بسما...الرحمن الرحیم

بررسی پیچش بیز در برآوردیابی

بوسیله

عیسی محمودی

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی بعنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجه کارشناسی ارشد

دررشته

آمار ریاضی

از

دانشگاه شیراز

شیراز، ایران

ارزیابی وتصویب شده توسط کمیته‌پایان نامه بادرجه: بسیار خوب

امضاء اعضاء کمیته پایان نامه:

دکتر جواد بهبودیان استاد آمار دانشگاه شیراز (رئیس کمیته) ....

دکتر ناهید سنجری‌فارسی‌پور دانشیار آمار دانشگاه شیراز ....

دکتر عبدالرسول برهانی‌حقیقی استادیار آمار دانشگاه شیراز ....

شهریور ماه ۱۳۸۰

تقدیم به:

پدر و مادر بزرگوارم

آیینه‌های سخت کوشی و از خود گذشتگی

سرمشقهایی برای لحظه لحظه زندگی‌ام

واژه‌ها در بیان خوبیهایشان ناتوان است.

سپاسگزاری

قلم را آن زمان نبود که سر عشق گوید باز

ورای حد تقدیرست شرح آرزومندی

پس از حمد و ستایش به درگاه خداوند متعال، بدینوسیله از جناب آقای دکتر بهبودیان، استاد محترم بخش آمار دانشگاه شیراز که راهنمائیهای ارزنده‌ی ایشان باعث آسان شدن دشواریهای این بررسی بوده است و همچنین از زحمات بی‌شائبه‌ای که ایشان در امر تدریس و مشاورت اینجانب کشیده‌اند، نهایت سپاسگزاری و قدردانی را دارم.

در این میان بر خود لازم می‌دانم از دقت و حوصله و وسواس علمی و همکاری آقای دکتر عبدالرسول برهانی حقیقی و سرکار خانم دکتر ناهید سنجری فارسی‌پور اعضاء محترم کمیته پایان‌نامه که آن را مطالعه و با ارائه پیشنهادات سازنده خود اینجانب را یاری داده‌اند، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

سپاس فراوان خود را به خانواده عزیزم که با ایجاد محیطی آرام و مناسب سبب تسریع در امر نگارش پایان‌نامه گشته‌اند، تقدیم و در خاتمه از خانم میرزایی که بنده را در انجام کارهای اداری یاری نموده‌اند و زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

" بررسی پیچش بیز در برآوردیابی "

توسط

عیسی محمودی

در این پایان‌نامه نخست به تشریح نامساوی پراکندگی که در سال ۱۹۸۴ در مجله .Ann. stat توسط کلاسن (Klaasen) آمده است می‌پردازیم. سپس برآورد پارامتر $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ بوسیله برآوردگر $T = (T_1, \ldots, T_k)$ در یک مدل مطالعه می‌گردد.

فرض کنید W یک توزیع پیشین برای پارامتر k بعدی θ بوده و تعریف کنیم:

$$G(y) = \int_{R^k} P_\theta(T - \theta \leq y) dW(\theta); \qquad y \in R^k$$

(منظور از $(T - \theta \leq y)$ عبارتست از $(T_1 - \theta_1 \leq y_1, \ldots, T_k - \theta_k \leq y_k)$. در بسیاری از حالات، برای هر برآوردگر T، توزیع G را می‌توان به صورت پیچش $G = K * L$، به نام پیچش بیز، نوشت که در آن توزیع K به توزیع W و توزیعهایی دیگر وابسته بوده و L نیز خود یک تابع توزیع است.

فصل اول بر مفهوم، تاریخچه و ارتباط بین نامساوی پراکندگی و پیچش بیز در برآوردیابی تاکید دارد.

در فصل دوم نامساوی پراکندگی را در حالتی که پارامترها دارای توزیع پیشین هستند، مطالعه می‌کنیم و سپس به بررسی قضایای مربوط به آن پرداخته، الگاریتم‌های آن را با ذکر چند مثال بررسی خواهیم کرد.

در فصل سوم قضایا و الگاریتم‌های پیچش بیز را مورد بررسی قرار داده، سعی خواهیم کرد با ارائه چند مثال مفهوم پیچش بیز را به خوبی تشریح کنیم.

در فصل چهارم مدل نرمال چند بعدی را، تحت پیچش بیز، مطالعه می‌کنیم. مدلهای نرمال چند متغیره با پارامتر مکان، همراه با تعمیم مناسب معیار پیچش بیز برای اینگونه مدلها موضوع فصل چهارم را تشکیل می‌دهد.

در فصل پنجم به بررسی مدلهای نمایی، با پارامتر مکان، تحت الگاریتم پیچش بیز، می‌پردازیم.

در فصل ششم، به مدل لاگ گاما، با پارامتر مکان، توجه می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل اول: مقدمه و دورنما ....

۱.۱ : مقدمه ۱

۱.۲ : یافتن بهترین برآوردیاب بر اساس دست یافتن به یک کران واقعی برای واریانس برآوردگرها ۱

۱.۲.۱ : نامساوی کرامر-رائو در آمار کلاسیک ۲

۱.۲.۲ : نامساوی کرامر-رائو در آمار بیز ۲

۱.۲.۳ : نامساوی پراکندگی ۵

۱.۳ : مروری بر فرمولهای پیچش در حالت کلاسیک ۸

۱.۴ : تاریخچه بوجود آمدن پیچش بیز ۱۰

۱.۵ : قلمرو این پایان‌نامه ۱۰

فصل دوم: نامساوی پراکندگی و موارد استفاده آن در برآوردیابی ....

۲.۱ : مقدمه ۱۳

۲.۲ : نامساوی پراکندگی ۱۳

۲.۲.۱ : بررسی چند نتیجه در رابطه با نامساوی پراکندگی ۲۵

۲.۳ : بررسی خاصیت قویاً تک مدی ۳۲

عنوان **صفحه**

۱.۳.۲ : رابطه بین نامساوی پراکندگی و خاصیت قویاً-تک مدی ۳۳

فصل سوم: پیچش بیز ....

۱.۳ : مقدمه ۳۵

۲.۳ : پیچش بیز در برآوردیابی ۳۵

۳.۳ : مقایسه بهترین برآوردیابهای بدست آمده توسط سه روش-نامساوی ون-تریز، نامساوی پراکندگی و پیچش بیز ۴۱

فصل چهارم: مدلهای نرمال با پارامتر مکان مکان ....

۱.۴ : مقدمه ۴۳

۲.۴ : دترمینان و معکوس ماتریس‌های بلوک‌بندی شده ۴۳

۱.۲.۴ : خواصی در مورد ماتریس تصویر ۴۵

۲.۲.۴ : توزیعهای شرطی ۴۶

۳.۴ : بررسی پیچش بیز در مدل نرمال ۴۶

۴.۴ : تعمیم معیار پیچش بیز برای مدلهای نرمال دیگر ۵۱

۱.۴.۴ : بررسی رفتار مجانبی پیچش بیز برای مدل نرمال ۵۴

عنوان | صفحه

فصل پنجم: مدلهای نمایی با پارامتر مکان . . . .

۵.۱ : مقدمه ۵۶

۵.۲ : بررسی پیچش بیز در مدلهای نمایی ۵۶

۵.۳ : مدلهای چند متغیره نمایی و چند متغیره با مینیمم نمایی ۶۰

۵.۴ : مدل ضربه مخرب ۶۲

۵.۴.۱ : بررسی پیچش بیز در مدل ضربه مخرب ۶۳

۵.۵ : بررسی معیار پیچش بیز برای توزیعهای نمایی در حالت کلی ۶۴

فصل ششم: مدلهای لاگ گاما همراه با پارامتر مکان . . . .

۶.۱ : مقدمه ۶۶

۶.۲ : معرفی توزیع لاگ گاما ۶۷

۶.۳ : بررسی پیچش بیز برای مدل لاگ گاما ۶۸

۶.۴ : لزوم استفاده از توزیعهای لاگ گاما و نرمال در بررسی پیچش بیز . . . ۷۲

فهرست مراجع ۷۸

چکیده انگلیسی . . . .

فصل اول

مقدمه و دورنما

۱_۱: مقدمه

روشهای متفاوتی برای برآورد پارامتر مجهول یک توزیع وجود دارد، مانند روش گشتاورها (Method of moment)، کمترین توانهای دوّم (Least squares)، بیشترین راستنمایی (maximum liklihood)، روش بیز، روش بیز تجربی و غیره.

اهمیت هر روش به آسانی و خواص آن بستگی دارد.

در این پایان‌نامه برای برآورد یابی از روش پیچش بیز استفاده می‌شود.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع $\theta \in \Theta \subset R^k, P_\theta$ باشد، یک راه برای دست یافتن به برآوردگر بهینهٔ $T_\circ = t_\circ(X)$ برای پارامتر θ این است که ابتدا یک کران واقعی برای واریانس تمام برآوردگرهای $T = t(X)$ (به عنوان برآوردی برای پارامتر θ) بدست آوریم و نشان دهیم که واریانس $T_\circ = t_\circ(X)$ به این کران نزدیک یا با آن برابر است.

۲_۱: یافتن بهترین برآوردیاب براساس دست یافتن به یک کران واقعی برای واریانس برآوردگرها

در این قسمت یک نامساوی اساسی، برای واریانس برآوردگرها، که به نامساوی "کرامر_رائو" معروف است و نامساوی اطلاع (Information inequality) نیز نامیده می‌شود تشریح می‌گردد.

قبل از بیان نامساوی "کرامر_رائو" برای حالت یک پارامتری، به‌بیان شرایطی که برای برقراری نامساوی لازم‌اند، و از آنها تحت عنوان شرایط مطلوب یاد می‌شود، می‌پردازیم.

اگر X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانواده چگالیهای $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ باشد، آنگاه شرایط زیر به شرایط مطلوب شهرت دارد.

الف: θ یک زیر فاصله باز از اعداد حقیقی است یعنی $\theta \subset R$.

ب: مشتق تابع چگالی نسبت به θ یعنی $\frac{\partial}{\partial\theta}P_\theta(x)$ وجود دارد.

ج: جابجایی عملگرهای مشتق و انتگرال مجاز است یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int P_\theta(x)d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial\theta}P_\theta(x)d\mu(x)$$

د: برای هر $\theta \in \Theta$ آن گاه $E_\theta[\frac{\partial}{\partial\theta}lnP_\theta(X)]^{۲} > ۰$

ه: برای هر برآوردگر T پارامتر $\gamma(\theta)$ داشته باشیم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(T(X)) = \frac{\partial}{\partial\theta}\int t(x)P_\theta(x)d\mu(x) = \int t(x)\frac{\partial}{\partial\theta}P_\theta(x)d\mu(x)$$

۱-۲-۱: نامساوی کرامر- رائو در حالت کلاسیک

در این قسمت، به کوتاهی نامساوی کرامر-رائو را در حالت کلاسیک یادآور می‌شویم.

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ دارای یک توزیع توام با تابع چگالی توام $P_\theta(x_۱, \ldots, x_n)$، $\theta \in \Theta$ باشند، اگر T برآوردگر پارامتر $\gamma(\theta)$ باشد آن گاه تحت شرایط مطلوب داریم:

$$Var_\theta(T) \geq \frac{[\gamma'(\theta) + b'(\theta)]^{۲}}{E_\theta(\frac{\partial}{\partial\theta}lnP_\theta(X_۱, \ldots, X_n))^{۲}}$$

به طوری که $b(\theta) = E_\theta(T) - \gamma(\theta)$، نمایانگر اریبی برآوردگر T برای پارامتر $\gamma(\theta)$ است. برای مطالعه بیشتر به [۶] مراجعه شود.

۲-۲-۱: نامساوی کرامر-رائو در آمار بیز

در آمار کلاسیک، واریانس برآوردکننده‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرند ولی در آمار بیز، برآوردکننده‌ها بوسیله ریسک بیز آنها با هم مقایسه می‌شوند. در این قسمت یک کران پائین

برای ریسک پیشین برآوردکننده‌ها ارائه می‌شود.

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از X، با چگالی $f(x|\theta)$، $\theta \in \mathcal{A}$ و $\pi(\theta)$ یک تابع چگالی احتمال روی فضای پارامتری $A = (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ باشد به طوریکه π در نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی A همگرا به صفر گردد با تعریف دو تابع $I_X(\theta) = E_\theta(\frac{\partial}{\partial\theta} ln f(X|\theta))^2$ و $J(\pi) = E[\frac{\partial}{\partial\theta} ln\pi(\theta)]^2$ و کاربرد $E_\theta[\frac{\partial}{\partial\theta} ln f(X|\theta)] = 0$ داریم:

$$\text{ریسک بیز پیشین } \hat{\theta} = \gamma(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}(X) - \theta)^2 \geq \frac{1}{nE[I_X(\theta)] + J(\pi)}$$

امید ریاضی در این نامساوی نسبت به توزیع توأم (X, θ) است. $I_X(\theta)$ اطلاع فیشر برای θ در X و $J(\pi)$ اطلاع فیشر برای θ در چگالی پیشین π نامیده می‌شود. نامساوی بالا را، نامساوی ون-تریز (Van-Trees) هم می‌نامند که در آن $\hat{\theta}$ هر برآوردکننده‌ای برای θ است و نیازی به‌برقراری شرط (هـ) از شرایط مطلوب نیست. حال به ذکر دو نکته راجع به نامساوی فوق می‌پردازیم:

الف: اگر $\hat{\psi}(X)$ برآوردکننده‌ای برای تابع $\psi(\theta)$ باشد، نابرابری زیر بدست می‌آید:

$$E[\hat{\psi}(X) - \psi(\theta)]^2 \geq \frac{E[\psi'(\theta)]^2}{E[I_X(\theta)] + J(\pi)}$$

که در آن امید ریاضی در صورت کسر سمت راست نسبت به چگالی $\pi(\theta)$ و دو امید ریاضی دیگر نسبت به توزیع توام (X, θ) می‌باشند.

ب: حالت تساوی در نامساوی ون-تریز هنگامی برقرار می‌شود که در نامساوی کشی-شوارتس تساوی برقرار شود یعنی داشته باشیم:

$$c(\hat{\theta}(x) - \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} ln f(x)\theta\pi(\theta)$$

که در آن c عددی ثابت است. این برابری بدین معناست که چگالی پسین به صورت زیر است:

$$\pi(\theta|x)\alpha f(x|\theta)\pi(\theta) = e^{-\frac{1}{2}c(\hat{\theta}(x)-\theta)^2}$$

به سخنی دیگر چگالی پسین، به شکل چگالی توزیع نرمال با میانگین $\hat{\theta}(x)$ است.

پس به طور کلی می‌توان گفت تنها هنگامی نامساوی ون-تریز تبدیل به تساوی می‌شود که چگالی پسین نرمال باشد و داشته باشیم $\hat{\theta}(x) = E[\theta|x]$ یعنی $\hat{\theta}(x)$ برآوردکننده‌ی بیز با تابع زیان درجه دو باشد. برای اطلاعات بیشتر در مورد نامساوی ون-تریز به [۱۲] و [۲۳] مراجعه شود.

مثال ۲-۲-۱: فرض کنید $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta, \sigma^2)$ با σ^2 معلوم باشد. برای برآورد پارامتر θ وقتی که تابع زیان درجه دو باشد، در آمار بیز معمولاً فرض می‌شود که پارامتر θ خود یک متغیر تصادفی با توزیع پیشین $N(\mu, \tau^2)$ است. اینک داریم:

$$I_X(\theta) = E[\frac{\partial}{\partial\theta} ln f(X|\theta)]^2 = \frac{1}{\sigma^2} \quad , \quad J(\pi) = E[\frac{\partial}{\partial\theta} ln \pi(\theta)]^2 = \frac{1}{\tau^2}$$

در نتیجه کران پائین نابرابری ون-تریز برابر است با:

$$\frac{1}{nE[I_X(\theta)] + J(\pi)} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$$

و از طرفی دیگر داریم:

$$\theta|\underline{x} \sim N\Big(\big(\frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}\big)\overline{x} + \big(\frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}\big)\mu, \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}\Big)$$

همچنین می‌دانیم که یک برآوردکننده‌ی بیز برای پارامتر θ با تابع زیان درجه دو عبارت است از:

$$\delta_B(\underline{x}) = E(\theta|\underline{x}) = \left(\frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}\right)\overline{x} + \left(\frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}\right)\mu$$

و داریم:

$$\begin{aligned}
\delta_\theta(\underline{x})\text{ریسک بیز پیشین} &= r(\delta_B(\underline{x})) = E_{(\theta,\underline{x})}(\delta_B(\underline{x}) - \theta)^2 \\
&= E_\theta[E_{\underline{X}|\theta}(\delta_B(\underline{x}) - \theta)^2) \\
&= E_\theta(E_{\underline{X}|\theta}(L(\theta, \delta_B(\underline{x}))) \\
&= E_\theta(R(\theta, \delta B(\underline{x}))) = B(\pi, \delta_B) = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}
\end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که در این مثال ریسک بیز پیشین برآوردکننده‌ی بیز با کران پائین نامساوی ون-تریز برابر می‌شود، زیرا چگالی پسین نرمال است و $\delta_B(\underline{x}) = E(\theta|\underline{x})$.

۳-۲-۱: نامساوی پراکندگی (Spread Inequality)

مفهوم پراکندگی در آمار توسط آمارданان مختلفی مورد بحث قرار گرفته است و هر یک از آنها تعریفی را برای این مفهوم ارائه داده‌اند.

در سال ۱۹۷۹ دو فرد به نامهای لویز (Lewis) و تامپسون (Tampson) تعریف زیر را برای پراکندگی ارائه دادند: (به [۱۹] نگاه کنید.)

فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه احتمال (Probabilities measure) روی خط اعداد حقیقی با چگالیهای مثبت f_1 و f_2 و توابع توزیع F_1 و F_2 باشند در این صورت گوئیم F_1 از پراکندگی بیشتری نسبت به F_2 برخوردار است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$F_2(F_2^{-1}(u) + a) \leq F_1(F_2^{-1}(u) + a)$ برای هر $a > 0$ و $u \in (0, 1)$ و

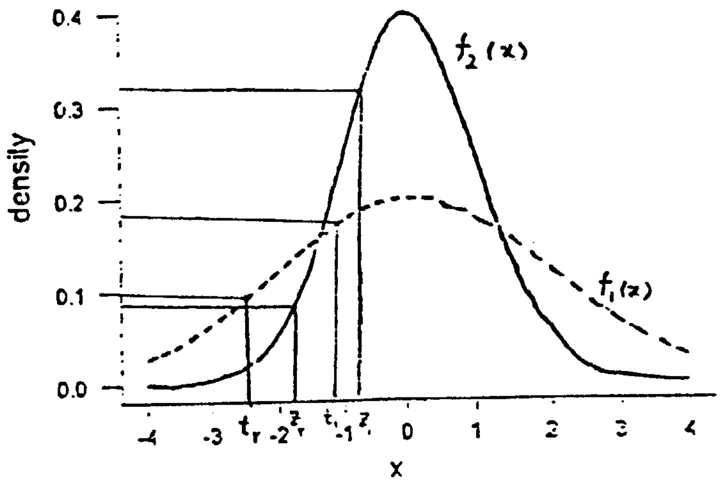
$F_2(F_2^{-1}(u) + a) \geq F_1(F_1^{-1}(u) + a)$ برای هر $a < 0$ و $u \in (0, 1)$

(a مقداری ثابت می‌باشد و F_1^{-1} و F_2^{-1} توابع توزیع معکوس مربوط به توزیع‌های F_1 و F_2 می‌باشند).

در سال ۱۹۸۱، بیکل (Bickel) و لهمن (Lehman) نشان دادند که F_1 از پراکندگی بیشتری نسبت به F_2 برخوردار است اگر و فقط اگر هر دو مقدار از مقادیر F_1 نسبت به مقادیر متناظر از F_2 از یکدیگر جداتر باشند یعنی داشته باشیم:

$$F_1^{-1}(\nu) - F_1^{-1}(u) \geq F_2^{-1}(\nu) - F_2^{-1}(u) \qquad 0 \leq u \leq \nu \leq 1$$

برای توجیه رابطه بالا به شکلی که در زیر آورده می‌شود توجه کنید.



$$F_1^{-1}(\nu) \;=\; t_1 \Rightarrow F_1(t_1) = \nu \Rightarrow \int_{-\infty}^{t_1} f_1(t)dt = \nu$$

$$F^{-1}(u) \;=\; t_2 \Rightarrow F_1(t_2) = u \Rightarrow \int_{-\infty}^{t_2} f_1(t)dt = u \quad 0 \leq u \leq \nu \leq 1$$

$$F_2^{-1}(\nu) \;=\; z_1 \Rightarrow F_2(z_1) = \nu \Rightarrow \int_{-\infty}^{z_1} f_2(t)dt = \nu$$

$$F_2^{-1}(u) \;=\; z_2 \Rightarrow F_2(z_2) = u \Rightarrow \int_{-\infty}^{z_2} f_2(t)dt = u \qquad t_1 - t_2 \geq z_1 - z_2$$

پس F_1 دارای پراکندگی بیشتری نسبت به F_2 می‌باشد. اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از چگالی $f(. - \theta)$ با $\theta \in R,$ با اندازه لبگ (Lebesgue measure) (R, β) باشد، پارامتر مکان θ بوسیله برآوردگر $T_n = t_n(X_1, \ldots, X_n)$ برآورد می‌شود.(t_n تابع اندازه‌پذیر $t_n : R^n \to R$ می‌باشد). ما علاقمند به یافتن توزیع T_n تحت $f(. - \theta)$ هستیم.

اگر T_n برآوردگری پایا تحت گروه تبدیلات مکانی با

$$G = \{g_n(\underline{x}); g_a(\underline{x}) = (x_1 + a, \ldots, x_n + a)\}$$

باشد در این صورت داریم:

$$t_n(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = t_n(x_1, \ldots, x_n) + a$$

با توجه به خاصیت پایایی برآوردگر T_n چنین نتیجه می‌شود که:

$$f_{(f(\circ-\theta))}(T_n \leq x) = P_f(T_n \leq x-\theta), x \in R, \theta \in R$$

بنابراین ما فقط نیاز به بررسی توزیع T_n تحت f داریم. $(\theta = \circ)$

تعریف (نامساوی پراکندگی)

فرض کنید $G_n(x) = P_f(a_nT_n \leq x)$، ($a_n$ مقداری مثبت و G_n توزیع a_nT_n تحت f است) و f یک تابع چگالی مطلقاً پیوسته (absolutely continuse) با مشتق f' باشد.

تابع توزیع K_n را برای بعضی مقادیر $w \in (\circ, \text{۱})$ را به وسیله رابطه

$$K_n^{-\text{۱}}(u) = \int_w^u \frac{\text{۱}}{\int_s^{\text{۱}} H_{n^{-\text{۱}}}(t)dt} ds \quad \circ < u \leq \text{۱}$$

تعریف می‌کنیم. وقتی که $H_n^{-\text{۱}}$ تابع توزیع معکوس مربوط به H بوده و داریم:

$$H_n^{-\text{۱}}(t) = inf\{x|H_n(x) \geq t\} \quad , \quad H_n(x) = P_f(a_n^{-\text{۱}} \sum_{i=\text{۱}}^{n}[-\frac{f'}{f}(X_i)] \leq x); x \in R$$

اگر بین توابع توزیع K_n و G_n رابطه

$$G_n^{-\text{۱}}(\nu) - G_n^{-\text{۱}}(u) \geq K_n^{-\text{۱}}(\nu) - K_n^{-\text{۱}}(u) \quad \circ \leq u \leq \nu \leq \text{۱} \qquad (\text{۱.۱.۳.۱})$$

در این صورت گوئیم توزیع G_n از پراکندگی بیشتری نسبت به K_n برخوردار است و آن را با نماد $G_n(x) \geq_{\text{۱}} K_n(x)$ نشان می‌دهیم. رابطه رابطه فوق به " نامساوی پراکندگی " مشهور است.

نامساوی پراکندگی همراه با قضایا و الگوریتم‌های مربوط به آن موضوع فصل دوم را تشکیل می‌دهد که در آن فصل به طور کامل به بحث مربوط به آن می‌پردازیم. جهت مطالعهٔ بیشتر در مورد نامساوی پراکندگی به [۱۴] و [۱۵] و [۱۷] نگاه کنید.