دانشگاه ملایر

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گراف های ایدآل های پوچساز یکدیگر حلقه های جابجایی با گونای مثبت و متناهی

استاد راهنما

دکتر سعید باقری

استاد مشاور

دکتر رشید رضائی

پژوهشگر

الهام شیخ نجدی

بهمن ماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شیخ نجدی نام: الهام

عنوان: گراف های ایدآل های پوچساز یکدیگر حلقه های جابجایی با گونای مثبت و متناهی

استاد راهنما: دکتر سعید باقری

استاد مشاور: دکتر رشید رضائی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: ملایر دانشکده علوم ریاضی و آمار

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۹

واژگان کلیدی: حلقه جابجایی؛ گراف ایدآل پوچساز؛ گونای گراف

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $A(R)$مجموعه ایدآل هایی از R باشند که پوچساز آنها ناصفر است. گراف ایدآل های پوچساز یکدیگر R به صورت $AG(R)$ نشان داده که مجموعه رئوس آن $A(R)^* = A(R) - \{(0)\}$ بوده و دو رأس متمایز I و J مجاورند اگر $IJ = (0)$. در این پایان نامه حلقه های جابجایی را بررسی می کنیم که گراف ایدآل های پوچساز آنها دارای گونای متناهی و مثبت باشد. درحالتی که R حلقه ای آرتینی بوده و $\gamma(AG(R)) < \infty$، نشان داده می شود که یا Rفقط تعداد متناهی ایدآل دارد و یا $(R, \mathfrak{M})$ گرنشتاین بوده و $v.dim_{\frac{R}{\mathfrak{M}}} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} = 2$. همچنین برای دو عدد صحیح$q > 0, g \geqslant 0$ نشان داده می شود که تعداد متناهی رده های یکریخت از حلقه های آرتینی مانند R وجود دارد بطوریکه برای هر ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{M}$ از R داریم $|\frac{R}{\mathfrak{M}}| \leq q$ $\gamma(AG(R)) = g,$. به علاوه نشان داده می شود که اگر R حلقه ای موضعی و نوتری باشد که حوزه صحیح نبوده و $\gamma(AG(R)) < \infty$، آنگاه یا حلقه R گرنشتاین است و یا R حلقه ای آرتینی است که تعداد متناهی ایدآل دارد.

بسم الله الرحمن الرحيم

تاییدیه ی هیأت داوران جلسه ی دفاع از پایان نامه

نام دانشکده: علوم ریاضی و آمار-گروه ریاضی

نام دانشجو: الهام شیخ نجدی

عنوان پایان نامه: گراف های ایدآل های پوچساز یکدیگر حلقه های جابجایی با گونای متناهی و مثبت

تاریخ دفاع:۱۳۹۲

رشته: ریاضی محض

گرایش: جبر-نظریه حلقه ها و مدول ها

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا مؤسسه	امضـــــــــا
۱	استاد راهنما	دکتر سعید باقری	استاد یار	دانشگاه ملایر	
۲	استاد مشاور	دکتر رشید رضائی	استادیار	دانشگاه ملایر	
۳	استاد مدعو داخلی	دکتر مسیب زهره وند	استاد یار	دانشگاه ملایر	
۴	استاد مدعو خارجی	دکتر کریم سامعی	دانشیار	دانشگاه بوعلی همدان	

تقدیم به همسر عزیزم

و فرزندان دلبندم نیلوفر و نیوشا

نیایش[1]

خداوند بی نهایت است و لامکان و بی زمان. اما به قدر فهم تو کوچک می شود و به قدر نیاز تو فرود می آید و به قدر آرزوی تو گسترده می شود و به قدر ایمان تو کارگشا می شود.

خداوند همه چیز می شود همه کس را ...

به شرط اعتقاد، به شرط پاکی دل، به شرط طهارت روح، به شرط پرهیز از معامله با ابلیس. بشویید قلب هایتان را از هر احساس ناروا و مغزهایتان را از هر اندیشه خلاف و زبان هایتان را از هر گفتار ناپاک و دست هایتان را از هر آلودگی در بازار. و بپرهیزید از ناجوانمردی ها، ناراستی ها، نامردمی ها....

چنین کنید تا ببینید چگونه بر سفره شما با کاسه ای خوراک و تکه ای نان می نشیند و در دکان شما کفه های ترازویتان را میزان می کند و در کوچه های خلوت شب با شما آواز می خواند .

مگر از زندگی چه می خواهید که در خدایی خدا یافت نمی شود؟

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

[1] مناجاتی از ملا صدرا

سپاس گزاری

سپاس و ستایش خداوند حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر باقری صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر رضائی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، اینجانب را راهنمایی نمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

الهام شیخ نجدی

بهمن ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی گراف ها نظر ریاضی دانان زیادی را به خود جلب کرد و منجر به نتایج بسیار جالب و پرسش های زیادی گردید. مقالات بسیاری در مورد گراف یک حلقه نوشته شد. از جمله می توان تعدادی از این مقالات را در مراجع [۸]، [۹]، [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] مشاهده کرد.

ایده برقراری ارتباط بین حلقه های جابجایی و نظریه گراف برای اولین بار توسط بک [۲] در سال ۱۹۸۸ مطرح شد. در تعریفی که این ریاضی دان در مقاله اش ارائه داد، همه ی عناصر حلقه به عنوان رئوس این گراف در نظر گرفته شدند. در این گراف دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = ۰$. بنابراین در این گراف رأس ۰ با همه رئوس دیگر مجاور است.

مطالعه این مقاله توسط ریاضی دانان دیگر ادامه یافت، تا این که در سال ۱۹۹۹، اندرسون [۳] و لیوینگستون [۴] طی مقاله ای تعریف جدیدی برای گراف وابسته به حلقه هایی جابجایی ارائه دادند. در این تعریف مجموعه رئوس گراف، $Z(R) - \{۰\}$ که مجموعه مقسوم علیه های صفر ناصفر حلقه هستند و گراف مقسوم علیه های صفر R را با $\Gamma(R)$ نشان می دهند. در این گراف دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = ۰$.

گونای گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی در مراجع [۲۵] و [۲۷] مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله در مرجع [۲۸] ثابت شد که اگر $(R, \mathfrak{M})$ یک حلقه گرنشتاین متناهی از مرتبه $|R| = p^k$ باشد بطوریکه

$$k > ۴, \quad \mathfrak{M}^۲ \neq (۰), \quad \mathfrak{M}^۳ = (۰), \quad \frac{R}{\mathfrak{M}} = F_p,$$

آنگاه $\Gamma(R)$شامل یک کپی از $K_{p^{k-۲}-p, p^۲-۱}$ یا $K_{p^{k-۳}-p, p^۳-۱}$ است. (لم ۹.۱.۲ را ببینید.)
همچنین نشان داده می شود که برای هر عدد صحیح مثبت g، تعداد متناهی حلقه های جابجایی متناهی با گونای gوجود دارد. (قضیه ۳.۲.۲ را ببینید.)

در نظریه حلقه ها ساختار حلقه R به رفتار ایدآل هایش بیشتر از عناصر حلقه وابسته است. بنابراین بهتر بود گرافی تعریف می شد که رئوس آن به جای عناصر حلقه، ایدآل های حلقه R باشند.

[۲] Beck
[۳] Anderson
[۴] Livingston

بهبودی و راکعی در سال ۲۰۱۱ در مقالات [۱۴] و [۱۶] گرافی را تعریف کردند که به آن گراف ایدآل های پوچساز یکدیگر حلقه جابجایی R گفته می شود و با $AG(R)$ نشان داده می شود. مجموعه رئوس این گراف $A(R) - \{(۰)\}$ یعنی مجموعه ایدآل های ناصفر با پوچساز ناصفر R است. در این گراف دو رأس متمایز Iو J مجاورند اگر و تنها اگر$IJ = (۰)$.

در این پایان نامه به بررسی حلقه هایی که گراف ایدآل پوچساز یکدیگرشان دارای گونای گونای متناهی و مثبت است می پردازیم و نشان می دهیم اگر Rحلقه ای آرتینی باشد و $\gamma(AG(R)) < \infty$، آنگاه R دارای تعداد متناهی ایدآل است یا $(R, \mathfrak{M})$ حلقه ای گرنشتاین است و $v.dim_{\frac{R}{\mathfrak{M}}} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^۲} = ۲$. (قضیه ۴.۲.۳ را ببینید.)

همچنین اگر q عددی طبیعی و g عدد صحیحی نامنفی باشد، آنگاه تعداد متناهی حلقه آرتینی R وجود دارند که در شرایط زیر صدق می کنند.

$$
\begin{aligned}
&۱)\gamma(AG(R)) = g.\\
&۲)|\frac{R}{\mathfrak{M}}| \leq q \quad \forall \mathfrak{M} \in Max(R).
\end{aligned}
$$

(قضیه ۹.۲.۳ را ببینید.)

در ادامه گونای گراف ایدآل های پوچساز یکدیگر حلقه های نوتری بررسی می شوند.

همچنین نشان داده می شود که اگر R یک حلقه موضعی نوتری باشد و $\gamma(AG(R)) < \infty$، آنگاه یا حلقه R یک حوزه صحیح است یا همه ایدآل های غیر بدیهی R رأس های $AG(R)$ هستند. (قضیه ۳.۳.۳ را ببینید.)

همچنین اگر R حلقه ای نوتری باشد که همه ایدآل های نابدیهی R رئوس $AG(R)$ باشند بطوریکه $\gamma(AG(R)) < \infty$، آنگاه R حلقه ای گرنشتاین است یا R یک حلقه آرتینی با تعداد متناهی ایدآل است. (قضیه ۴.۳.۳ را ببینید.)

درپایان نشان داده خواهد شد که اگر R حلقه ای موضعی نوتری غیر حوزه صحیح باشد بطوریکه $\gamma(AG(R)) < \infty$، آنگاه یا R حلقه ای گرنشتاین است یا R حلقه ای آرتینی با تعداد متناهی ایدآل است. (قضیه ۵.۳.۳ را ببینید.)

یادآوری می شود که در این پایان نامه همه حلقه ها جابجایی و یکدار در نظر گرفته شده اند.

فصل ۱

پیش نیاز ها

مقدمه

برای رسیدن به جایی که نرسیده ایم باید از راهی برویم که تا به حال نرفته ایم.

"گاندی"

در فصل اول مفاهیم، تعاریف و قضایایی را ارائه می دهیم که ابزار های اساسی ما در فصل های بعدی می باشند. از آنجایی که هدف این پایان نامه بررسی گراف های ایدآل های پوچساز یکدیگر حلقه های جابجایی با گونای مثبت و متناهی می باشد، لذا این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول مفاهیمی از نظریه حلقه های جابجایی و در بخش دوم نیز مفاهیمی از نظریه ی گراف ها را بیان می کنیم.

۱.۱ مفاهیمی در نظریه ی حلقه های جابجایی

نمادگذاری ۱.۱.۱. *اگر S زیرمجموعه ای ازحلقه R باشد $S - \{0\}$ با S^* نشان داده می شود.*

نمادگذاری ۲.۱.۱. *برای هر مجموعه دلخواه X، عدد اصلی X با $|X|$ نشان داده می شود.*

نمادگذاری ۳.۱.۱. *حلقه اعداد صحیح به سنج n با $\mathbb{Z}_n$ نشان داده می شود.*

نمادگذاری ۴.۱.۱. *میدان متناهی با n عضو با $\mathbb{F}_n$ نشان داده می شود.*

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید I یک ایدآل و X زیرمجموعه ای دلخواه از حلقه جابجایی R باشد. حاصل تقسیم یا خارج قسمت $(I : X)$ به صورت

$$(I : X) = \{a \in R : aX \subseteq I\}$$

تعریف می شود. در حالت خاص $I = 0$، حاصل تقسیم

$$(0 : X) = \{a \in R : aX = \{0\}\} = \{a \in R : ab = 0, \forall b \in X\}$$

پوچساز X نامیده می شود و با $Ann(X)$ نشان داده می شود.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد و $x \in R$. x یک مقسوم علیه صفر حلقه R است هرگاه عنصری ناصفر مانند $y \in R$ وجود داشته باشد که $xy = 0$.

مجموعه مقسوم علیه های صفر R با $Z(R)$ نشان داده می شود.

تعریف ۷.۱.۱. ایدال I از R یک ایدآل پوچساز نامیده می شود اگر $Ann(I) \neq (0)$.
مجموعه ایدآل های پوچساز حلقه R با $A(R)$ نشان داده می شود.

تعریف ۸.۱.۱. ایدآل $\mathfrak{M}$ از حلقه R را ماکسیمال گوییم هر گاه نسبت به رابطه شمول عضو ماکسیمال مجموعه ایدآل های سره R باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید R حلقه ای جابجایی باشد. حلقه R با دقیقا یک ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{M}$ را حلقه موضعی [۱] می نامیم و با $(R, \mathfrak{M})$ نشان می دهیم و $\frac{R}{\mathfrak{M}}$ را میدان مانده ای R می نامیم.

مثال ۱۰.۱.۱. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_8$ در این صورت R یک حلقه ی موضعی با ایدآل ماکسیمال منحصر بفرد $\mathfrak{M} = \{0, 2, 4, 6\}$ است.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید R حلقه ای جابجایی باشد. حلقه R با تعداد متناهی ایدآل ماکسیمال را نیمه موضعی [۲] می نامیم.

[۱] Local ring
[۲] Semi-local ring

مثال ۱۲.۱.۱. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$. در این صورت حلقه R یک حلقه ی نیمه موضعی با ایدآل های ماکسیمال $\mathfrak{M}_1 = \{0, 2\} \times \mathbb{Z}_8$ و $\mathfrak{M}_2 = \mathbb{Z}_4 \times \{0, 2, 4, 6\}$ است.

تعریف ۱۳.۱.۱. رادیکال جیکبسن [3] حلقه Rاشتراک ایدآل های ماکسیمال Rاست و آن را با $J(R)$نشان می دهیم.

نمادگذاری ۱۴.۱.۱. *مجموعه همه عناصر وارون پذیر حلقه R را با $U(R)$ نشان می دهیم.*

نتیجه ۱۵.۱.۱. *فرض کنید Rحلقه ای جابجایی باشد و $a \in R$. در این صورت a عضو وارون پذیری از R است اگر و تنها اگر برای هر ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{M}$ از R، $a \notin \mathfrak{M}$.*

برهان: *نتیجه ۱۱.۳ از مرجع [1] را ببینید.* □

قضیه ۱۶.۱.۱. ***(قضیه ساختاری حلقه های آرتینی):*** *هر حلقه آرتینی R بطور یکتا به صورت حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی از حلقه های موضعی آرتینی است.*

برهان: *قضیه ۷.۸ از [11] را ببینید.* □

نتیجه ۱۷.۱.۱. *فرض کنید R حلقه ای جابجایی و متناهی باشد، در این صورت هر عضو R یا وارون پذیر است و یا مقسوم علیه صفر است.*

برهان: *چون R حلقه ای متناهی است پس آرتینی است. بنابر قضیه ساختار حلقه های آرتینی ۱۶.۱.۱، $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$ که به ازای $i = 1, \cdots, k$، $(R_i, \mathfrak{M}_i)$ حلقه هایی موضعی و آرتینی هستند. هر $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ که عضوی از $R - Z(R)$ باشد، اگر حداقل به ازای یک $i = 1, \cdots, k$، $x_i \in \mathfrak{M}_i = Z(R_i)$ وجود داشته باشد. در آن صورت عضو ناصفری مانند $y_i \in R_i$ وجود دارد بطوریکه $x_i y_i = 0$. بنابراین*

$$(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_k)(0, \cdots, y_i, \cdots, 0) = (0, \cdots, 0).$$

این به معنی این است که $x \in Z(R)$ و تناقض است. پس به ازای هر $i = 1, 2, \cdots, k$، $x_i \notin \mathfrak{M}_i$. حال بنابر نتیجه ۱۵.۱.۱، $x_i \in U(R_i)$ و در نتیجه $x = (x_1, \cdots, x_k) \in U(R)$. □

تعریف ۱۸.۱.۱. R-مدول M را نوتری گوییم اگر در شرایط معادل زیر صدق کند:

۱) هرگاه$(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$خانواده ای از زیرمدول های M باشد و

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq \cdots$$

آنگاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $G_k = G_{k+i}$.

۲) هر مجموعه ناتهی از زیرمدول های M شامل عضو ماکسیمال نسبت به رابطه شمول باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. حلقه R را نوتری [4] گوییم اگر Rبه عنوان R- مدول، نوتری باشد.

[3] Jacobson radical

[4] Noetherian ring

مثال ۲۰.۱.۱. حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، نوتری است.

تعریف ۲۱.۱.۱. R-مدول M را آرتینی گوییم اگر در شرایط معادل زیر صدق کند:

۱) هرگاه$(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$خانواده ای از زیرمدول های M باشد و

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \cdots$$

آنگاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $G_k = G_{k+i}$.

۲) هر مجموعه ناتهی از زیرمدول های M شامل عضو مینیمال نسبت به رابطه شمول باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱. حلقه R را آرتینی [۵] گوییم اگر R به عنوان R-مدول، آرتینی باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید Rیک حلقه جابجایی باشد، مجموعه تمام ایدآل های اول Rرا طیف اول Rمی نامیم و با $Spec(R)$ نشان می دهیم.

قضیه و تعریف ۲۴.۱.۱. *فرض کنید Iایدآل سره حلقه جابجایی Rباشد. دراین صورت*

$$Var(I) := \{P \in Spec(R) : P \supseteq I\}$$

دست کم یک عضو مینیمال نسبت به رابطه مشمولیت دارد. عضو های مینیمال $Var(I)$ را ایدآل های اول مینیمال I یا ایدآل های اول مینیمال شامل Iمی نامیم. اگر R ناصفر باشد هر ایدآل اول مینیمال ایدآل صفر R را یک ایدآل اول مینیمال R می نامیم و مجموعه همه ایدآل های اول مینیمال R را با $Min(R)$ نشان می دهیم.

برهان: *قضیه ۵۲.۳ از مرجع [۱] را ببینید.* □

لم ۲۵.۱.۱. *فرض کنید Pایدآل اول حلقه جابجایی R و $I_1, \cdots, I_n$ ایدآل هایی از R باشند. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:*

یک) به ازای زای که $j = 1, \cdots, n$، $P \supseteq I_j$.

دو) $P \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

سه) $P \supseteq \prod_{i=1}^{n} I_i$.

برهان: *لم ۵۵.۳ از مرجع [۱] را ببینید.* □

گزاره ۲۶.۱.۱. *در هر حلقه آرتینی R هر ایدآل اول ماکسیمال است.*

برهان: *گزاره ۱.۸ از مرجع [۱۱] را ببینید.* □

لم ۲۷.۱.۱. *اگر R حلقه ای جابجایی و آرتینی باشد، آنگاه R تنها تعدادی متناهی ایدآل ماکسیمال دارد.*

برهان: *لم ۴۰.۸ از مرجع [۱] را ببینید.* □

[۵] Artinian ring

قضیه ۲۸.۱.۱. *هر حلقه جابجایی و آرتینی R، نوتری است.*

برهان: *قضیه ۴۴.۸ از مرجع [۱] را ببینید.* □

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید Qایدآلی از حلقه جابجایی R باشد. Q را ایدآل ابتدایی R می گوییم اگر

یک) $Q \subset R$، یعنی Qایدآل سره R باشد،

دو) اگر $a, b \in R$ و $ab \in Q$ ولی $a \notin Q$ آنگاه $n \in \mathbb{N}$وجود داشته باشد که $b^n \in Q$.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید I ایدآل سره ای از حلقه جابجایی R باشد. تجزیه ابتدایی I عبارت است از اشتراک تعدادی متناهی از ایدآل های ابتدایی R که برابر با Iباشد:

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به ازای هر } n, \cdots, 1 = i, \quad \sqrt{Q_i} = P_i$$

این تجزیه را **تجزیه ابتدایی مینیمال** Iمی گوییم اگر

یک) $P_1, \cdots, P_n$، n ایدآل اول متمایز Rباشند،

دو) به ازای هر $j = 1, \cdots, n$ داشته باشیم

$$Q_j \not\supseteq \bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} Q_i.$$

تعریف ۳۱.۱.۱. I ایدآل تجزیه پذیر حلقه جابجایی R است اگر تجزیه ای ابتدایی داشته باشد.

قضیه ۳۲.۱.۱. ***اولین قضیه یکتایی تجزیه ابتدایی.*** *فرض کنید I ایدآل تجزیه پذیری از حلقه جابجایی R باشد و تجزیه های*

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به ازای هر } n, \cdots, 1 = i, \quad \sqrt{Q_i} = P_i$$

و

$$I = Q'_1 \cap \cdots \cap Q'_n \text{ که به ازای هر } n', \cdots, 1 = i, \quad \sqrt{Q'_i} = P'_i$$

دو تجزیه ابتدایی مینیمال I باشند. در این صورت $n = n'$ و

$$\{P_1, \cdots, P_n\} = \{P'_1, \cdots, P'_n\}.$$

به عبارت دیگر تعداد جمله های یک تجزیه ابتدایی مینیمال I و همچنین مجموعه ایدآل های اولی که رادیکال های جمله های تجزیه اند از آن تجزیه ابتدایی مینیمال مفروض مستقل هستند.

برهان: *نتیجه ۱۸.۴ از مرجع [۱] را ببینید.* □

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید I ایدآل تجزیه پذیری از حلقه جابجایی R وتجزیه $I = Q_1 \cap \cdots Q_n$ که به ازای $i = 1, \cdots, n$ داریم $\sqrt{Q_i} = P_i$ یک تجزیه ابتدایی مینیمال I باشد. در این صورت $\{P_1, \cdots, P_n\}$ را مجموعه ایدآل های اول وابسته به I می نامند و با $ass(I)$ نشان می دهند. عناصر $ass(I)$ را ایدآل های اول وابسته به I می نامند.

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنید I ایدآلی سره از حلقه جابجایی و نوتری R باشد و $P \in Spec(R)$. در این صورت $P \in ass(I)$ اگر و تنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $(I : a) = P$، یعنی اگر و تنها اگر $\lambda \in \frac{R}{I}$ وجود داشته باشد بطوریکه $(\circ :_R \lambda) = Ann_R(\lambda) = P$.*

برهان: قضیه ۲۲.۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

گزاره ۳۵.۱.۱. ***تغییر حلقه:*** *فرض کنیم M مدولی روی حلقه جابجایی R باشد. همچنین I ایدآلی از R و $I \subseteq Ann(M)$. در این صورت نگاشت*

$$\begin{aligned} \varphi : \frac{R}{I} \times M &\to M \\ (r+I, m) &\mapsto rm \end{aligned}$$

گروه آبلی M را به یک $\frac{R}{I}$- مدول تبدیل می کند.

برهان: ۱۹.۶ از مرجع [۱] را ببینید. □

نتیجه ۳۶.۱.۱. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{M})$ حلقه موضعی باشد. آنگاه $Ann(\mathfrak{M})$ یک فضای برداری روی میدان $\frac{R}{\mathfrak{M}}$ است.*

قضیه ۳۷.۱.۱. *فرض کنیم M مدولی روی حلقه جابجایی R و I ایدآلی از R باشد. در این صورت $I \subseteq Ann(\frac{M}{IM})$ و $\frac{M}{IM}$ تحت عمل زیر $\frac{R}{I}$- مدول است.*

$$(r+I)(m+IM) = rm + IM \quad \text{به ازای هر } r \in R \text{ و } m \in M\text{،}$$

برهان: تمرین ۲۳.۶ از مرجع [۱] را ببینید. □

قضیه ۳۸.۱.۱. *فرض می کنیم R حلقه ای موضعی با ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{M}$ و میدان مانده ای $\frac{R}{\mathfrak{M}}$ باشد. فرض می کنیم G یک R- مدول متناهی مولد باشد. چون R- مدول $\frac{G}{\mathfrak{M}G}$ توسط ایدآل $\mathfrak{M}$ پوچ می شود بنابراین ساختاری طبیعی به عنوان مدول روی $\frac{R}{\mathfrak{M}}$، یعنی به عنوان $\frac{R}{\mathfrak{M}}$- فضا ی برداری دارد. فرض کنیم $g_\text{۱}, \cdots, g_n \in G$. در این صورت احکام زیر معادلند.*

الف) G توسط $g_\text{۱}, \cdots, g_n$ تولید می شود. ($\{g_\text{۱}, \cdots, g_n\}$ یک مجموعه مولد مینیمال برای G است).

ب) R- مدول $\frac{G}{\mathfrak{M}G}$ توسط $g_\text{۱}+\mathfrak{M}G, \cdots g_n+\mathfrak{M}G$ تولید می شود. ($\{g_\text{۱}+\mathfrak{M}G, \cdots g_n+\mathfrak{M}G\}$ یک مجموعه مولد مینیمال برای R- مدول $\frac{G}{\mathfrak{M}G}$ است).

ج) $\frac{R}{\mathfrak{M}}$- فضای $\frac{G}{\mathfrak{M}G}$ توسط $g_\text{۱} + \mathfrak{M}G, \cdots g_n + \mathfrak{M}G$ تولید می شود. ($\{g_\text{۱} + \mathfrak{M}G, \cdots g_n + \mathfrak{M}G\}$ یک پایه برای $\frac{R}{\mathfrak{M}}$- فضای برداری $\frac{G}{\mathfrak{M}G}$ است).

برهان: قضیه ۳.۹ از مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۳۹.۱.۱. **(لم ناکایاما)**:*فرض کنید M یک R-مدول متناهی مولد و I ایدآلی از R باشد بطوریکه $I \subseteq J(R)$. در این صورت $IM = M$ ایجاب می کند $M = 0$.*

برهان: لم ۲۴.۸ از مرجع [۱] را ببینید. □

نتیجه ۴۰.۱.۱. **(نتیجه لم ناکایاما)**: *فرض کنید M یک R-مدول متناهی مولد و I ایدآلی از R باشد بطوریکه $I \subseteq J(R)$. همچنین فرض کنید N زیر مدول M بگونه ای باشد که $IM + N = M$ در این صورت $M = N$.*

برهان: ۲.۹ از مرجع [۱] را ببینید. □

نمادگذاری ۴۱.۱.۱. *بعد فضای برداری V روی میدان F را با نماد $v.dim_F V$ نشان می دهیم.*

قضیه ۴۲.۱.۱. *فرض کنید $V \neq 0$ یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. در این صورت داریم*

$$|V| = |F|^{v.dim_F V}.$$

برهان: مرجع [۳] را ببینید. □

قضیه ۴۳.۱.۱. *اگر V_1 و V_2 زیرفضا های یک فضای برداری مانند V روی میدان F باشند، آنگاه $(V_1 \cap V_2)$ و $(V_1 + V_2)$ نیز فضای برداری روی میدان F هستند و روابط زیر برقرارند.*

$$\frac{V_1 + V_2}{V_2} \cong \frac{V_1}{V_1 \cap V_2},$$
$$v.dim_F(V_1 + V_2) - v.dim_F V_2 = v.dim_F V_1 - v.dim_F(V_1 \cap V_2).$$

برهان: مرجع [۳] را ببینید. □

تعریف ۴۴.۱.۱. حلقه موضعی نوتری $(R, \mathfrak{M})$ را یک حلقه گرنشتاین [۶] گوییم هرگاه

$$v.dim_{\frac{R}{\mathfrak{M}}}(Ann(\mathfrak{M})) = 1.$$

نمادگذاری ۴۵.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و J ایدالی از R باشد. دراین صورت:*

$$\mathbb{I}(J) = \{I \trianglelefteq R : I \subseteq J\}.$$

تعریف ۴۶.۱.۱. هر حلقه ایدآل اصلی که آرتینی و موضعی باشد، یک حلقه ی ایدآل اصلی خاص نامیده می شود.

لم زیر نشان می دهد که هرحلقه ایدآل اصلی خاص ساختار ایدآلی بسیار ساده ای دارد.

[۶] Gorenstein ring

لم ۴۷.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{M})$ یک حلقه ایدآل اصلی خاص باشد. در این صورت R تنها تعداد متناهی ایدآل دارد که هر کدام توانی از ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{M}$ هستند.*

برهان: *فرض کنید $(R, \mathfrak{M})$ حلقه ایدآل اصلی، موضعی و آرتینی باشد. $p \in \mathfrak{M}$ وجود دارد که $\mathfrak{M} = Rp$. همچنین به ازای هر ایدآل ناصفر و سره I از R عضو x از I وجود دارد بطوریکه $I = (x) = Rx$.*

اگر $x \notin \mathfrak{M}$ در این صورت $x \in U(R)$ در نتیجه $I = (x) = Rx = R$ که تناقض است. یعنی $x \in \mathfrak{M} = Rp$ که از این رو عنصری مانند $r \in R$ وجود دارد که $x = rp$. اکنون اگر $r \in \mathfrak{M} = Rp$، آنگاه عضوی مانند $r_1 \in R$ وجود دارد که $r = r_1p$ و با ادامه این روند

$$x = rp = r_1p^2 = \cdots = up^k,$$

k بزرگترین عدد طبیعی است که $p^k|x$ و p^{k+1} عضو $x = up^k$ عاد نمی کند در نتیجه $u \in U(R)$. از این رو

$$I = Rx = Rup^k = Rp^k = (p^k) = (p)^k = \mathfrak{M}^k.$$

این بدان معنی است که هر ایدآل نابدیهی R توانی از ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{M}$ است.

چون $(R, \mathfrak{M})$ حلقه آرتینی و موضعی است. زنجیره $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{M}^2 \supseteq \cdots$ ایستاست و عددی طبیعی مانند t وجود دارد که $\mathfrak{M}^t = (0)$. در این صورت $\mathbb{I}(R) = \{R, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}^2, \cdots, \mathfrak{M}^{t-1}, (0)\}$. یعنی هر حلقه با ویژگی های بالا تعداد متناهی ایدآل دارد. □

لم ۴۸.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{M})$ حلقه ای آرتینی و موضعی باشد. اگر ایدآل اصلی ناصفر J به گونه ای باشد که برای عددی طبیعی مانند n داشته باشیم $J \in \mathbb{I}(\mathfrak{M}^n) - \mathbb{I}(\mathfrak{M}^{n+1})$، آنگاه*

$$\mathbb{I}(J) = \mathbb{I}(J \cap \mathfrak{M}^{n+1}) \cup \{J\}.$$

برهان: *چون $J \in \mathbb{I}(\mathfrak{M}^n) - \mathbb{I}(\mathfrak{M}^{n+1})$ یک ایدآل اصلی ناصفر است، بنابراین عنصری ناصفر مانند $x \in \mathfrak{M}^n - \mathfrak{M}^{n+1}$ وجود دارد که $J = Rx$. بوضوح داریم*

$$\mathbb{I}(J \cap \mathfrak{M}^{n+1}) \cup \{J\} \subseteq \mathbb{I}(J).$$

برای اثبات طرف دیگر این شمول ایدآل دلخواه $K \in \mathbb{I}(J) - \{J\}$ را در نظر می گیریم. در این صورت برای هر عضو ناصفر و دلخواه $y \in K$، چون $K \subsetneqq J = Rx$، عنصری مانند $r \in R$ وجود دارد که $y = rx$. حال ادعا می کنیم که $r \in \mathfrak{M}$ زیرا در غیر این صورت r وارون پذیر بوده و داریم $x = r^{-1}y \in K$. یعنی $J = Rx = K$ که تناقض است. از این رو $r \in \mathfrak{M}$ و از طرفی چون $x \in J \subseteq \mathfrak{M}^n$، داریم $y = rx \in \mathfrak{M}^{n+1}$. یعنی $K \subseteq \mathfrak{M}^{n+1}$ همچنین داشتیم $K \subseteq J$. بنابراین $K \in \mathbb{I}(J \cap \mathfrak{M}^{n+1})$. از این رو تساوی

$$\mathbb{I}(J \cap \mathfrak{M}^{n+1}) \cup \{J\} = \mathbb{I}(J).$$

نتیجه می شود. □

لم ۴۹.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{M})$ یک حلقه آرتینی موضعی و I یک ایدآل اصلی از R به گونه ای باشد که $|\mathbb{I}(I)| = ۳$. در این صورت $\mathfrak{M}^۲ \subseteq Ann(I)$.*

برهان: *به کمک قضیه اول یکریختی داریم $I = Rx \cong \dfrac{R}{Ann(x)}$. حال از فرض $|\mathbb{I}(I)| = ۳$ نتیجه می شود که $I = Rx$ دقیقا شامل یک ایدآل نابدیهی است. بنابراین $\dfrac{R}{Ann(x)}$ نیز فقط شامل یک ایدآل نابدیهی است که همان $\dfrac{\mathfrak{M}}{Ann(x)}$ است.*

به برهان خلف اگر $\mathfrak{M}^۲ \nsubseteq Ann(I)$ در این صورت $\mathfrak{M}^۲ + Ann(x) = \mathfrak{M}$ و بنا به نتیجه لم ناکایاما داریم $\mathfrak{M} = Ann(x)$ که تناقض است. بنابراین $\mathfrak{M}^۲ \subseteq Ann(x) = Ann(I)$. □

لم ۵۰.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{M})$ یک حلقه آرتینی موضعی و عدد طبیعی t به گونه ای باشد که $\mathfrak{M}^t = (۰)$ و $\mathfrak{M}^{t-۱} \neq (۰)$. اگر $K = \dfrac{R}{\mathfrak{M}}$، میدان مانده ای آن باشد، آنگاه گزاره های زیر هم ارزند.*

(۱) *R یک حلقه ایدآل اصلی است؛*

(۲) *$\mathfrak{M}$ یک ایدآل اصلی است؛*

(۳) *تنها ایدآل های R عبارتند از $R, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}^۲, \cdots, \mathfrak{M}^{t-۱}, \mathfrak{M}^t = (۰)$؛*

(۴) *یا $\mathfrak{M} = (۰)$ و یا $dim_K(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^۲}) = ۱$؛*

(۵) *یا $\mathfrak{M} = (۰)$ یا برای هر $i \in \{۱, ۲, \cdots, t-۱\}$ داریم $dim_K(\dfrac{\mathfrak{M}^i}{\mathfrak{M}^{i+۱}}) = ۱$.*

برهان: *(۴) ⇐ (۲) ⇐ (۱) بدیهی است.*

(۱) ⇐ (۴) اگر $\mathfrak{M} = (۰)$ در این صورت R یک میدان است و چیزی برای اثبات باقی نمی ماند. بنابراین فرض می کنیم $dim_K(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^۲}) = ۱$. بنابراین $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^۲}$ پایه ای تک عنصری مانند $\{x + \mathfrak{M}^۲\}$ دارد که در آن $x \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^۲$. در این صورت $\mathfrak{M} = Rx$ ایدآل اصلی است. حال ایدآل نابدیهی I از R را در نظر بگیرید. چون $\mathfrak{M}^t = (۰)$، بنابراین عددی طبیعی مانند $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $I \subseteq \mathfrak{M}^k$ و $I \nsubseteq \mathfrak{M}^{k+۱}$. از این رو عضوی مانند $y \in I$ وجود دارد که $y \notin \mathfrak{M}^{k+۱}$. از طرفی چون $y \in I \subseteq \mathfrak{M}^k = Rx^k$، بنابراین

$$\exists r \in R: \quad y = rx^k.$$

اگر $r \in \mathfrak{M}$ آنگاه $y = rx^k \in \mathfrak{M}^{k+۱}$ که تناقض است. بنابراین $r \notin \mathfrak{M}$، یعنی r وارون پذیر است. از این رو داریم

$$x^k = r^{-۱}y \in I \Rightarrow I = Rx^k = \mathfrak{M}^k.$$

یعنی هر ایدآل I از R اصلی است.

(۳) $\Rightarrow$ (۴) اثبات (۱) $\Rightarrow$ (۴) نشان داد که هر ایدآل سره R به صورت توانی از $\mathfrak{M}$ است و بنابراین چیزی برای اثبات باقی می ماند.

(۴) $\Rightarrow$ (۵) واضح است.

(۵) $\Rightarrow$ (۳) اگر تنها ایدآل های سره R همان توان های $\mathfrak{M}^i$ باشند که $\{۱,۲,\cdots,t\}$ $i \in$، در این صورت هیچ ایدآلی بطور سره بین $\mathfrak{M}^i$ و $\mathfrak{M}^{i+۱}$ وجود ندارد و بنابراین باید داشته باشیم $dim_K(\frac{\mathfrak{M}^i}{\mathfrak{M}^{i+۱}}) = ۱$. $\square$

تذکر ۵۱.۱.۱. *اگر V فضایی برداری روی میدان نامتناهی F باشد، V را نمی توان بصورت اجتماع تعداد متناهی زیر فضای سره نوشت.*

برهان: *فرض کنید $M_۱, M_۲, \cdots\cdots, M_n$ زیر فضاهای سره ای از V باشند که هیچ یک از آنها مشمول در اجتماعی از بقیه نباشد و $V = \cup_{i=۱}^n M_i$. (اگر یکی از آنها مشمول در اجتماع بقیه باشد، آن را حذف می کنیم و توجه داریم که تنها اثر حذف کردن کاهش پیدا کردن عدد n به $n-۱$ است.)*

چون $M_۱ \nsubseteq \cup_{i=۲}^n M_i$ برداری مانند $x_۱ \in M_۱$ وجود دارد بطوریکه برای هر $j \neq ۱$ داریم $x_۱ \notin M_j$ و به دلیل اینکه $M_۱$ زیر فضایی سره است، یک بردار $x_۰ \in V - M_۱$ وجود دارد. مجموعه L را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$L = \{x_۰ + \alpha x_۱ | \alpha \in F\}.$$

چون $x_۰ \notin M_۱$ پس برای هر $\alpha \in F$ داریم $(x_۰ + \alpha x_۱) \notin M_۱$ درنتیجه $L \cap M_۱ = \emptyset$.

به ازای $j \neq ۱$ مجموعه های $L \cap M_j$ نمی توانند شامل بیش از یک بردار باشند. زیرا اگر $\alpha \neq \beta$ و $x_۰ + \alpha x_۱ \in M_j$ و $x_۰ + \beta x_۱ \in M_j$ آنگاه $(\alpha - \beta) x_۱ \in M_j$ در نتیجه $(\alpha-\beta)^{-۱}(\alpha-\beta)x_۱ \in M_j$ و در این صورت $x_۱ \in M_j$ که تناقض است.

بنابر مطالب فوق تعداد عناصر $L \cap (M_۱ \cup M_۲ \cdots \cup M_n)$ کمتر از n است. چون $x_۰, x_۱ \in V$ به ازای هر $\alpha \in F$ داریم $x_۰ + \alpha x_۱ \in V$ در نتیجه $L \subseteq V$ پس $L \cap V$ بیشمار عضو دارد. یعنی $V \neq \cup_{i=۱}^n M_i$. $\square$

تعریف ۵۲.۱.۱. فرض کنید M یک مدول روی حلقه جابجایی R باشد. عنصر غیر یکه $x \in R$ را یک عنصر M-منظم [۷] گوییم هرگاه برای هر $y \in M$ از تساوی $xy = ۰$ نتیجه شود که $y = ۰$. (یعنی x یک مقسوم علیه صفر روی M نباشد.)

تعریف ۵۳.۱.۱. دنباله $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ از عناصر R را یک دنباله M-منظم (یا به طور خلاصه یک M-دنباله) گوییم هر گاه $x_۱$ یک عنصر M-منظم بوده و برای هر $i = ۲, \cdots, n$، x_i یک عنصر

[۷] M-regular