بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان

حل عددی معادله کلین- گوردن غیرخطی

استاد راهنما

دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور

دکتر حجت اله ادیبی

پژوهشگر

هانیه خان محمدی فرد

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم و

همسر مهربانم

و به دست های پر از مهر آنان، که مرا در این راه یاری نمودند آنان که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، شکوه توانستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آن هاست.

و اینک به پاس آن همه ایثار و محبت ثمره تلاشم را به قلب های مهربانشان تقدیم می کنم.

تقدیر و تشکر

سپاس و تشکر روزافزون به درگاه خداوند متعال که توفیق علم‌آموزی و کسب دانش را به ما عنایت فرمود.

اکنون که به لطف خداوند متعال نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، برخود می‌دانم از کسانی که مشوق و راهنمای اینجانب بوده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

در ابتدا از زحمات و راهنمایی‌های دلسوزانه و بی‌دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر رشیدی‌نیا که بی‌شک بودن هدایت ارزنده و ارائه راهکارها و پیشنهادهای ایشان، موفقیت در نگارش این اثر حاصل نمی شد، کمال تشکر را دارم.

همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر ادیبی به پاس زحمات بی‌دریغشان و جناب آقای دکتر فریبرزی که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند و وقت گران‌بهای خود را در اختیار اینجانب قرار دادند قدردانی می‌نمایم.

در انتها نیز از خانواده‌ام که در طول دوران تحصیل مشوق و حامی اینجانب بودند و هم چنین از کلیه دوستان و عزیزانی که مرا در انجام بهتر این پایان‌نامه یاری نمودند، تقدیر می‌کنم.

چکیده

مسائل مقدارمرزی غیرخطی در مدل‌بندی بسیاری از مسائل در علوم پایه و مهندسی کاربرد دارند. روش‌های کلاسیک برای به دست آوردن جواب صریح برای مسائل غیرخطی در مواردی محدود می تواند جواب به دست آورد و به خصوص در حالت‌های غیرخطی و غیرعادی به دست آوردن چنین جوابی سخت و بعضی اوقات غیرممکن خواهد بود.

در این پایان‌نامه یک روش عددی را برای حل معادله کلین — گوردن یک بعدی غیرخطی با استفاده از روش هم‌محلی بی‌اسپلاین بر روی نقاط با طول گام مساوی به کار برده می‌شود. مسئله را برای هر دو شرایط مرزی نیومن و دیریکله حل می‌کنیم. همگرایی و پایداری روش نیز ثابت شده است در نهایت، این روشمان را برای پنج مثال که در بحث فیزیولوژی کاربرد دارند به کار می‌بریم و جواب‌ها را با سایر روش‌هایی که این مسائل را حل کرده‌اند مقایسه کرده‌ایم $L_۲$ و L_∞ و خطاهای مربع — میانگین — ریشه (RMS) در جواب‌ها، کارایی روش را از لحاظ محاسباتی نشان می‌دهد.

این پایان‌نامه براساس مرجع [۱] می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: معادله کلین گوردن غیرخطی، روش بی‌اسپلاین مکعبی، هم‌محلی، آنالیز همگرایی

فهرست مندرجات

مقدمه

دردهه‌ها و به خصوص سال‌های اخیر مفهوم یا اصطلاح بین رشته‌ای را بارها و بارها در زمینه‌های گوناگون علوم شنیده یا به کار برده‌ایم. آن چه که به نظر می‌رسد، کاربرد آن در محدوده یک دانش مشخص مانند ریاضیات اگر نه بی معنی، شاید بیمورد باشد. با پذیرفتن این حقیقت به کارگیری آن در طرح جامع یا ابتدایی یک پایان‌نامه و به ویژه در طرح یک مساله، تا حدودی می‌تواند روشن کننده پیچیدگی‌های خاص آن مسئله و همچنین بیانگر پیوندهای آن با مسائل دیگر باشد. حال در این چهارچوب و با این دیدگاه، به طرح اصلی پایان‌نامه خود می‌پردازم؛ هر پدیده‌ای در طبیعت از قبیل زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، مکانیکی و ... را می‌توان توسط قوانین فیزیکی توصیف کرد. این کار منجربه پدیدآمدن معادلات جبری، دیفرانسیلی، انتگرالی و ... می‌شود که کمیت‌های مورد نظر را به هم مربوط می‌سازد.
بسیاری از مدل‌های مهم ریاضی برای مفاهیم فیزیکی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی هستند. حرکت اجسام، انتقال گرما، انحنا و ترک خوردگی مواد، ارتعاشات و واکنش‌های شیمیایی و هسته‌ای همگی به وسیله معادلات دیفرانسیل، مخصوصاً معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی مدل بندی می‌شوند. در حقیقت اکثر پدیده‌های طبیعی با تغییر زمان یا مکان تغییر می‌کنند و مدل کردن این تغییرات منجربه یک معادله دیفرانسیل می‌شود. معادلات دیفرانسیل دسته‌های گوناگونی دارند، که دسته‌های بسیار خاصی از آن به طور تحلیلی و

دقیق قابل حل هستند و بسیاری اوقات برای حل یک معادله دیفرانسیل با شکل بسیار ساده، روش‌های تحلیلی پیچیده و پرهزینه وجود دارد. از این رو است که روش‌های حل عددی مثل بسیاری از شاخه‌های ریاضی، تبدیل به روش‌هایی کارآمد در عرصه‌های معادلات دیفرانسیل شده‌اند. روش‌های زیادی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی همراه با شرایط مرزی مورد استفاده قرار می‌گیرند که از آن جمله می‌توان به روش‌های تفاضلات متناهی، اجزاء محدود، روش تیراندازی، روش هم‌محلی، تابع سینک، توابع اسپلاین و غیره اشاره کرد.
بسیاری از این روش‌ها در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی و بعضاً غیرعادی به مشکلاتی برمی‌خورند که کاربرد آن‌ها را سخت و در بعضی مواقع غیر ممکن می‌کند، مثلاً عدم پایداری جواب و یا پایین بودن دقت جواب مورد نظر.
معادله کلین گوردن غیرخطی در مسائل گوناگون در علوم و مهندسی ایجاد می‌شود که به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} - \mu \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \chi(x,t,u) = \phi(x,t) \quad a \leq x \leq b\ ,\ t > t_۰$$

معادله کلین گوردن نقش بسیار مهمی را در کاربردهای علمی از قبیل فیزیک سیالات، فیزیک اپتیک و قضیه مقدار کوانتوم‌مرجع [۲] و منابع موجود در آن، بازی می‌کند.
در معادله ساین گوردن معروف نیروی غیرخطی با $\chi(x,t,u) = \sin u$ معین می‌شود در کاربردهای فیزیکی نیروی غیرخطی $\chi(x,t,u)$ فرم‌های دیگری نیز دارد. حالت $\chi(x,t,u) = u^۳ - u$ معادله $\phi^۴$ و حالت‌های $\chi(x,t,u) = \sin u + \sin ۲u$ و $\chi(x,t,u) = \sinh u + \sinh ۲u$، به ترتیب معادله $\sin$ گوردن دوبل و $\sinh$ — گوردن دوبل نامیده می‌شوند [۳] و [۴]. روش‌های مختلفی برای حل معادلات نوع کلین گوردن وجود دارد از قبیل؛ روش تابع بیضوی وایرشتراس، روش بسط گویای معادله بیضی و روش تابع F —

توسعه یافته و... که این روش‌ها را در [۵]، [٦] و [۷] و منابع موجود در آن‌ها مشاهده می‌کنیم. مولفان دیگری نیز با استفاده از روش‌های مختلفی معادلات کلین گوردن را حل نموده‌اند [۲]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳] و [۱۴]. این پایان نامه یک روش عددی جدید برای حل معادله کلین گوردن غیرخطی با استفاده از روش هم‌محلی بی‌اسپلاین مکعبی ارائه می دهد. کادالباجو [۱۵] روش هم‌محلی بی‌اسپلاین بر روی نقاط با طول گام‌های نامساوی برای اختلال در فضای یک بعدی را به کار می‌برد.

ادریس [۱٦] روش گالرکین را با استفاده از بی‌اسپلاین مرتبه چهارم برای به دست آوردن جواب عددی معادله RLW به کار برده است و همچنین خلیفه [۱۷] روش هم‌محلی با بی‌اسپلاین‌های مکعبی را برای حل معادله MRLW ارائه می‌دهد در [۱۸] تکنیک بی‌اسپلاین مرتبه پنجم دقتی بهتر از روش‌های تفاضلی متناهی ارائه می‌کند روش حداقل مربعات بی‌اسپلاین مرتبه دوم نیز در [۱۹] استفاده شده است.

در فصل اول این پایان‌نامه ابتدا تعاریف کلی و اولیه که مورد نیاز می‌باشند را به طور خلاصه بیان کرده‌ایم. در فصل دوم یک خلاصه از تاریخچه پیدایش و به کارگیری اسپلاین‌ها و بی‌اسپلاین‌ها را ارائه می‌دهیم، سپس یک رابطه برای بی‌اسپلاین مکعبی و مراتب بالاتر به دست می آوریم.

در فصل سوم یک روش تفاضلی را با استفاده از تابع بی‌اسپلاین مکعبی برای حل معادله‌ی کلین‌گوردن غیرخطی در فضای یک بعدی بکار می‌بریم و نتایج زیر را به دست می آوریم.

در جهت زمان همگرایی مرتبه سوم را به دست می‌آوریم. سپس با به کار بردن روش هم‌محلی بی‌اسپلاین و محاسبه‌ی خطاها، آنالیز همگرایی و پایداری روش را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در نهایت در فصل چهارم، روشمان را برای پنج مثال به کار می‌بریم و با مقایسه نتایج عددی با نتایج سایر روش‌ها، کارائی و برتری روش را به صورت محاسباتی نشان می‌دهیم.

هدف از این پایان‌نامه ارائه روشی عددی برای حل معادله کلین‌گوردن غیرخطی در فضای یک بعدی است که از لحاظ به کارگیری ساده و قابل فهم و پایداری قابل توجهی نیز داشته باشد و در ضمن دقت جواب‌های به دست آمده‌ی آن نیز در مقایسه با روش‌های مشابه بهتر است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل و دسته‌بندی آن‌ها

یک معادله دیفرانسیل تابعی ضمنی از متغیر یا متغیرهای مستقل، متغیر یا متغیرهای وابسته و مشتق‌های نسبی نسبت به متغیر یا متغیرهای مستقل است، معادلات دیفرانسیل در نگاه اول به دو دسته معادلات دیفرانسیل معمولی و نسبی تقسیم می‌شوند. اگر معادله‌ی دیفرانسیل تنها شامل یک متغیر مستقل باشد آن معادله را معادله دیفرانسیل معمولی و در غیر اینصورت معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی نامیده می‌شود، که در ادامه بحث به آن‌ها می‌پردازیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی

معادلات با مشتقات نسبی در هندسه و فیزیک هنگامی پیش می آیند که تعداد متغیرهای مستقل در مساله مورد بحث ۲ یا بیشتر از ۲ باشد و در چنین حالتی، هر متغیر وابسته، احتمالا تابع بیش از یک متغیر است، لذا تنها مشتق عادی نسبت به یک متغیر ندارد بلکه مشتقات نسبی نسبت به چند متغیر دارد. مثلا در بررسی تاثیرات حرارتی در یک جسم صلب، ممکن است دمای u از نقطه‌ای به نقطه دیگر و همچنین از لحظه‌ای به لحظه دیگر تغییر کند، در نتیجه مشتقات

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}$$

در حالت کلی صفر نباشند، مضافاً ممکن است در مساله بخصوصی چنین پیش آید که مشتقات نسبی مراتب بالاتر، مثل

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^۳ u}{\partial x^۲ \partial t}, \cdots$$

دارای معنی فیزیکی باشند.

هنگامی که قوانین فیزیک را برای مسائلی از این نوع به کار می‌بریم، بعضی اوقات رابطه‌ای بین مشتقات بدست می‌آوریم. چنین رابطه‌ای که مشتقات نسبی را به هم ربط می دهد به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی موسوم است. بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات نسبی معادله‌ای است که شامل متغیر وابسته و متغیرهای مستقل و مشتقات نسبی متغیر وابسته نسبت به یک یا چند متغیر مستقل، که در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, \ldots) = ۰ \qquad (۱.۱)$$

این معادله شامل متغیرهای مستقل $x, y, \ldots$ و متغیر وابسته u و مشتقات نسبی متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل است. معادله‌ی (۱.۱) در یک دامنه‌ی مناسب D از فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ با مختصات $y, x, \ldots$ در نظر گرفته می‌شود. منظور از حل یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات نسبی، پیدا کردن توابعی مانند $u = u(x, y, \ldots)$ که در ناحیه‌ی D متحداً در معادله‌ی (۱.۱) صدق می‌کنند. چنین توابعی در صورت وجود، جواب‌های معادله (۱.۱) نامیده می‌شوند. [۲۰]

تعریف ۱.۲.۱ مرتبه یک معادله با مشتقات جزئی، بالاترین مرتبه مشتقات نسبی ظاهر شده متغیر وابسته در معادله می‌باشد. (به عنوان مثال $u_{xx} + ۲u_{xy} + u_{yy} = e^y$ یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات نسبی مرتبه‌ی دوم می‌باشد. [۲۰]

تعریف ۲.۲.۱ درجه یک معادله با مشتقات جزئی، بزرگترین درجه مشتقات نسبی وابسته در معادله می‌باشد (به عنوان مثال معادله $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۳ + \frac{\partial u}{\partial t} = ۰$ از درجه ۳ می‌باشد)[۲۰]

تعریف ۳.۲.۱ یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی نامیده می‌شود هرگاه نسبت به متغیر وابسته و مشتقات آن خطی باشد و ضرایب معادله تنها به متغیرهای مستقل

بستگی داشته باشند. معادله را شبه خطی می‌گویند هرگاه نسبت به بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله خطی باشد. معادله‌ای که خطی نباشد غیر خطی نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱ اگر هر یک از جملات معادله با مشتقات نسبی شامل متغیر وابسته یا مشتقات نسبی آن باشد آنگاه آن معادله با مشتقات نسبی را همگن و در غیر اینصورت غیرهمگن می‌نامند. (به عنوان مثال معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(x,y)$ در صورتی که $p(x,y) \neq 0$ باشد یک معادله غیرهمگن است)

۳.۱ معادلات با مشتقات نسبی مرتبه اول

شکل کلی این نوع معادلات به صورت زیر است:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial xn}) = 0 \qquad u = u(x_1, \ldots, x_n)$$

در حالت خاص چنانچه داشته باشیم $\frac{\partial u}{\partial y} = q, \frac{\partial u}{\partial x} = p$ آنگاه یک معادله با مشتقات نسبی مرتبه اول به فرم $F(x,y,p,q) = 0$ نوشته می‌شود.

این نوع معادلات با مشتقات نسبی در هندسه، فیزیک و مهندسی ظاهر می‌شوند.

۴.۱ معادلات با مشتقات نسبی مرتبه دوم

شکل کلی این نوع معادلات نیز در فیزیک و مهندسی کاربرد دارند و مهمترین این معادلات با مشتقات جزئی، معادله موج، معادله حرارت و معادله لاپلاس می‌باشند.

فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی مرتبه دوم خطی از n متغیر مستقل به صورت زیر می‌باشد [۲۰]

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} B_iu_{x_i} + F_u = G$$

فرض می‌کنیم $A_{ij} = A_{ji}$، B_i، F و G توابعی از n متغیر x_i باشند.

که رابطه فوق با فرض داشتن دو متغیر مستقل x، y و متغیر وابسته $u = u(x,y)$ چنین می‌شود:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \qquad (۲.۱)$$

A، B، C، D، E، F و G توابعی بر حسب x و y و مستقل از u می‌باشند.

اما اگر A، B، C، D، E، F و G توابعی از متغیرهای مستقل x و y باشد معادله (۲.۱) را معادله با مشتقات نسبی خطی مرتبه دوم گویند که به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱) معادله دیفرانسیل نسبی بیضوی می‌باشد، اگر $B^2 - 4AC < 0$

۲) معادله دیفرانسیل نسبی سهموی می‌باشد، اگر $B^2 - 4AC = 0$

۳) معادله دیفرانسیل نسبی هذلولوی می‌باشد، اگر $B^2 - 4AC > 0$

۱.۴.۱ معادله دیفرانسیل نسبی بیضوی

یکی از مشهورترین این نوع معادلات، معادله پواسن می‌باشد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \qquad (۳.۱)$$

فرض می‌کنیم که تابع f در این معادله مشخص کننده داده‌های مسئله روی یک ناحیه مسطح R باشد که مرز آن را با منحنی S نمایش می‌دهیم.