بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان
دانشکده‌ی علوم
گروه فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش اتمی مولکولی

طرحواره‌های نظری تولید بر هم نهی حالت‌های همدوس و کنترل واهمدوسی درالکترودینامیک کوانتومی درون کاواک

استاد راهنما:
دکتر محمد حسین نادری

پژوهشگر:
فاطمه طریقی تابش

مهر ماه ۱۳۹۰

چکیده

در سال‌های اخیر، توجه زیادی به تولید حالت‌های کوانتومی مختلف نور با ویژگی‌های غیر کلاسیک شده است. از میان آن‌ها، برهم نهی دو حالت همدوس با فاز مخالف، حالت گربه‌ی شرودینگر، از دیدگاه نظری و تجربی توجه ویژه‌ای را به خود جلب کرده است. اگرچه چنین حالت‌هایی، برهم نهی حالت‌هایی هستند که بیشترین شباهت را به حالت‌های کلاسیک دارند، اما به دلیل تداخل کوانتومی بین دو مؤلفه‌ی همدوس ویژگی‌های غیر کلاسیک متنوعی از خود نشان می‌دهند. این حالت‌ها در آزمایش‌های بنیادی مبانی نظریه‌ی مکانیک کوانتومی به کار گرفته شده‌اند و می‌توانند برای محاسبات کوانتومی، ارتباطات کوانتومی و پردازش اطلاعات کوانتومی کارآمد باشند. همچنین حالت‌های مزبور به عنوان حالت ورودی در تداخل سنجی به کار گرفته می‌شوند که می‌تواند فاصله را با دقتی بیش از حدی که معمولاً توسط طول موج نور تحمیل می‌شود اندازه‌گیری کند. به علاوه، حالت‌های گربه‌ی شرودینگر ابزارهای جالبی برای ارزیابی رفتار مکانیک کوانتومی در سطح مزوسکوپیک و ماکروسکوپیک هستند و از آن‌ها برای بررسی نقش واهمدوسی در سامانه‌های بزرگ استفاده می‌شود.

در این پایان نامه، ابتدا طرحواره‌های متنوعی برای تولید حالت‌های گربه‌ی شرودینگر میدان تابشی مبتنی بر الکترودینامیک کوانتومی درون کاواک ایده‌آل، یعنی در غیاب سازوکار میرایی، را معرفی و تحلیل می‌کنیم. علاوه بر این، هماندهی حالت‌های تولید شده و مشخصه‌های غیر کلاسیک آن‌ها مانند آمار شمارش زیرپواسونی فوتون‌ها و چلاندگی کوادراتورهای میدان را به تفصیل بررسی می‌کنیم. به ویژه برای درک روشنتری از ویژگی‌های غیر کلاسیک حالت‌های مزبور، توزیع احتمال ویگنر آن‌ها را مطالعه می‌کنیم.

از سوی دیگر، عملاً همه‌ی فرایندهای آماده سازی حالت کوانتومی منزوی نیستند و با محیط در تماس هستند. حالت کوانتومی اولیه سامانه‌ی مورد نظر در یک روش غیر قابل کنترل بامحیط درهمتنیده می‌شود. در همتنیدگی سامانه با محیط منجر به واهمدوسی، نابودی برهم نهی کوانتومی، می‌شود. بنابراین، واهمدوسی به عنوان یکی از موانع جدی در تولید حالت‌های گربه‌ی شرودینگر محسوب می‌شود. به همین دلیل در دومین مرحله، اثر واهمدوسی بر تولید و جنبه‌های غیر کلاسیک حالت‌های گربه‌ی شرودینگر را بررسی می‌کنیم.

سرانجام به یک فرایند مؤثر که قادر به بی اثر کردن اثرهای ناخواسته‌ی واهمدوسی روی حالت‌های گربه‌ی شرودینگر تولید شده است، می‌پردازیم. بدین منظور روش مبتنی بر پس خور کوانتومی،

طرحواره‌ی حلقه‌ی بسته، را مطرح می‌کنیم. به ویژه کارآیی این طرحواره‌های کنترل واهمدوسی را با تحلیل رفتار توزیع احتمال ویگنر و ارزیابی زمان واهمدوسی بررسی می‌کنیم.

کلید واژه‌ها : الکترودینامیک کوانتومی کاواک، حالت گربه‌ی شرودینگر، مهندسی حالت کوانتومی، واهمدوسی.

Abstract

In recent years, much attention has been paid to the generation of various quantum states of light with nonclassical characteristics. Among them, the superposition of two coherent states with opposite phase, the so-called Schrödinger cat state(SCS), has attracted much interest from both theoretical and experimental points of view. Though such superposition states are formed nonclassical properties due to the quantum interference between the coherent components. These states have served well in many basic tests of the foundation of quantum theory, and they may eventually prove to be useful for quantum computation, quantum communication, and quantum information processing. They may also serve as input states to an interferometer that is able to measure distances with greater accuracy than achievable within the limits usually imposed by the wavelength of light. Furthermore SCSs are interesting probes for quantum mechanical behavior at the mesoscopic and macroscopic levels, and they may be used to investigate the role of decoherence in large systems.

In this thesis, we first introduce and analyze various schemes for generating SCSs of the radiation field in the context of ideal cavity quantum electrodynamics, i.e., in the absence of any damping mechanisms. Moreover, we examine the fidelity of the generated states and their nonclassical features, such as Sub-Poissonian photon counting statistics and quadrature field squeezing, in detail. In particular, to achieve a more clear insight into the nonclassical of the states, we investigate the temporal evolution of their Wigner quasi-probability functions.

On the other hand, in practice, all quantum state preparation processes do not exist in isolation but have contact with the environment. The initial quantum state of the system of interest then becomes entangled with the environment that causes decoherence; the deterioration of quantum superposition. Decoherence is thus considered as one of the most serious obstacles in the generation of the Schrödinger cat states. For this reason, in the second step, we investigate the influence of decoherence on the generation and nonclassical properties of SCSs.

Finally, we focus our attention on an efficient procedure that is able counteract the undesired of decohrence on the generated SCSs. For this purpose, we discuss a method

based on quantum feedback, the so-called closed-loop scheme. In particular, we examine the efficiency of this decoherence control scheme by analyzing the behavior of the Wigner quasi-probability distribution and evaluating the time interval of decoherence.

Keywords: Cavity quantum electrodynamics, Schrödinger cat states, quantum state engineering, decoherence.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

۱ مفاهیم اولیه و تعاریف ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ همدوسی کوانتومی ۱

۳.۱ حالت‌های گربه‌ی شرودینگر ۳

۴.۱ واهمدوسی و مسأله‌ی اندازه‌گیری ۸
۱.۴.۱ مسأله‌ی اندازه‌گیری ۸
۲.۴.۱ مسأله‌ی خروجی‌های معین ۹
۳.۴.۱ مسأله‌ی پایه‌های مرجح ۱۰
۴.۴.۱ برنامه‌ی واهمدوسی ۱۲
۵.۴.۱ واهمدوسی و فرونشانی موضعی تداخل ۱۵
۶.۴.۱ القای ابرگزینش توسط محیط ۱۶

۵.۱ تابع واهمدوسی ۱۸

۶.۱ برهم کنش اتم با میدان درون کاواک ۲۱
۱.۶.۱ سامانه‌ی اتم و کاواک ۲۱

۷.۱ جمع بندی ۲۳

۲ طرحواره‌های تولید حالت‌های گربه‌ی شرودینگر در اپتیک کوانتومی ۲۴

۱.۲ مقدمه ۲۴

۲.۲ تولید حالت گربه‌ی شرودینگر از طریق اندازه‌گیری مشروط حالت خلأ چلانده‌ی میدان تابشی ۲۵

۳.۲ تولید حالت‌های گربه‌ی شرودینگر توسط تداخل سنج ماخ – زندر . . ۳۰

۴.۲ جفت شدگی باز آواییده‌ی اتم – میدان ۳۵

۵.۲ جفتیدگی نا بازآواییده‌ی اتم – میدان ۴۱

۶.۲ تولید حالت گربه‌ی شرودینگر توسط برهم کنش اتم و میدان در حضور محیط غیر خطی کِر ۴۶

۱.۶.۲ عملگر تحول زمانی سامانه ۴۶

۲.۶.۲ دینامیک اتم – میدان ۴۸

۷.۲ تولید حالت‌های گربه‌ی شرودینگر میدان توسط برهم کنش رامان . . . ۵۲

۸.۲ جمع بندی ۵۸

۳ اثر واهمدوسی بر حالت‌های گربه‌ی شرودینگر ۶۰

۱.۳ مقدمه ۶۰

۲.۳ واهمدوسی حالت‌های گربه‌ی شرودینگر ۶۱

۳.۳ اثر واهمدوسی بر ویژگی‌های غیرکلاسیک حالت گربه‌ی شرودینگر . . . ۶۳

۴.۳ اثر واهمدوسی بر حالت گربه‌ی شرودینگر تولید شده درون کاواک . . ۶۵

۵.۳ جمع بندی ۶۸

۴ کنترل واهمدوسی میدان درون کاواک از طریق حلقه‌ی بسته پس خور **۶۹**

۱.۴ مقدمه ۶۹

۲.۴ محافظت حالت کوانتومی درون کاواک ۷۰
۱.۲.۴ تابع توزیع ویگنر میدان در حضور طرحواره‌ی پس خور . . ۷۵

۳.۴ طرحواره‌ی پس خور خودکار ۷۶
۱.۳.۴ جزئیات حلقه‌ی پس خور خودکار ۷۹
۲.۳.۴ دینامیک طرحواره‌ی پس خور خودکار ۸۴

۴.۴ طرحواره‌ی پس خور کوانتومی ۸۹

۵.۴ جمع بندی ۹۷

جمع بندی نهایی **۹۸**

پیوست‌ها **۹۹**

مراجع **۱۰۵**

پیشگفتار

تولید حالت‌های کوانتومی میدان الکترومغناطیسی و سامانه‌های اتمی به دلیل امکان برخورداری از سرشت غیرکلاسیک از مهمترین حوزه‌های پژوهشی اپتیک کوانتومی به شمار می‌آید[۱]. برهم نهی کوانتومی حالت‌های همدوس یا حالت‌های گربه‌ی شرودینگر از جمله حالت‌های غیرکلاسیک هستند که توجه فراوانی را به خود جلب کرده‌اند. حالت‌های گربه‌ی شرودینگر علاوه بر اینکه برای آزمودن اصول بنیادین مکانیک کوانتومی به کار گرفته شده‌اند[۲] در کاربردهای عملی همچون ارتباطات کوانتومی و پردازش اطلاعات کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرند[۷—۳]. حالت‌های مزبور را می توان در رایانه‌های کوانتومی به عنوان بیت‌های کوانتومی پایه[۸] و در روش‌های تداخل سنجی بسیار دقیق به عنوان حالت ورودی به کار گرفت[۹].

تاکنون طرحواره‌های نظری متنوعی برای تولید و آشکارسازی حالت‌های گربه‌ی شرودینگر میدان ارائه شده است. به عنوان مثال می‌توان به طرحواره‌های مبتنی بر روش‌های الکترودینامیک کوانتومی درون کاواک[۱۰]، تداخل سنجی غیر خطی[۱۱] و اندازه‌گیری‌های مشروط حالت‌های خلأ چلانده‌ی میدان تابشی[۱۲] اشاره کرد.

در طرحواره‌های الکترودینامیک کوانتومی درون کاواک علاوه بر اینکه حالت‌های مزبور با درجه‌ی هماندهی بالا تولید می‌شوند، می‌توان این حالت‌های غیرکلاسیک را از اثر عوامل اتلافی محیط مصون نگه داشت. همچنین می‌توان دامنه‌ی حالت‌های همدوس را از محدوده‌ی میکروسکوپیک تا ماکروسکوپیک تغییر داد. بنابراین از این حالت‌ها می‌توان برای ارزیابی رفتار کوانتومی سامانه‌های مزوسکوپیک و ماکروسکوپیک استفاده کرد.

از سوی دیگر حالت‌های گربه‌ی شرودینگر به دلیل ارتباط تنگاتنگ با پدیده‌ی تداخل کوانتومی از اهمیت فراوانی برخوردارند. همدوسی کوانتومی منشأ تداخل کوانتومی است و تداخل کوانتومی یک اثر غیرکلاسیک است که در فضای فاز رخ می‌دهد. اما اتلاف باعث تضعیف و از بین رفتن همدوسی کوانتومی و در نتیجه نابودی اثرهای غیرکلاسیک می‌شود. بنابراین یکی از مسائل اساسی در اپتیک کوانتومی فرایند فروافت برگشت ناپذیر همدوسی کوانتومی یا فرایند واهمدوسی در سامانه‌های باز است[۱۳]. واهمدوسی علاوه بر اینکه بر رفتار دینامیکی ویژگی‌های غیرکلاسیک حالت‌های کوانتومی اثر می‌گذارد[۱۴] اساس نظریه‌ی اندازه‌گیری را تشکیل می‌دهد[۱۵].

اتلاف پدیده‌ای است که در تمام سامانه‌های فیزیکی واقعی روی می‌دهد. فرایند اتلاف از جفت شدگی سامانه با محیط اطراف حاصل می‌شود. در واقع، سامانه با درجات آزادی محدود با محیط، با تعداد نامحدود درجات آزادی، جفت می‌شود. در اپتیک کوانتومی با

دو نوع اتلاف سروکار داریم؛ اتلاف انرژی و اتلاف فازی. در چارچوب نظریه‌ی افت و خیز – اتلاف ، واهمدوسی موجب از بین رفتن اطلاعات به شکل انرژی و فاز حالت کوانتومی می‌شود. در فرایند اتلاف انرژی، جفت شدگی سامانه با محیط موجب انتقال انرژی از سامانه به محیط می‌شود. آشکار است که در این نوع اتلاف، هامیلتونی سامانه با هامیلتونی برهم کنش جابجا نمی‌شود. از سوی دیگر، در فرایند اتلاف فازی هامیلتونی سامانه با هامیلتونی برهم کنش جابجا می‌شود. بنابراین، انرژی سامانه یک ثابت حرکت است. با وجود این، در فرایند مزبور به سامانه نوفه‌ی فازی تزریق می‌شود و این نوفه باعث پخشیدگی فاز حالت‌های کوانتومی می‌شود[۱۶]. الگوهایی که در اپتیک کوانتومی برای توصیف واهمدوسی به کار می‌روند دو دسته‌اند:

۱– الگوهایی که وابسته به محیط اطراف هستند، مانند اتلاف فازی و اتلاف انرژی؛

۲– الگوهایی که در آن‌ها سامانه به صورت خود به خود دچار واهمدوسی می‌شود. یکی ازاین الگوها، الگوی میلبرن[۱] است[۱۷]. در الگوی میلبرن فرض بر این است که سامانه به جای تحول پیوسته‌ی یکانی دستخوش یک تحول کاملاً تصادفی می‌شود[۱۹–۱۷].

در این پایان نامه فقط اتلاف انرژی در سامانه‌های الکترودینامیک کوانتومی درون کاواک را در نظر می‌گیریم که شامل اتلاف حاصل از فرار فوتون از درون کاواک یا جذب فوتون توسط دیواره‌های کاواک یا پراکندگی آن‌ها به مدهای الکترومغناطیسی خارج از کاواک است. بنابراین می‌بایست طرحواره‌هایی را پیش بینی کرد که بتوان واهمدوسی را تحت کنترل در آورد. طرحواره‌های کنترل واهمدوسی در سامانه‌های اپتیک کوانتومی را می توان به دو دسته‌ی کلی تقسیم کرد:

۱) فرایندهای حلقه‌ی باز[۲۶–۲۰].

۲) فرایندهای حلقه‌ی بسته[۳۳–۲۷].

در طرحواره‌ی حلقه‌ی باز (طرحواره‌ی واجفتیدگی دینامیکی)، سامانه تحت اثر یک عامل خارجی وابسته به زمان قرار می‌گیرد. جفتیدگی سامانه با عامل خارجی قویتر از جفتیدگی سامانه با محیط اطراف است. یک روش برای حفظ حالت کوانتومی مرتبط با واجفتیدگی دینامیکی طرحواره‌های مبتنی بر مهندسی محیط است[۲۶–۲۵] که از یک عامل خارجی چنان استفاده می‌شود که برای سامانه یک محیط مؤثر ایجاد می‌کند.

در طرحواره‌های حلقه‌ی بسته با اندازه‌گیری‌های مناسب روی سامانه‌ی کوانتومی، آن را از اثرات واهمدوسی محافظت می‌کنند و اطلاعات کلاسیک که از این اندازه گیری‌ها به دست می آید برای تصحیح دینامیک سامانه مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پایان نامه طرحواره‌های کنترل حلقه‌ی بسته‌ی پس خور مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

---

[۱] Milburn

مهم ترین اهدافی که در این پایان نامه مورد نظر قرار می‌گیرند عبارتند از:

الف) مقایسه‌ی ویژگی‌های طرحواره‌های تولید برهم نهی حالت‌های همدوس میدان و بررسی کارایی هریک از آن‌ها براساس درجه‌ی همافزایی حالت‌های حاصل

ب) بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیک حالت‌های حاصل از طرحواره‌های ارائه شده

پ)تحلیل اثر عوامل اتلافی بر فرایند تولید برهم نهی حالت‌های همدوس میدان و ارائه طرحواره‌هایی برای کنترل دینامیکی واهمدوسی

ت) مقایسه‌ی کارایی فیزیکی طرحواره‌های کنترل واهمدوسی میدان براساس بررسی زمان مشخصه‌ی فروافت همدوسی کوانتومی

در فصل اول ابتدا به معرفی همدوسی کوانتومی و تعریف تابع همدوسی کوانتومی می‌پردازیم. سپس حالت‌های گربه‌ی شرودینگر همراه با ویژگی‌های غیرکلاسیک آن را مطرح می‌کنیم. بروز ویژگی‌های غیر کلاسیک حالت‌های مزبور نتیجه‌ی حضور همدوسی کوانتومی بین دو مؤلفه‌ی همدوس این حالت‌ها است. ارتباط بین مسأله‌ی اندازه گیری کوانتومی و واهمدوسی را بررسی می‌کنیم و راهکار نظریه‌ی واهمدوسی برای برطرف شدن نقایص مسأله‌ی خروجی‌های معین اندازه گیری و پایه‌های مرجح را ارائه می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم که برای از بین بردن این نقایص باید اثر برهم کنش محیط با سامانه و دستگاه اندازه گیری را در نظر بگیریم. واهمدوسی با دو پیامد فرونشانی همدوسی کوانتومی و القای ابرگزینش پایه‌های مرجح همراه است. بنابراین واهمدوسی با از بین بردن همدوسی کوانتومی منجر به نابودی اثرهای غیرکلاسیک و گذار به دنیای کلاسیک می‌شود. در پایان این فصل به اختصار برهم کنش تک مد میدان الکترومغناطیسی با تک اتم درون کاواک را مرور می‌کنیم.

فصل دوم به ارائه‌ی طرحواره‌های تولید حالت گربه‌ی شرودینگر اختصاص دارد. ابتدا تولید این حالت‌ها براساس اندازه‌گیری مشروط حالت خلأ چلانده‌ی میدان تابشی و سپس طرحواره‌ی تداخل سنج ماخ – زندر مطرح می‌شود. در ادامه‌ی این فصل طرحواره‌های مبتنی بر الکترودینامیک کوانتومی درون کاواک ارائه می‌شوند که شامل برهم کنش بازآواییده‌ی اتم با میدان، برهم کنش نابازآواییده‌ی اتم با میدان، برهم کنش اتم با میدان در حضور محیط غیرخطی کِر و برهم کنش رامان است. سپس، آمار زیرپواسونی فوتون ها، چلاندگی مؤلفه‌های کوادراتوری میدان، تابع توزیع ویگنر و همافزایی این حالت‌ها بررسی می‌شود.

در فصل سوم اثر واهمدوسی بر حالت‌های گربه شرودینگر تولید شده درون کاواک را بررسی می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که واهمدوسی باعث نابودی همدوسی کوانتومی این حالت‌ها در بازه‌ی زمانی کوتاهتری نسبت به زمان فرار فوتون از کاواک می‌شود. با نابودی همدوسی کوانتومی ساختار تداخلی در تابع توزیع ویگنر از بین می‌رود و ویژگی‌های غیرکلاسیک تضعیف می‌شود.

سرانجام در فصل چهارم سه طرحواره برای کنترل واهمدوسی ارائه می‌کنیم که هر سه طرحواره مبتنی بر حلقه‌ی بسته‌ی پس خور هستند. در طرحواره‌ی اول از اتم نابازآواییده و اتم پس خور بازآواییده و اندازه گیری حالت‌های اتمی استفاده می‌شود. در طرحواره‌ی دوم برای اندازه‌گیری از کاواک دیگری استفاده می‌شود تا از اثرهای مخرب حاصل از فرایند اندازه‌گیری اجتناب شود. در طرحواره‌ی سوم از یک کاواک و یک اتم استفاده می‌شود که از لحاظ عملی نسبت به دو روش قبلی آسانتر است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و تعاریف

۱.۱ مقدمه

مفهوم همدوسی در اپتیک کلاسیک به وسیله‌ی آزمایش دوشکافی یانگ مطرح می‌شود. همدوسی به عنوان رابطه‌ی فازی مشخصی بین دو پرتو نور که از روزنه‌ها خارج می‌شوند تعریف می‌شود، که این رابطه منجر به بروز نقش تداخل می‌شود. با گذار از دنیای کلاسیک به دنیای کوانتومی، با مفهوم همدوسی کوانتومی مواجه می‌شویم. در این فصل ابتدا به مفهوم همدوسی کوانتومی می‌پردازیم و تابع همدوسی کوانتومی را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳.۱ به معرفی حالت‌های گربه‌ی شرودینگر می‌پردازیم و ویژگی‌های غیر کلاسیک آن‌ها را، مانند آمار زیرپواسونی و چلاندگی مؤلفه های کوادراتوری میدان، بررسی می‌کنیم. سپس مسأله‌ی اندازه‌گیری و ارتباط آن با واهمدوسی را ارائه کرده و تابع واهمدوسی را معرفی می‌کنیم. در بخش آخر به فرمولبندی برهم کنش اتم با میدان درون کاواک می‌پردازیم.

۲.۱ همدوسی کوانتومی

یکی از اصول بنیادی مکانیک کوانتومی اصل برهم نهی حالت‌ها است که ریشه در خطی بودن فضای هیلبرت دارد. چنانچه دو حالت در فضای هیلبرت موجود باشند مکانیک کوانتومی به ما می‌گوید که هر ترکیب خطی دلخواه از این حالت‌ها متناظر با یک حالت امکان پذیر در فضای هیلبرت است. بنابراین، آنچه مکانیک کوانتومی را از مکانیک کلاسیک متمایز

می‌کند «اصل بر هم نهی حالت‌ها» است.

فرض می‌کنیم مجموعه‌ی $\{|\phi_j\rangle\}$، حالت‌های دسترس پذیر یک سامانه‌ی کوانتومی مفروض را نشان دهد. هر حالت دلخواه این سامانه را می‌توان به صورت برهم‌نهی کوانتومی (همدوس) تمام حالت‌های دسترس پذیر آن نوشت، به طوری که

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |\phi_j\rangle . \qquad (۱-۱)$$

نکته‌ی اصلی در درک مفهوم همدوسی کوانتومی، تشخیص این حالت‌ها از حالت‌های آمیخته‌ی کلاسیک است. عملگر چگالی مربوط به حالت خالص $|\psi\rangle$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_p = |\psi\rangle\langle\psi| &= \sum_i \sum_j c_i c_j^* |\phi_i\rangle\langle\phi_j| \\ &= \sum_i |c_i|^2 |\phi_i\rangle\langle\phi_i| + \sum_{i\neq j} c_i c_j^* |\phi_i\rangle\langle\phi_j| \qquad (۲-۱) \\ &= \hat{\rho}_m + \sum_{i\neq j} c_i c_j^* |\phi_i\rangle\langle\phi_j| .\end{aligned}$$

جمله‌ی $\sum_{i\neq j} c_i c_j^* |\phi_i\rangle\langle\phi_j|$ تداخل کوانتومی را نشان می‌دهد. در این جمله $c_i = |c_i| e^{i\xi_1}$ و $c_j^* = |c_j| e^{-i\xi_2}$ است. بنابراین یک عبارت فازی $e^{i(\xi_1-\xi_2)}$ خواهیم داشت که نشان دهنده‌ی تداخل کوانتومی است. علاوه براین، $\hat{\rho}_m$ عملگر چگالی متناظر با یک حالت آمیخته است زیرا هیچ نوع اطلاعات فازی را در بر ندارد.

اکنون فرض می‌کنیم عملگر $\hat{X}$ یک مشاهده پذیر فیزیکی سامانه با ویژه مقدار x باشد، یعنی $\hat{X} \mid x\rangle = x \mid x\rangle$. تابع توزیع احتمال متناظر با این مشاهده پذیر در حالت $\mid \psi\rangle$ با عبارت زیر داده می‌شود

$$P_p(x) = P_m(x) + \sum_{i\neq j} c_i c_j^* \langle x \mid \phi_i\rangle\langle\phi_j \mid x\rangle , \qquad (۳-۱)$$

که در آن، P_m تابع توزیع احتمال برای حالت $\hat{\rho}_m$ است و از عبارت زیر به دست می آید

$$P_m(x) = \sum_i |c_i|^2 |\langle x \mid \phi_i\rangle|^2 . \qquad (۴-۱)$$

آنچه تمایز میان P_p و P_m را مشخص می‌کند جمله‌ی تداخلی یا تابع همدوسی کوانتومی $\wp$ است:

$$\wp = \sum_{i\neq j} c_i c_j^* \langle x \mid \phi_i\rangle\langle\phi_j \mid x\rangle . \qquad (۵-۱)$$

در واقع عبارت (۵.۱) تمایز میان یک حالت آمیخته و یک حالت بر هم نهی همدوس را نشان می‌دهد. بنابراین تابع $\wp$ مفهوم همدوسی کوانتومی را مشخص می‌کند به طوری که اگر $\wp = ۰$ باشد همدوسی کوانتومی نخواهیم داشت. آشکار است که عبارت (۵.۱) در صورتی مخالف صفر است که مشاهده پذیر $\hat{X}$ در پایه‌ی $\{|\phi_i\rangle\}$ قطری نباشد[۳۴].

به عنوان مثال برهم نهی دو حالت همدوس $|\alpha_۱\rangle$ و $|\alpha_۲\rangle$ را در نظر می‌گیریم

$$|\psi\rangle = N(|\alpha_۱\rangle + |\alpha_۲\rangle), \qquad (۶-۱)$$

که در آن

$$N = (۲ + e^{-۱/۲(|\alpha_۱|^۲+|\alpha_۲|^۲)}(e^{\alpha_۱^*\alpha_۲} + e^{\alpha_۱\alpha_۲^*}))^{-۱/۲}, \qquad (۷-۱)$$

ثابت بهنجارش است. چنانچه عملگر عددی میدان را به عنوان مشاهده‌پذیر انتخاب کنیم، تابع احتمال تعداد فوتون‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_p(n) = N^۲(P^{(۱)}(n) + P^{(۲)}(n) + \wp(n)), \qquad (۸-۱)$$

که در آن،

$$\wp(n) = (۱/n!)\exp(-۱/۲(|\alpha_۱|^۲ + |\alpha_۲|^۲))((\alpha_۱\alpha_۲^*)^n + (\alpha_۱^*\alpha_۲)^n), \qquad (۹-۱)$$

تابع همدوسی کوانتومی و

$$P^{(i)}(n) = (۱/n!)|\alpha_i|^{۲n} e^{-|\alpha_i|^۲} \quad , \quad (i = ۱, ۲) \qquad (۱۰-۱)$$

توابع توزیع احتمال تعداد فوتون‌های حالت‌های همدوس را نشان می‌دهد. اگر در عبارت (۹-۱) از $\alpha_i = |\alpha_i| e^{i\phi_i}$ استفاده کنیم، تابع همدوسی چنین می‌شود

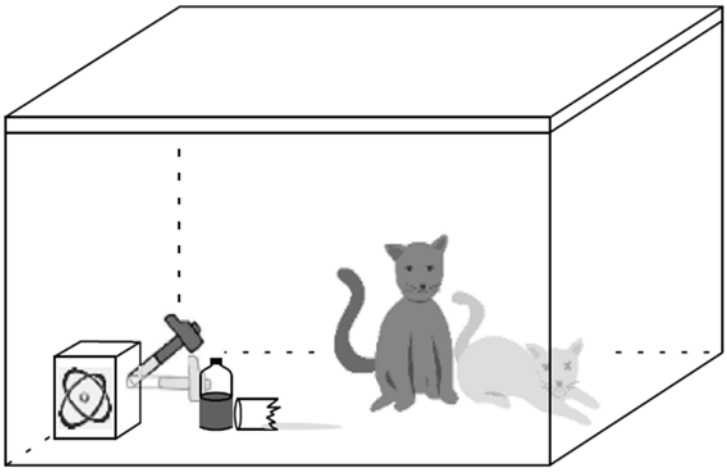
$$\wp(n) = ۲(P^{۱}(n)P^{۲}(n))^{۱/۲}\cos(n(\phi_۱ - \phi_۲)). \qquad (۱۱-۱)$$

عبارت بالا نشان می‌دهد که مشاهده‌ی تداخل به اختلاف فاز بین دامنه‌ی حالت‌های برهم نهی شده وابسته است.

۳.۱ حالت‌های گربه‌ی شرودینگر

براساس اصول مکانیک کوانتومی، بر هم نهی حالت‌های تمیز پذیر ماکروسکوپیک باید منجر به تداخل کوانتومی و مشاهده‌ی ویژگی‌های غیر کلاسیک شود. اولین بار شرودینگر

این پدیده را به عنوان یک آزمایش ذهنی مطرح کرد[۳۵]. شرودینگر فرض کرد یک گربه همراه با یک اتم پرتوزای ناپایدار، یک چکش و یک ظرف سم داخل جعبه‌ای قرار دارند(شکل (۱—۱)). براساس اصول مکانیک کوانتومی اتم در همه‌ی زمان‌ها توسط برهم نهی حالت‌های فروپاشیده و فروناپاشیده توصیف می‌شود. اگر اتم فروپاشی کند چکش حرکت کرده و ظرف سم شکسته می‌شود و گربه می‌میرد و اگر اتم فروپاشی نکند چکش حرکت نمی‌کند و گربه زنده می‌ماند. بنابراین گربه، که یک سامانه‌ی ماکروسکوپیک است، در یک برهم نهی از حالت‌های زنده و مرده قرار می‌گیرد. براساس تعبیر استاندارد از مکانیک کوانتومی اگر یک ناظر خارجی در جعبه را باز کند برهم نهی حالت‌ها به یکی از حالت‌ها تقلیل می‌یابد. اما این سوال باقی می‌ماند که قبل از باز کردن در جعبه حالت گربه چگونه بوده است؟ زنده است یا مرده، هم زنده است و هم مرده یا هیچکدام.



شکل (۱—۱). آزمایش ذهنی گربه‌ی شرودینگر

در اپتیک کوانتومی، مثال‌های نوعی از حالت گربه‌ی شرودینگر، بر هم نهی دو حالت همدوس با اختلاف فاز π است[۳۶]. حالت همدوس $|\beta\rangle$ را در نظر می‌گیریم که دامنه‌ی میدان آن ($|\beta|^2$) است، فرض می‌کنیم که دامنه‌ی میدان بزرگ است. حالت همدوس دیگری را دقیقاً با همین دامنه اما با فاز π ($|-\beta\rangle$) در نظر می‌گیریم. هر دوی این حالت‌ها کلاسیک هستند اما برهم نهی آن‌ها ویژگی‌های غیرکلاسیک دارد.

حالت گربه‌ی شرودینگر را به صورت برهم نهی زیر تعریف می‌کنیم[۵۰]

$$|\psi\rangle = \frac{|\beta\rangle + e^{i\phi}|-\beta\rangle}{\sqrt{2(1+\cos\phi e^{-2|\beta|^2})}}, \qquad (۱۲—۱)$$

که در آن، عبارت مخرج عامل بهنجارش است و برای $\beta \gg ۱$ به دلیل متعامد بودن حالت‌های $|\beta\rangle$ و $|-\beta\rangle$ برابر با $۱/\sqrt{۲}$ می‌شود.

چنانچه $\phi = ۰$ انتخاب شود، حالت همدوس زوج به دست می‌آید. نشان خواهیم داد که در این حالت تعداد فوتون‌ها زوج است

$$|\psi_e\rangle = \frac{|\beta\rangle + |-\beta\rangle}{\sqrt{۲(۱ + e^{-۲|\beta|^۲})}} \quad , \qquad (۱۳-۱)$$

و اگر $\phi = \pi$ باشد، حالت همدوس فرد به دست می‌آید که شامل تعداد فوتون‌های فرد است

$$|\psi_o\rangle = \frac{|\beta\rangle - |-\beta\rangle}{\sqrt{۲(۱ - e^{-۲|\beta|^۲})}} \quad . \qquad (۱۴-۱)$$

با در نظر گرفتن تابع توزیع ویگنر می‌توانیم ویژگی غیرکلاسیک حالت‌های گربه‌ی زوج و فرد را مشاهده کنیم. چنانچه از تعریف تابع توزیع ویگنر به صورت زیر استفاده کنیم[۵۱]

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{۲}{\pi^۲} e^{۲|\alpha|^۲} \int \langle -\gamma \mid \hat{\rho} \mid \gamma \rangle \exp(-۲(\gamma\alpha^* - \gamma\alpha^*)) d^۲\gamma, \qquad (۱۵-۱)$$

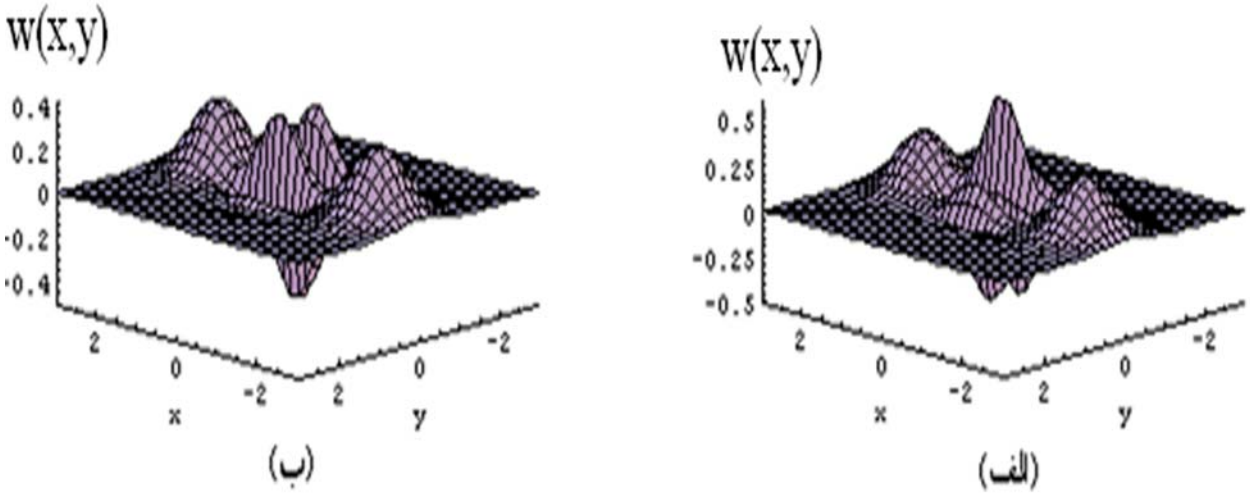
تابع ویگنر برای حالت گربه‌ی زوج و فرد به صورت زیر به دست می‌آید

$$W(x,y) = \frac{۱}{\pi(۱ \pm e^{-۲\beta^۲})} \{ e^{(-۲(x-\beta)^۲ - ۲y^۲)} + e^{(-۲(x+\beta)^۲ - ۲y^۲)} \pm ۲ e^{(-۲x^۲ - ۲y^۲)} \cos(۴y\beta) \}, \qquad (۱۶-۱)$$

که در آن، علامت $+$ $(-)$ متناظر با حالت گربه‌ی زوج (فرد) است.

جمله‌ی آخر در رابطه‌ی (۱—۱۶) بیانگر اثرهای تداخل کوانتومی بین حالت $|\beta\rangle$ و حالت $|-\beta\rangle$ است که مسئول بروز ویژگی‌های غیرکلاسیک حالت گربه به حساب می‌آید. همچنین این جمله باعث می‌شود که تابع ویگنر در برخی از نواحی فضای فاز مقداری منفی داشته باشد که داشتن مقدار منفی برای تابع توزیع نشان دهنده این است که آن حالت رفتاری غیر کلاسیک دارد.

تابع توزیع ویگنر برای حالت همدوس زوج در شکل (۱—۲ الف) و برا ی حالت همدوس فرد در شکل (۱—۲ ب) نشان داده شده است. تابع ویگنر گربه‌ی فرد شبیه تابع ویگنر گربه‌ی زوج است و تنها علامت گرته‌ی تداخلی نسبت به حالت همدوس زوج تغییر کرده است.



شکل (۱—۲) . (الف) تابع توزیع ویگنر حالت گربه‌ی زوج برای $\beta = ۲$ ،
(ب) تابع توزیع ویگنر حالت گربه‌ی فرد برای $\beta = ۲$.

به منظور بررسی بیشتر جنبه‌های غیرکلاسیک این حالت‌ها، آمار زیر پواسونی و چلاندگی مؤلفه‌های کوادراتوری میدان[۳۷] را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا تابع توزیع تعداد فوتون‌ها را به دست می‌آوریم که برای حالت گربه‌ی زوج به صورت زیر است

$$P(n) = \frac{۲e^{\beta^۲}}{۱+e^{-\beta^۲}}\frac{\beta^{۲n}}{n!} \qquad (n = even) \quad , \tag{۱۷—۱}$$
$$P(n) = ۰ \qquad (n = odd) \quad ,$$

و برای حالت گربه‌ی فرد چنین به دست می‌آید

$$P(n) = ۰ \qquad (n = even) \quad , \tag{۱۸—۱}$$
$$P(n) = \frac{۲e^{\beta^۲}}{۱+e^{-\beta^۲}}\frac{\beta^{۲n}}{n!} \qquad (n = odd) \quad .$$

برای بررسی آمار زیر پواسونی از پارامتر مندل که به صورت زیر تعریف می‌شود[۳۸] استفاده می‌کنیم

$$Q = \frac{\langle(\triangle\hat{n})^۲\rangle - \langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle}. \tag{۱۹—۱}$$

چنانچه $-۱ \leq Q < 0$ باشد آمار شمارش فوتون‌ها زیر پواسونی و حالت میدان غیرکلاسیک است. اگر $Q=0$ باشد آمار شمارش فوتون‌ها پواسونی (حالت همدوس) است و اگر $Q > 0$

باشد آمار شمارش فوتون‌ها فراپواسونی و حالت میدان کلاسیک است. برای حالت همدوس زوج پارامتر مندل چنین است

$$Q = \frac{۴\beta^۲ e^{\beta^۲}}{۱ + e^{-۴\beta^۲}} > ۰. \qquad (۲۰-۱)$$

بنابراین حالت زوج آمار فراپواسونی دارد. برای حالت همدوس فرد پارامتر مزبور چنین است

$$Q = -\frac{۴\beta^۲ e^{\beta^۲}}{۱ + e^{-۴\beta^۲}} < ۰. \qquad (۲۱-۱)$$

بنابراین حالت همدوس فرد آمار زیرپواسونی دارد.

حال به بررسی چلاندگی مؤلفه‌های کوادراتوری میدان می‌پردازیم. بدین منظور دو عملگر کوادراتوری $\hat{X_۱}$ و $\hat{X_۲}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۵۱]

$$\hat{X_۱} = \frac{۱}{۲}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \qquad , \qquad \hat{X_۲} = \frac{۱}{۲i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \qquad (۲۲-۱)$$

این دو عملگر که در رابطه‌ی جابجایی $[X_۱, X_۲] = \frac{i}{۲}$ صدق می‌کنند، رابطه‌ی عدم قطعیت

$$\langle(\triangle\hat{X_۱})^۲\rangle\langle(\triangle\hat{X_۲})^۲\rangle \geq \frac{۱}{۱۶}, \qquad (۲۳-۱)$$

را برآورده می‌کنند. برای حالت همدوس $\langle(\triangle\hat{X_۱})^۲\rangle = \langle(\triangle\hat{X_۲})^۲\rangle = \frac{۱}{۴}$ است و از این رو حاصل ضرب نامعینی‌های کوانتومی، کمینه‌ی رابطه‌ی اصل عدم قطعیت را برآورده می‌کند. واریانس $\frac{۱}{۴}$ به عنوان حد استاندارد کوانتومی مطرح می‌شود. چنانچه واریانس $\langle(\triangle\hat{X_۱})^۲\rangle$ یا $\langle(\triangle\hat{X_۲})^۲\rangle$ کمتر از $\frac{۱}{۴}$ باشد، حالت میدان، چلانده نامیده می‌شود که حالتی غیر کلاسیک است.

واریانس مؤلفه‌های کوادراتوری میدان برای حالت همدوس زوج چنین است

$$\begin{aligned} \langle(\triangle\hat{X_۱})^۲\rangle &= \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{\beta^۲}{۱+e^{-\beta^۲}} \quad , \\ \langle(\triangle\hat{X_۲})^۲\rangle &= \tfrac{۱}{۴} - \tfrac{\beta^۲ e^{-\beta^۲}}{۱+e^{-\beta^۲}} \quad . \end{aligned} \qquad (۲۴-۱)$$

بنابراین، واریانس در مؤلفه‌ی کوادراتور $\hat{X_۲}$ نسبت به حد استاندارد کوانتومی کاهش یافته است . واریانس مؤلفه‌های کوادراتوری میدان در حالت همدوس فرد به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \langle(\triangle\hat{X_۱})^۲\rangle &= \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{\beta^۲}{۱-e^{-\beta^۲}} \quad , \\ \langle(\triangle\hat{X_۲})^۲\rangle &= \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{\beta^۲ e^{-\beta^۲}}{۱-e^{-\beta^۲}} \quad . \end{aligned} \qquad (۲۵-۱)$$

آشکار است که برای این حالت واریانس هر دو مؤلفه‌ی کوادراتوری بزرگتر از $\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین، چلاندگی در حالت فرد ظاهر نمی‌شود. توجه کنید که اگر چه حالت همدوس زوج از