بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

توسیع‌های خطی- حقیقی طولپاهای بین گروه‌های اعضای وارون‌پذیر جبرهای باناخ

دانشجو:

فاطمه امین ناجی

استاد راهنما:

دکتر فرشته سعدی

بهمن ۱۳۹۳

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم فاطمه امین ناجی دانشجوی رشته: ریاضی محض به شماره دانشجویی ۹۱۵۲۳۱۱۰۰۵ تحت عنوان: « توسیع های خطی – حقیقی طولپاهای بین گروه های اعضای وارون پذیر جبر های باناخ » را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکترفرشته سعدی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکترسید مسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکترخسرو تاج بخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکترحکیمه ماهیار	استاد	۹۲/۱۱/۲۳
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاج بخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی- پژوهشی دانشگاه است، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض** است که در سال **۱۳۹۳** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم دکتر **فرشته سعدی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یك درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰% بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهاي خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضايي مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده براي فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **فاطمه امین ناجی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: **فاطمه امین ناجی**

تاریخ و امضا:

امین ناجی

۹۳/۱۲/۱۲

آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسان‌ها که لازمه شکوفایی علمی و فني است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضاي هيأت علمی، دانشجويان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهش‌های علمی که تحت عناوين پایان‌نامه، رساله و طرح‌های تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱: حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمي و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، يكي از اساتيد راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولي مسئوليت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو مي‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌هاي ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامي طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می‌باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یك تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **فاطمه امین ناجی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** ورودی سال تحصیلی **۹۳** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می‌شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا:
تاریخ:

امین ناجی
۹۳/۱۲/۱۲

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

توسیع‌های خطی- حقیقی طولپاهای بین گروه‌های اعضای وارون‌پذیر جبرهای باناخ

دانشجو:

فاطمه امین ناجی

استاد راهنما:

دکتر فرشته سعدی

بهمن ۱۳۹۳

تقدیم به

نگاه نگران پدران و مادران

و تقدیم به پدرم...

و مادرم...

به پاس چشم به راه بودنشان...

و محبتهای بی دریغشان...

که اگر نبودند، هیچ بودم!

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه ناب اساتیدی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید.

از استاد باکمالات و شایسته؛ سرکار خانم دکتر سعدی که همواره آسمان صبر و دشت علم ایشان فرا راه تلاشم بوده است و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛ از استادان سرکار خانم دکتر راهیار، جناب آقای دکتر امینی و جناب آقای دکتر تاجبخش که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر دارم.

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگی ام مصداق بی ریای سخاوت بوده است.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا تعمیمی از قضیه مازور-اولام برای طولپاهای بین زیرمجموعه‌های باز فضاهای متریک خاصی (شامل فضاهای نرمدار) بیان می‌شود. سپس ثابت می‌شود یک طولپا بین زیرگروه‌های باز گروه اعضای وارون‌پذیر جبرهای باناخ واحددار B, A با یک انتقال به یک طولپای خطی حقیقی بین B, A گسترش می‌یابد. همچنین شرایطی برای جبرهای باناخ ارائه می‌شود که تحت آن گسترش خطی حقیقی مذکور، مضربی از یک یکریختی جبری شود. به خصوص دیده می‌شود گروه اعضای وارون‌پذیر B, A به عنوان فضاهای متریک به طور طولپا یکریخت هستند اگر و فقط اگر به عنوان گروه‌های متریک به طور طولپا یکریخت باشند و این نیز معادل است با اینکه B, A به عنوان جبرهای باناخ حقیقی به طور طولپا یکریخت باشند. صورت کلی طولپاهای پوشا بین زیرگروه‌های باز گروه اعضای وارون‌پذیر جبرهای عملگری بسته واحددار روی فضاهای باناخ نیز مشخص می‌شود. مرجع‌های اصلی این پایان نامه [۸]، [۷] می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: *جبر باناخ، طولپا، گروه اعضای وارون‌پذیر، قضیه مازور-اولام، یکریختی جبری، مؤلفه اصلی.*

فهرست

پیشگفتار

بررسی تاثیر ساختارهای مختلف روی یک فضای داده شده، سوال مهمی است که موضوع بسیاری از کارهای تحقیقاتی است. به عنوان نمونه آیا برای اینکه دو فضای نرمدار ساختار متریک یکسانی داشته باشند بایستی ساختار خطی یکسانی داشته باشند؟ یک روش برای نزدیک شدن به چنین مسائلی تجزیه و تحلیل نگاشت‌های خاصی بین این فضاها است که ساختار متریک را حفظ کنند و تعیین اینکه آیا چنین نگاشت‌هایی ساختار خطی را نیز حفظ می‌کنند؟

بنا به قضیه معروف مازور-اولام [۱] دو فضای نرمدار با ساختار متریک یکسان دارای ساختار خطی حقیقی یکسانی هستند. به عبارت دقیق‌تر، هر نگاشت پوشای $T : E \longrightarrow F$ بین دو فضای نرمدار حقیقی E, F که طولپا باشد، یعنی $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ برای هر $x, y \in E$، و $T(0) = 0$ یک نگاشت خطی حقیقی است. یک چنین نتیجه‌ای برای فضاهای برداری مختلط صادق نیست زیرا به عنوان مثال نگاشت $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ یک طولپای پوشا روی $\mathbb{C}$ است که خطی مختلط نیست.

زمانی که فضاهای مورد نظر ساختارهای بیشتری از فضای نرمدار مانند ساختار جبری داشته باشند، سوالات دیگری در رابطه با ارتباط آن‌ها با یکدیگر مطرح می‌شود. بنا به قضیه کلاسیک باناخ-استون برای فضای هاسدورف فشرده Y, X هر طولپای خطی پوشا $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ به صورت عملگر ترکیبی وزن‌داری به شکل

$$Tf(y) = h(y)(f(\phi(y))) \qquad (f \in C(X), y \in Y)$$

است که $h : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعی پیوسته با قدر مطلق یک و $\phi : Y \longrightarrow X$ یک همسانریختی است یعنی T مضرب (تابعی) از یک یکریختی جبری است. به خصوص در حالتی که $T(1) = 1$،

[۱] Mazur-Ulam

T یک یکریختی جبری است. این قضیه در [۱۹] برای حالت کلی به طولپاهای خطی پوشا بین جبرهای یکنواخت نیز تعمیم داده شده است.

برای جبر های باناخ واحددار B, A به سادگی می‌توان دید هر یکریختی جبری $T : A \longrightarrow B$ یک همسانریختی بین اعضای وارون‌پذیر B, A، که یک گروه ضربی تشکیل می‌دهند، القا می‌کند. اما به هر حال جبرهای باناخ واحددار B, A ای وجود دارند که یکریخت جبری نیستند ولی گروه اعضای وارون‌پذیر آن‌ها همسانریختی دارند. در [۱۴] مولنار [۱] به بررسی ساختار طولپاهای بین عملگرهای مثبت وارون‌پذیر روی فضاهای هیلبرت، نسبت به متریک خاصی به نام متریک تامسون [۲] پرداخت.

در این پایان‌نامه که مرجع‌های اصلی آن [۸] و [۷] هستند به بررسی خواص جبری طولپاهای بین گروه اعضای وارون‌پذیر جبرهای باناخ واحددار نسبت به متریک حاصل از نرم و همچنین مسئله گسترش آن‌ها به طولپاهای خطی حقیقی می‌پردازیم. این پایان نامه شامل سه فصل می‌باشد.

درفصل اول مقدمات و پیش نیازهای لازم از آنالیز تابعی و جبرهای باناخ ارائه می‌شود.

در فصل دوم ابتدا تعمیمی از قضیه مازور-اولام برای طولپاهای بین زیر مجموعه‌های باز $U_۲, U_۱$ از فضای نرمدار $B_۱$ و فضای متریک خطی حقیقی $B_۲$ ارائه می‌شود. سپس نشان می‌دهیم هر طولپای پوشای T بین زیرگروه‌های بازی از اعضای وارون‌پذیر جبرهای باناخ واحددار B, A، به یک طولپای خطی حقیقی (با یک انتقال) $\widetilde{T}_۰$ از A به روی B گسترش می‌یابد.

در فصل سوم ثابت می‌شود جبر باناخ مختلط واحددار A به طور طولپا یکریخت با یک جبر باناخ مختلط واحددار B است (به عنوان جبر های باناخ حقیقی) اگر و تنها اگر گروه اعضای وارون‌پذیر B, A به عنوان گروه‌های مترپذیر یکریخت باشند و به طور معادل مؤلفه‌های اصلی گروه اعضای وارون‌پذیر B, A به عنوان گروه‌های مترپذیر به طور طولپا یکریخت باشند. همچنین ضربی بودن نگاشت خطی گسترش یافته معرفی شده در فصل دوم بررسی می‌شود. در [۱۲] حالتی که A یک جبر یکنواخت باشد نگاشت گسترش یافته $\widetilde{T}_۰$ از طولپای T، ضربی است هرگاه T یکال باشد و $T(ia) = iT(a)$ برای هر عضو a در دامنه تعریف T، که تعمیمی از قضیه باناخ-استون است.

---
[۱] Molnar
[۲] Thompson

از طرف دیگر یک طولپای یکال روی یک جبر باناخ جابجایی نیم‌ساده واحددار لزوماً ضربی نیست حتی اگر پوشا و خطی مختلط باشد. یعنی قضیه باناخ-استون برای حالت کلی جبرهای باناخ جابجایی نیم‌ساده واحددار برقرار نیست. اما نشان داده می‌شود اگر T یک طولپای پوشا بین زیر گروه‌های باز اعضای وارون‌پذیر جبرهای باناخ واحددار B, A باشد آن‌گاه $(T(e_A))^{-۱}T$ به یک یکریختی جبری حقیقی طولپا از A به روی B گسترش می‌یابد مشروط بر آنکه A جابجایی و A یا B نیم‌ساده باشند. در حالتی که B, A جبرهای عملگری استاندارد باشند نیز صورت کلی طولپاهای پوشا بین زیرگروه‌های باز اعضای وارون‌پذیر B, A ارائه خواهد شد.

فصل ۱
مقدمات و پیش نیازها

۱.۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

در این بخش تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. فضای توپولوژیک X موضعاً فشرده نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه از آن دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فضای باناخ، یک فضای نرمدار است که با متر القا شده از نرم کامل باشد، یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

به عنوان مثال فرض کنیم K یک فضای هاسدورف فشرده و $C(K)$ مجموعه توابع پیوسته مختلط مقدار روی K باشد. بدیهی است $C(K)$ با اعمال معمولی جمع و ضرب اسکالر توابع، فضای برداری است. برای هر $f \in C(K)$ تعریف می‌کنیم $\|f\|_K = \sup_{x\in K}|f(x)|$ به آسانی می‌توان دید $(C(K), \|\cdot\|_K)$ یک فضای باناخ است.
فرض کنیم (Ω, τ) یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد، $C_\circ(\Omega)$ فضای توابع پیوسته مختلط مقدار روی Ω است که در بی نهایت صفر می‌شوند به این معنی که برای هر $\epsilon > \circ$، زیر مجموعه فشرده ای مانند K از Ω موجود است به طوری که $|f(x)| < \epsilon$ برای هر $x \in \Omega \setminus K$.
در این صورت $C_\circ(\Omega)$ نیز با نرم سوپرمم $\|.\|_\Omega$ یک فضای باناخ است. بعلاوه $\Omega_\infty = \Omega \cup \{\infty\}$ نمایانگر فشرده شده تک نقطه‌ای Ω است که توپولوژی τ_∞ روی آن به این ترتیب تعریف می‌شود.

مجموعه $U \subseteq \Omega_\infty$ باز است اگر و فقط اگر $U \subseteq \Omega$ باز باشد یا مجموعه فشرده F در Ω وجود داشته باشد به طوری که $U = (\Omega \setminus F) \cup \{\infty\} = \Omega_\infty \setminus F$. ابتدا توجه می‌کنیم هر عضو $f \in C_\circ(\Omega)$ را می‌توان عضوی از $C(\Omega_\infty)$ دانست کافی است تعریف کنیم $f(\infty) = \circ$. با توجه به نحوه تعریف τ_∞ به راحتی دیده می‌شود f روی Ω_∞ پیوسته است و بعلاوه

$$C_\circ(\Omega) = \{f \in C(\Omega_\infty) : f(\infty) = \circ\}$$

پس $C(\Omega_\infty) = C_\circ(\Omega) \oplus \mathbb{C}$.

قضیه ۳.۱.۱. [6, Theorem 5.1] فضای نرمدار X یک فضای باناخ است اگر و فقط اگر هر سری همگرای مطلق در X همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم T یک عملگر خطی بین دو فضای نرمدار X, Y باشد. نرم T که نرم عملگری نامیده می‌شود با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = ۱\}$$

اگر $\|T\|$ متناهی باشد آن‌گاه T یک عملگر کراندار نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. نگاشت T بین دو فضای متریک (A, d) و (B, d') یک طولپا است هرگاه برای هر $a, b \in A$، $d'(T(a), T(b)) = d(a, b)$

قضیه ۶.۱.۱. (قضیه مازور-اولام)[20] هر طولپای پوشا بین فضاهای نرمدار حقیقی، با یک انتقال خطی حقیقی است .

قضیه ۷.۱.۱. (قضیه باناخ-استون)[3, Theorem 4.1.19] فرض کنیم X و Y دو فضای هاسدورف فشرده باشند و $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ یک طولپای خطی پوشا باشد در این صورت تابعی مانند h در $C(Y)$ وجود دارد به طوری که برای هر $y \in Y$ داریم $|h(y)| = ۱$ و همسانریختی پوشایی مانند ϕ از Y به X موجود است به طوری که

$$(Tf)(y) = h(y).f(\phi(y)) \qquad (y \in Y, f \in C(X))$$

قضیه ۸.۱.۱. [1, Theorem 5.28.7] مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم که یک فضای برداری نرمدار است. بعلاوه اگر Y یک فضای باناخ باشد، $B(X,Y)$ همراه نرم عملگری، فضای باناخ است. به خصوص هرگاه $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ باشد، $B(X)=B(X,X)$ یک فضای باناخ است.

برای فضای نرمدار X، فضای باناخ $B(X,\mathbb{C})$ دوگان X نام دارد و با X^* نمایش داده می‌شود. اعضای X^* را تابعک‌های خطی پیوسته بر X می‌نامند. همچنین $X^{**}=B(X^*,\mathbb{C})$ دوگان دوم X نامیده می‌شود.

قضیه ۹.۱.۱. (قضیه نگاشت باز)[1, Theorm 5.28.13] فرض کنیم Y,X دو فضای باناخ و $T:X\longrightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. اگر T پوشا باشد آن‌گاه T یک نگاشت باز است. (و در نتیجه اگر T یک به یک نیز باشد آن‌گاه T یک همسانریختی است).

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. عملگر خطی $T:X\longrightarrow X$ با رتبه متناهی نامیده می‌شود هرگاه $\dim T(X)<\infty$.

در فضای نرمدار $(X,\|\cdot\|)$ برای $x\in X$، تابعک خطی $\hat{x}$ روی X^* با ضابطه $\hat{x}(x^*)=x^*(x)$، $x^*\in X^*$، تعریف می‌شود. به وضوح $\hat{x}\in X^{**}$.

قضیه ۱۱.۱.۱. [1, Theorem 5.29.6] نگاشت $x\mapsto\hat{x}$ از فضای نرمدار X به توی X^{**} یک طولپای خطی است (و در نتیجه X را می‌توان یک زیرفضای X^{**} درنظرگرفت).

فضای باناخ X را انعکاسی نامیم هرگاه نشانننده طبیعی $X\longrightarrow X^{**}$ پوشا باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱. [18, Theorem 4.10] فرض کنیم Y,X فضاهای نرمدار باشند و $T\in B(X,Y)$. در این صورت $T^*\in B(Y^*,X^*)$ به طور یکتا وجود دارد به طوری که

$$\prec x,T^*y^*\succ=\prec Tx,y^*\succ \qquad (x\in X, y^*\in Y^*)$$

بعلاوه $\|T\|=\|T^*\|$.

عملگر T^* وابسته به T را عملگر الحاقی T نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۳. اگر H یک فضای ضرب درونی باشد که تحت نرم حاصل از ضرب درونی‌اش یعنی $\|x\|^{۲} = (\prec x, x \succ)^{\frac{۱}{۲}}$، $x \in H$، کامل باشد، آن را فضای هیلبرت نامیم.

قضیه ۱.۱.۱۴. [17, Proposition 10.8.28] فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد و $f \in H^*$. در این صورت $y \in H$ به طور یکتا وجود دارد به طوری که برای هر $x \in H$، $f(x) = \prec x, y \succ$.

با توجه به اینکه عکس قضیه بالا نیز به وضوح برقرار است، پس برای فضای هیلبرت H، $H \cong H^*$ تحت یک نگاشت مزدوج خطی طولپا است.

تعریف ۱.۱.۱۵. فضای توپولوژیک X را همبند نامیم اگر نتوان آن را به صورت اجتماع دو زیر مجموعه ناتهی، باز و از هم جدا نوشت.

قضیه ۱.۱.۱۶. [15, Theorem 3.23.3] در فضای توپولوژیک X فرض کنیم $(A_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای همبند باشد به طوری که $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ در این صورت مجموعه $A = \cup_{i \in I} A_i$ همبند است.

در فضای متریک (X, d) رابطه $x \sim y$ هرگاه حداقل یک زیرمجموعه همبند شامل x, y وجود داشته باشد، یک رابطه هم ارزی روی X است و هر رده هم ارزی، یک مجموعه همبند ماکسیمال در X است.
هر یک از رده‌های هم ارزی وابسته به رابطه هم ارزی فوق، را یک مؤلفه همبندی فضای متریک (X, d) نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$. در این صورت خانواده $\mathfrak{B}$ از همسایگی‌های x را یک پایه موضعی در نقطه x نامیم هرگاه برای هر همسایگی W از x، $U \in \mathfrak{B}$ وجود داشته باشد که $U \subseteq W$.

تعریف ۱.۱.۱۸. اگر X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط و (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت X یک فضای برداری توپولوژیک است هرگاه دو شرط زیر را

داشته باشد:

i. برای هر $x \in X$، $\{x\}$ بسته باشد.

ii. نگاشت‌های $X \times X \longrightarrow X$، $x + y \longmapsto (x, y)$ و $\mathbb{C} \times X \longrightarrow X$، $\alpha x \longmapsto (\alpha, x)$، پیوسته باشند.

فضای برداری توپولوژیک X را موضعاً محدب نامیم هرگاه X پایه موضعی داشته باشد که تمام اعضای آن محدب باشند.
اگر $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع بر روی X باشد. گوییم $\mathcal{F}$ نقاط X را جدا می‌کند اگر برای هر $x, y \in X$، $x \neq y$ تابع $f \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \neq f(y)$.
اگر $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع $f : X \longrightarrow Y_f$ باشد که هر Y_f یک فضای توپولوژیک است منظور از $\mathcal{F}$ -توپولوژی روی X ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که اعضای $\mathcal{F}$ را پیوسته می‌سازد.
برای فضای برداری توپولوژیک X، مجموعه تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X را با X^* نمایش می‌دهیم که به وضوح یک فضای برداری است.

قضیه ۱۹.۱.۱. [18, Theorem 3.10] فرض کنیم X یک فضای برداری و X' یک فضای برداری از تابعک‌های خطی روی X باشد که نقاط X را جدا می‌کند. آن‌گاه X' -توپولوژی X، X را تبدیل به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب می‌کند. اگر این توپولوژی را با τ' نمایش دهیم $(X, \tau')^* = X'$.

فرض کنیم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد به طوری که X^* نقاط X را جدا می‌کند. در این صورت طبق قضیه قبل، X^* -توپولوژی X (که آن را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم و با τ_w نمایش می‌دهیم)، X را تبدیل به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب می‌کند و بعلاوه $(X, \tau_w)^* = X^*$. بدیهی است اگر $x \in X$ و $\{x_\alpha\}$ توری در X باشد آن‌گاه $x_\alpha \to x$ در توپولوژی ضعیف اگر و فقط اگر برای هر $x^* \in X^*$، $x^*(x_\alpha) \to x^*(x)$.
فرض کنیم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد. هر عضو $x \in X$ را می‌توان یک تابعک خطی روی X^* دانست و بنا بر قضیه بالا X -توپولوژی X^*، X^* را تبدیل به یک فضای

برداری توپولوژیک موضعاً محدب می‌کند. این توپولوژی را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* نامیم و با τ_{w^*} نمایش می‌دهیم. بعلاوه $(X^*, \tau_{w^*})^* = X$، همچنین اگر $x^* \in X^*$ و $\{x^*_\alpha\}$ توری در X^* باشد آن‌گاه $x^*_\alpha \to x^*$ در توپولوژی ضعیف ستاره اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $x^*_\alpha(x) \to x^*(x)$.

۲.۱ مقدماتی از جبر باناخ

در این بخش تعاریف و قضایایی از جبرهای باناخ که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد و نگاشت $A \times A \longrightarrow A$، $(a,b) \longrightarrow ab$، برای هر $a, b, c \in A$ وهر $\alpha \in \mathbb{C}$ با خصوصیات زیر باشد:

i. $a(bc) = (ab)c$

ii. $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$

iii. $a(b+c) = ab + ac\ ,\ (a+b)c = ac + bc$

در این صورت A یک جبر مختلط نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم A یک جبر و $\|\cdot\|$ یک نرم روی A باشد به طوری که برای هر $a, b \in A$، $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$. در این صورت $\|\cdot\|$ را یک نرم جبری و $(A, \|\cdot\|)$ را یک جبر نرمدار نامیم. جبر باناخ مختلط، یک جبر نرمدار مختلط است که تحت نرم جبری‌اش کامل باشد.

جبر A جابجایی است اگر برای هر $a, b \in A$، $ab = ba$ و واحد دار است اگر عضوی از A مانند e وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in A$، $ae = ea = a$. حال فرض کنیم A یک جبر واحددار باشد، در این صورت $a \in A$ وارون‌پذیر است اگر $b \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $ab = ba = e$.

مجموعه اعضای وارون‌پذیر A را با A^{-1} نمایش می‌دهیم. توجه می‌کنیم اگر A یک جبر باناخ

باشد، A^{-1} با عمل ضرب A یک گروه است.

عضو واحد جبر A را با e_A نمایش می‌دهیم.

در حالتی که A یک جبرباناخ واحددار باشد با جایگزینی یک نرم هم ارز می‌توان فرض کرد $\|e_A\| = 1$.

در سراسر این پایان‌نامه منظور از جبر باناخ واحددار A، جبر باناخی با واحد e_A است به طوری که $\|e_A\| = 1$.

برای فضای فشرده و هاسدورف K فضای باناخ $C(K)$ متشکل از توابع پیوسته مختلط مقدار روی K با ضرب نقطه‌ای توابع یک جبر باناخ جابجایی واحددار است.

فرض کنیم X یک فضای باناخ و $B(X)$ فضای همه عملگرهای خطی و کراندار از X به X باشد. می‌دانیم $B(X)$ با نرم عملگری یک فضای باناخ است. ضرب در $B(X)$ را ترکیب توابع تعریف می‌کنیم. در این صورت $B(X)$ یک جبر باناخ واحددار غیر جابجایی است (فقط درحالتی که $dimX = 1$ باشد، $B(X)$ جابجایی است). در حالتی که $dimX < \infty$، $B(X)$ همان جبر همه ماتریس‌های مختلط $n \times n$ است که $n = dimX$.

تعریف ۳.۲.۱. نگاشت $T : A \longrightarrow B$ بین جبرهای مختلط B, A ضربی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, a' \in A$، $T(aa') = T(a)T(a')$ و پادضربی نامیده می‌شود اگر برای هر $a, a' \in A$، $T(aa') = T(a')T(a)$.

در حالتی که B, A ساختار گروه داشته باشند، اصطلاح ضربی و پادضربی به طور مشابه به کار برده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم B, A جبرهای مختلط باشند در این صورت نگاشت خطی $T : A \longrightarrow B$ را یک همریختی نامیم هرگاه برای هر $a, a' \in A$، $T(aa') = T(a)T(a')$.
در حالتی که B, A جبرهای واحددار باشند همریختی T را یکال نامیم هرگاه $T(e_A) = e_B$.

برای جبر مختلط A هر همریختی مختلط ناصفر روی A را یک کاراکتر (یا مشخصه) گوییم. مجموعه تمام کاراکترهای A را با Φ_A نمایش می‌دهیم.