته باشند. **مجذور** گراف G، توان دوم G است. **گراف پترسن** گرافی است که رأس‌های آن متناظر با زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه ۵ عضوی است و دو رأس در آن به‌هم متّصل هستند اگر زیرمجموعه‌های متناظر اشتراک تهی داشته باشند. مجذور گراف پترسن گراف کامل ۱۰ راسی است. در حقیقت پترسن تنها گراف مکعبی همبند است که مجذور آن گراف کامل ۱۰ راسی است.

زیرمجموعه‌ای چون S از $V(G)$ را که هیچ دو رأس آن در G مجاور نیستند، یک **مجموعه مستقل** از G می‌نامیم. مجموعه‌ی مستقل S در G، **ماکسیمم** است، اگر هیچ مجموعه‌ی مستقل S' با شرط $|S| < |S'|$ وجود نداشته باشد. تعداد رأس‌های موجود در یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم از G را **عدد استقلال** G می‌نامیم و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

به یک زیرمجموعه از رأس‌های دو به‌دو مجاور در G یک **خوشه** می‌گوئیم. **عدد خوشه‌ای** گراف G برابر با بیشترین تعداد رأس‌ها در یک خوشه‌ی G است و با نماد $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی $D \subseteq V(G)$ را یک **مجموعه‌ی غالب** برای G نامیم، اگر هر رأس در $V(G) - D$، حداقل یک همسایه در D داشته باشد. مجموعه‌ی غالب D را **مینیمم** نامیم، اگر هیچ مجموعه‌ی غالب D' با خاصیت $D' \subseteq V(G)$ و $|D'| < |D|$ موجود نباشد. اندازه‌ی مجموعه غالب مینیمم از G را **عدد غلبه‌ای** G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. به یک زیرمجموعه‌ی مستقل $D \subseteq V(G)$، یک **مجموعه‌ی غالب کارا** گوئیم اگر هر رأس در $V(G) - D$، دقیقاً یک همسایه در D داشته باشد. **عدد محاطی** یک گراف G، $d(G)$ عبارت از ماکسیمم تعداد کلاس‌ها در افراز مجموعه رأس‌های G به زیرمجموعه‌های غالب است.

منظور از یک **رنگ‌آمیزی** از گراف G، تخصیص رنگ‌ها (که اغلب با اعداد صحیح نامنفی نمایش می‌دهیم) به رأس‌های گراف G است. یک **رنگ‌آمیزی جزئی** از گراف G، تخصیص رنگ‌ها به زیرمجموعه‌ای از رأس‌های G است. یک رنگ‌آمیزی از G را **معتبر** گوئیم هرگاه هر دو رأس مجاور در G، رنگ‌های متمایز داشته باشند. یک k**ـ رنگ‌آمیزی** از G، یک رنگ‌آمیزی از G است، که از k رنگ استفاده می‌کند. اگر G، یک kـ رنگ‌آمیزی معتبر داشته باشد G را k**ـ رنگ‌پذیر** گوئیم. کوچکترین kای که G، kـ رنگ‌پذیر است را **عدد رنگی** G نامیم و با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم σ یک ترتیب خطی از رأس‌های G باشد. یک **رنگ‌آمیزی آزمند** از G نسبت به ترتیب σ، یک رنگ‌آمیزی رأسی از G است که در آن هر رأس G، با ترتیب σ کوچکترین رنگ قابل قبول را می‌پذیرد. رنگ‌آمیزی آزمند یک گراف G، اوّلین کران را برای عدد رنگی به‌صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + ۱.$$

در قضیّه‌ی زیر منسوب به بروکس[۲]، ثابت می‌شود کران فوق برای تنها دو رده از گراف‌ها دست‌یافتنی است.

---

[۲] Brooks

قضیه ۱.۱.۱ [۴۹] اگر G یک گراف ساده‌ی همبند باشد که نه دور فرد و نه گراف کامل است، آن‌گاه: $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

رنگ‌آمیزی لیستی، ایده‌ی جامع رنگ‌آمیزی است. در یک گراف G با لیست رنگ‌های S_v، که $v \in V(G)$، یک **رنگ‌آمیزی لیستی** از G یک رنگ‌آمیزی معتبر از G مانند c است، به‌طوری که به‌ازای هر رأس $v \in V(G)$، $c(v) \in S_v$. هرگاه به‌ازای هر لیست رنگ‌های S_v که هر یک از لیست‌ها از اندازه‌ی حداقل k است، G یک رنگ‌آمیزی لیستی داشته باشد، گوئیم G، kـ **رنگ‌پذیر لیستی** است. کوچکترین kای که G، kـرنگ‌پذیر لیستی است را **عدد رنگی لیستی** G نامیم و با $\chi_l(G)$ نمایش می‌دهیم.

رنگ‌آمیزی لیستیِ گراف‌ها مفهوم دیگری از مجموعه‌ها را نمایان می‌سازد. یک **سیستم نمایندگی متمایز** از n مجموعه‌ی متناهی $A_۱, \ldots, A_n$ عبارت است از n عضو دو به‌دو متمایز $a_۱, \ldots, a_n$ که به‌ازای هر i، $۱ \leq i \leq n$، $a_i \in A_i$. به‌وضوح رنگ‌آمیزی لیستی یک گراف کامل با لیست‌های S_v، چیزی جز یک سیستم نمایندگی متمایز برای مجموعه‌های S_v نیست. از این ایده در فصل ۳ استفاده خواهیم کرد.

۲.۱ رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی

تعریف ۱.۲.۱ یک رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی از یک گراف G، یک رنگ‌آمیزی رأسی معتبر از G است که هر رأس و مجموعه رأس‌های واقع در همسایگی آن، دارای رنگ‌های متمایز باشند.

همانند دیگر رنگ‌آمیزی‌های گراف، پیدا کردن کمترین تعداد رنگ برای رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی گراف G، مسأله‌ی اصلی است. البتّه ثابت شده است که برای گراف داده شده‌ی G و عدد مثبت k، مسأله‌ی مشخّص‌کردن «آیا G یک رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی با k رنگ دارد» یک مسأله‌ی NPـ سخت است [۲۹].

رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی با عبارت‌های دیگری نظیر «رنگ‌آمیزی قوی» توسط کانت و لی‌یوون[۲۹]، مطرح شده و مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است.

واضح است که در یک رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی از گراف G، رأس‌های واقع در فاصله‌ی نابیشتر از ۲ رنگ‌های متمایز دارند. از این‌رو هرگاه در گراف G، رأس‌های واقع به فاصله‌ی ۲ را از یک‌دیگر به‌هم وصل کنیم، رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی G یک رنگ‌آمیزی معتبر از گراف حاصل که مجذور G است خواهد بود. بنابراین:

گزاره ۱.۲.۲ یک رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی از گراف G هم‌ارز با یک رنگ‌آمیزی معتبر از گراف G^2 است.

این گزاره ما را به رنگ‌آمیزی فاصله‌ای که تعمیمی از رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی است رهنمود می‌کند.

تعریف ۳.۲.۱ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت داده‌شده‌ی d، یک kـ **رنگ‌آمیزی dـ فاصله‌ای** از یک گراف G، اختصاص k رنگ به رأس‌های G است، که در آن هر دو رأس در فاصله‌ی نابیشتر از d، رنگ‌های متمایز اختیار می‌کنند. کوچکترین kای که به‌ازای آن G، یک kـ رنگ‌آمیزی dـ فاصله‌ای داشته باشد را **عدد رنگی dـ فاصله‌ای** G می‌نامیم و با $\chi_d(G)$ نمایش می‌دهیم.

در این زمینه مطالعات فراوانی انجام شده است، برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌توانید به مرجع [۳۰] رجوع کنید که شامل خلاصه‌ای از کارهای انجام‌شده در این راستا است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود رنگ‌آمیزی ۲ـ فاصله‌ای، همان رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی است. رنگ‌آمیزی فاصله‌ای برای گراف‌های nـ مکعب Q_n، تحت عنوان **رنگ‌آمیزی ابرمکعبی** مطالعه شده است. در بخش بعد نتایج مربوطه را می‌آوریم.

با استفاده از معادل‌سازی گزاره‌ی ۲.۲.۱، در فصل ۲ و ۳ به مطالعه‌ی رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی

گراف‌ها خواهیم پرداخت. در ادامه کران‌های اساسی که برای $\chi(G^۲)$ داریم را بیان می‌کنیم.

همسایگی بسته‌ی یک رأس با ماکسیمم درجه در گراف G، یک خوشه در $G^۲$ از اندازه‌ی $\Delta(G) + ۱$ است. بنابراین $\chi(G^۲) \geq \Delta(G) + ۱$. درخت‌ها از جمله گراف‌هایی هستند که این کران پایین برای آن‌ها قابل‌احراز است. به‌ازای هر درخت T داریم: $\chi(T^۲) = \Delta(T) + ۱$.

طبق قضیّه‌ی بروکس $\chi(G^۲) \leq (\Delta(G))^۲ + ۱$. کران بالای مذکور برای همه‌ی گراف‌هایی با قطر ۲ از جمله برای گراف پترسن و دور $C_۵$ دست‌یافتنی است. اکثریّت کارهای انجام‌شده درباره‌ی رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی، مربوط به ارائه‌ی کران بالا برای $\chi(G^۲)$ است که در بخش آتی، مفصّل به آن خواهیم پرداخت. آنتنوسی [۷]، در سال ۱۹۷۸ کران پایین زیر را برای عدد رنگی مجذور گراف G به‌عنوان یک تابع برحسبِ تعداد رأس‌ها و یال‌های G به‌دست آورده است.

قضیه ۴.۲.۱ [۷] فرض کنیم G یک گراف با n رأس و m یال بدون دور با طول ۳ و ۴ باشد. آن‌گاه داریم: $\chi(G^۲) \geq \frac{n^۳}{n^۳ - ۴m^۲}$.

۳.۱ پیشینه‌ی مسأله

در این بخش نظر به اهمّیّت رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی گراف‌ها، به بررسی اجمالی کارهای انجام‌شده می‌پردازیم. در ادامه با دسته‌بندی این کارها در دو بخش، مقاله‌های مرتبط با آن‌ها را می‌آوریم تا خواننده‌ی علاقه‌مند بتواند برای مطالعه‌ی بیشتر به آن‌ها رجوع کند.

۱.۳.۱ گراف‌های مسطّح

اهمّ مطالعات انجام‌شده در ارتباط با رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی مربوط به گراف‌های مسطّح است و به‌نظر می‌رسد نخستین آن‌ها مقاله‌ی وگنر [۴۸] در سال ۱۹۷۷ باشد. وگنر در این مقاله نشان داد که مجذور