چکیده

در این پایان‌نامه گروه‌هایی با تعداد متناهی از زیرگروه‌های نرمالساز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. گروه‌هایی با یک نرمالساز به گروه‌های ددکیند مشهورند. روماس[۱] و مورا[۲] به طبقه بندی گروه‌های متناهی با دقیقاً دو نرمالساز پرداختند. در این پایان‌نامه همچنین به بررسی گروه‌هایی با سه و چهار نرمالساز نیز می‌پردازیم. در انتها گروه‌هایی با تعداد کمی زیرگروه‌های نرمالساز را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: نرمالساز، موضعاً متناهی، FC-گروه، مرکز-بواسطه-متناهی، ددکیند، متاهمیلتون.

---

[۱] Perez-Ramos
[۲] Camp-Mora

فهرست مطالب

پیشگفتار

بحث این پایان‌نامه درباره گروه‌هایی با n نرمالساز است. گوئیم گروه G، n نرمالساز دارد ($G \in \mathcal{N}_n$) اگر وجود داشته باشد زیرگروه‌های $K_۱ = G, K_۲, ..., K_n$ از G (که لزومی ندارد از هم متمایز باشند) به طوری که $K_i \subset G$ برای $i \in \{۲, ..., n\}$ و این که هر نرمالساز در G برابر یکی از $K_۱, ..., K_n$ است. پس در بحث نرمالسازها ما اصطلاحاتی از قبیل $G \in \mathcal{N}_n$ و $G \in \mathcal{N}_۳ \setminus \mathcal{N}_۲$ و غیره را داریم. مثلاً گوییم G تعداد متناهی نرمالساز دارد و می‌نویسیم $G \in \mathcal{N}$، برای هر $n \in N$ اگر $G \in \mathcal{N}_n$.

هدف از این پایان‌نامه بررسی گروه‌های G متعلق به $\mathcal{N}_n$ و مشخص کردن گروه‌های متعلق به $\mathcal{N}$ می‌باشد. ابتدا در فصل اول به بیان تعاریف اولیه و پیشنیازها می‌پردازیم. در فصل دوم نشان می‌دهیم که اگر گروهی متعلق به $\mathcal{N}$ باشد یک FC-گروه است. همچنین به بررسی گروه‌های متعلق به $\mathcal{N}_۲ \setminus \mathcal{N}_۱$ که موضعاً متناهی هستند می‌پردازیم و نیز نشان می‌دهیم اگر گروه G تعداد متناهی نرمالساز داشته باشد آنگاه مرکز-بواسطه-متناهی است و بالعکس.

در فصل سوم با اثبات و بیان چند مثال به بررسی گروه‌هایی با سه و چهار نرمالساز می‌پردازیم. در فصل چهارم گروه‌هایی با تعداد متناهی مرکزساز را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در پایان در فصل پنجم به بیان تعاریف و قضایایی در ارتباط با گروه‌هایی با تعداد کمی زیر گروه‌های نرمالساز می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف اولیه و پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و نکات اولیه که در فصل‌های بعد از آنها استفاده می‌شود می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ *مرتبه‌ی گروه G عبارت است از تعداد اعضای مجموعه‌ی G که آن را با $|G|$ نمایش می‌دهیم. G یک گروه متناهی نامیده می‌شود هرگاه $|G|$ عددی متناهی باشد. در غیر این‌صورت G یک گروه نامتناهی نامیده می‌شود.*

قضیه ۲.۱.۱ (کشی) *اگر گروهی از مرتبه n باشد و p عددی اول به طوری که $p|n$، آنگاه G شامل عضوی از مرتبه p است.*

تعریف ۳.۱.۱ *گروه G آبلی یا جابه‌جایی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم $xy = yx$.*

تعریف ۴.۱.۱ *گروه G را یک گروه دوری می‌نامیم هرگاه G توسط یکی از اعضای خود تولید شود یعنی عضو $x \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $G =< x >$.*

تعریف ۵.۱.۱ *فرض کنیم H یک زیرگروه G و a عضوی از آن باشد. در این صورت مجموعه $Ha = \{ha : h \in H\}$ را یک همدسته راست H در G و عضو a را نماینده Ha می‌نامیم. همچنین مجموعه $aH = \{ah : h \in H\}$ را یک همدسته چپ H در G و عضو a را نماینده aH می‌نامیم.*

تعریف ۶.۱.۱ *تعداد همدسته‌های چپ(راست) زیرگروه H درگروه G را شاخص H در G نامیده و با $[G:H]$ نمایش می‌دهیم.*

قضیه ۷.۱.۱ (لاگرانژ) *فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$. اگر G متناهی باشد آنگاه $|H|\,||G|$.*

قضیه ۸.۱.۱ *فرض کنید H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند به طوری که $K \leq H \leq G$ و $[G:H]$ و $[H:K]$ هر دو متناهی‌اند. در این صورت $[G:K]$ متناهی است و*

$$[G:K]=[G:H][H:K].$$

به [۳۳] رجوع کنید.

تعریف ۹.۱.۱ *فرض کنید G یک گروه باشد و M زیرگروهی از G باشد در این صورت*

$$C_G^{(M)}=\{g\in G: gm=mg, \forall m\in M\}$$

را مرکزساز M در G و

$$N_G^{(M)}=\{g\in G: M^g=M\}$$

را نرمالساز M در G گوییم.

در حالتی که M تک عضوی باشد واضح است $C_G^{(M)}=N_G^{(M)}$.

تعریف ۱۰.۱.۱ *دو زیرگروه H,K از G را مزدوج گوییم، هرگاه وجود داشته باشد $g\in G$ به طوری که $H^g=K$.*

تعریف ۱۱.۱.۱ *فرض کنید G یک گروه باشد، برای $x\in G$ داریم:*

$$\triangle(x)=\{x^g|g\in G\}=\{g^{-1}xg|g\in G\}$$

$\triangle(x)$ شامل تمام مزدوج‌های x است و آن را رده‌ی تزویج x می‌نامیم. (x یکی از اعضای این رده است که ما آن را به عنوان نماینده رده انتخاب کردیم. $\triangle(x)$ را کلاس هم ارزی از G گوییم). G به کلاسهای هم ارزی افراز می‌شود، تعداد کلاسهای هم ارزی G را کلاس مزدوجی G می‌گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ *مجموعه تمام جایگشت‌های مجموعه غیرتهی Ω که با قانون ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد، گروه متقارن مجموعه Ω نامیده و آن را با S_Ω نمایش می‌دهیم. در حالتی که*

$$\Omega = \{x_۱, ...x_n\}$$

مجموعه‌ای متناهی و دارای n عضو باشد، آنگاه گروه متقارن Ω را با S_n نمایش داده و آن را گروه متقارن از درجه n می‌خوانیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ *مجموعه تمام جایگشت‌های زوج در S_n تشکیل یک گروه می‌دهد، که ما آن را گروه متناوب از درجه n می‌نامیم و با A_n نمایش می‌دهیم. داریم: $|S_n : A_n| = ۲$ و در نتیجه $A_n S_n$ و $= |A_n|(n۲)$ $.n!۲$*

تعریف ۱۴.۱.۱ (گروه کوترنیون) *گروه تولید شده توسط عناصر a و b که فقط در روابط زیر صدق می‌کند:*

$$a^۴ = ۱, a^۲ = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱}$$

گروه کوترنیون مرتبه ۸ نامیده و با $Q_۸$ نمایش داده می‌شود. در واقع

$$Q_۸ =< a, b | a^۴ = ۱, a^۲ = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱} >= \{۱, a, a^۲, a^۳, b, ab, a^۲b, a^۳b\}$$

و نیز $Q_۸ = \{\pm ۱, \pm i, \pm j, \pm k\}$ که آن را گروه یکه‌های کوترنیونی می‌نامند.

تعریف ۱۵.۱.۱ (گروه دو وجهی) *گروه G با مولدهای a و b با روابط $a^n = b^۲ = ۱$ و $a^b = b^{-۱}ab$ گروه دووجهی از مرتبه $۲n$ نامیده و با $D_{۲n}$ نمایش داده می‌شود.*

تعریف ۱۶.۱.۱ *جابه‌جاگر دو عنصر $g_۱$ و $g_۲$ از اعضای G، عبارت است از عضو*

$$[g_۱, g_۲] = g_۱^{-۱}g_۲^{-۱}g_۱g_۲ \in G.$$

به موجب این تعریف بلافاصله لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۱۷.۱.۱ *فرض می‌کنیم که $g_1, g_2 \in G$، در این صورت داریم:*

الف) $[g_2, g_1] = [g_1, g_2]^{-1}$.

ب) $[g_1, g_2] = 1$ *اگر و تنها اگر* g_1 *و* g_2 *جابه‌جایی پذیر باشند.*

الف) $g_1, g_2 \in G$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$[g_1, g_2]^{-1} = (g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1 = [g_2, g_1]$$

ب) ابتدا فرض می‌کنیم $[g_1, g_2] = 1$ درنتیجه $g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = 1$ لذا $g_1 g_2 = g_2 g_1$. یعنی g_1 و g_2 جابه‌جایی پذیر هستند.

اکنون اگر g_1 و g_2 جابه‌جایی پذیر باشند، آنگاه $[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = g_1^{-1} g_2^{-1} g_2 g_1 = 1$.

تعریف ۱۸.۱.۱ *فرض کنیم $H, K \leq G$، در این صورت زیرگروه جابه‌جاگر متناظر با H, K عبارت است از*

$$[H, K] =< [h, k]; h \in H, k \in K > .$$

تأکید می‌کنیم که $[H, K]$ زیرگروهی از G است، که بوسیله تمام جابه‌جاگرهای $[h, k]$ تولید شده است به طوری که $h \in H, k \in K$. اتفاقاً ممکن است که حاصل ضرب دو جابه‌جاگر را نتوان به صورت یک جابه‌جاگر نشان داد. زیرگروه خاص $[G, G]$ را که بوسیله تمام جابه‌جاگرهای G تولید می‌شود معمولاً با G' نمایش می‌دهند، و گروه مشتق G می‌نامند.

لم ۱۹.۱.۱ *فرض کنید H, KG. در این صورت داریم:* $[H, K] = [K, H]$.

برای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ می‌توان نوشت:

$$[h, k] = h^{-1} k^{-1} h k = (k^{-1} h^{-1} k h)^{-1} = [k, h]^{-1}$$

چون $[K, H]$ زیرگروه است، پس از تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$[H, K] \leq [K, H]$$

عملیات مشابه نتیجه می‌دهد:

$$[K,H] \leq [H,K]$$

و از این رو $[H,K]=[K,H]$.

تعریف ۲۰.۱.۱ *گوییم گروه G بر مجموعه Ω عمل می‌کند هرگاه نگاشت $\Omega \times G \longrightarrow \Omega(\omega,g) \longmapsto$ $\omega^g; \quad \forall\omega\in\Omega,\ \forall g\in G$ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:*

الف) $\omega^1=\omega$ برای هر $\omega\in\Omega$

ب) $(\omega^g)^h=\omega^{gh}$ برای هر $\omega\in\Omega$ و هر $g,h\in G$.

تعریف ۲۱.۱.۱ *فرض کنید G و H گروه‌اند.گوییم G روی H عمل می‌کند و یا این‌که G یک گروه عملگر روی H است هرگاه G روی H به عنوان مجموعه عمل کند.(یعنی شرایط تعریف بالا برقرار باشند) و به علاوه داشته باشیم:*

$$(xy)^g=x^gy^g, \quad \forall x,y\in H;\ \forall g\in G$$

به این ترتیب شرایط زیر به شرط بالا اضافه می‌شود:

$$x^1=x$$

$$(x^g)^h=x^{gh}, \quad \forall x\in H,\ \forall g,h\in G.$$

تعریف ۲۲.۱.۱ *فرض کنید گروه G بر گروه H عمل کند. در این صورت حاصلضرب دکارتی $G\times H$ با قانون ترکیب زیر، یک گروه است:*

$$(x,g)(y,h)=(x^hy,gh); \quad \forall x,y\in H,\ \forall g,h\in G$$

گروه بالا را حاصلضرب نیم‌مستقیم H و G نسبت به عمل داده شده‌ی G بر H می‌نامند و با HG یا $G:H$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۳.۱.۱ *فرض کنید G گروهی متناهی باشد و مرتبه‌ی G مساوی $p^n.m$ که p عددی اول و $(m,p)=$ ۱ ، در این صورت هر زیرگروه مرتبه p^n از G یک سیلو p- زیرگروه G نامیده می‌شود.*

تعریف ۲۴.۱.۱ *تعریف فوق ایجاب می‌کند که اگر $G \leq H$ یک سیلو p- زیرگروه G باشد، آنگاه $|G:H|$ نسبت به p اول است و مرتبه H نیز توانی از عدد اول p است. این بدان معنی است که مرتبه H بزرگترین توانی از عدد اول p است که مرتبه G را عاد می‌کند. اگر $p^n \mid |G|$ ولی $|G| \nmid p^{n+1}$، آنگاه می‌گوییم p^n دقیقاً مرتبه G را عاد می‌کند و می‌نویسیم $|G| \mid p^n$.*

نکته ۲۵.۱.۱ *بنا به قضایای سیلو هر گروه متناهی G از مرتبه $p_n^{\alpha_n}.....p_1^{\alpha_1}$ که $n \in N$ و p_i ها اعداد اول متمایز هستند و $\alpha_i \circ$ به ازای هر $i = 1, 2, ..., n$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $p_i^{\alpha_i}$ است و هر دو زیرگروه از چنین مرتبه‌ای مزدوج‌اند.*

تعریف ۲۶.۱.۱ *فرض کنید $G \leq H$. دنباله‌ی متناهی $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ از زیرگروه‌های G به فرم*

$$H = H_0 H_1 H_2 \cdots H_{n-1} H_n = G$$

را در صورت وجود یک سری به طول n از H به G می‌نامیم. هر H_i را یک جمله از سری گوییم. بعلاوه گروه خارج قسمتی $H_i H_{i-1}$ که $i = 1, 2, 3, ..., n$ یک فاکتور از سری نامیده می‌شود.

تعریف ۲۷.۱.۱ *الف)فاکتور HK از یک سری فاکتور مرکزی نامیده می‌شود اگر KG و*

$$HKZ(GK).$$

ب)گروه G پوچتوان است اگر سری داشته باشد که همه‌ی فاکتورهایش مرکزی باشند.

ج)گروه G حل‌پذیر است اگر سری داشته باشدکه همه‌ی فاکتورهایش آبلی باشند.

با توجه به تعریف چون هر فاکتور مرکزی یک فاکتور آبلی است پس هر گروه پوچتوان، حل پذیر است ولی ممکن است گروهی حل پذیر باشد اما پوچتوان نباشد. مثلاً گروه S_3 حل پذیر است اما پوچتوان نیست.

تعریف ۲۸.۱.۱ *یک سری را در G سری نرمال گویند، هرگاه هر جمله آن در G نرمال باشد.*

تعریف ۲۹.۱.۱ *سری نرمال $1 = G_0 G_1 \cdots G_n = G$ را سری نرمال دوری گوئیم اگر هر فاکتور $G_i G_{i-1}$ برای $1 \leq i \leq n$ دوری باشد.*

تعریف ۳۰.۱.۱ *گروه G را ابر حل پذیر گوئیم اگر دارای سری نرمال دوری باشد یعنی یک سری از زیرگروه‌های نرمال که فاکتورهای آن دوری باشند. این گروه‌ها البته حل پذیرند.*

مثال ۳۱.۱.۱ *$A_۴$ ابر حل پذیر است زیرا زیرگروه نرمال دوری، به جز زیرگروه بدیهی ندارد.*

تعریف ۳۲.۱.۱ *سری را که هر فاکتور آن مرکزی باشد سری مرکزی گوییم.*

تعریف ۳۳.۱.۱ *گوییم گروه G دارای یک سری مرکزی پایینی به طول r است، هرگاه*

$$G = \Gamma_۱(G)\Gamma_۲(G)\Gamma_۳(G)...\Gamma_r(G)\Gamma_{r+۱}(G) = \{۱\}$$

که $\Gamma_{k+۱}(G) = [\Gamma_k(G), G](k = ۱, ۲, ..., r)$.

ب) گوییم گروه G دارای یک سری مرکزی بالایی به طول s است، هر گاه:

$$۱ = Z_۰(G)Z_۱(G)Z_۲(G)...Z_s(G) = G,$$

که در آن

$$Z(GZ_{j-۱}(G)) = Z_j(G)Z_{j-۱}(G); \;\; j = ۱, ۲, \ldots, s.$$

باید توجه کرد که دو سری فوق برای هر گروه G وجود دارند، ولی اگر تساوی $G = G^{(۱)}(= \Gamma_۲)$ و $Z_۱(G) = \{۱\}$ به ترتیب برقرار باشند آنگاه، ممکن است این سری‌ها در جمله اوّل مستهلک شوند. ما بیشتر به حالت عکس آن علاقه‌مندیم که در آن این سری‌ها حد اعلای خود را پیدا می‌کنند و از خود گروه G شروع و تا گروه واحد $\{۱\}$ کشیده می‌شوند.

تعریف ۳۴.۱.۱ *سری $G = G^{(۰)} \geq G^{(۱)} \geq G^{(۲)} \geq \cdots$ را یک سری مشتق از G می‌نامیم، که در آن $G^{(n)} = [G^{n-۱}, G^{(n-۱)}] = G^{(n-۱)'}$ برای هر $n > ۰$. مثلاً $G^{(۱)} = [G, G] = G'$ و $G^{(۲)} = [G', G'] = G''$.*

با توجه به این تعریف، می‌توان نشان داد که:

گروه G حل پذیر است اگر و تنها اگر $n \in N$ وجود داشته باشد، به طوری که $G^{(n)} = ۱$.

تعریف ۳۵.۱.۱ *فرض کنید G گروهی حل پذیر است. در این صورت کوچکترین عدد صحیح و نامنفی n که برای آن داشته باشیم $G^{(n)} = ۱$، را رده‌ی حل‌پذیری G گوییم. در این حالت G را گروهی حل‌پذیر از رده‌ی n می‌نامیم. گروه بدیهی $\{۱\}$ از رده‌ی صفر و هر گروه آبلی از رده یک است. هر گروه از رده‌ی دو را متاآبلی گوییم.*

مثال ۳۶.۱.۱ *گروه $D_{۲n}$ برای $n \geq ۳$، گروهی حل پذیر از رده دو است.*

حل: *زیرا بنابر نمایش $D_{۲n} =< a, b : a^n = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} >$، $H =< a >$ زیرگروهی نرمال از $D_{۲n}$ است و $D_{۲n}H \cong Z_۲$. حال چون H و $D_{۲n}H$ هر دو آبلی‌اند بنابراین هر دوی آنها حل پذیر بوده و لذا $D_{۲n}$ حل پذیر است. حال چون $D_{۲n}$ غیر آبلی است و $(D_{۲n})' \subseteq H$ (زیرا $D_{۲n}H$ آبلی است) پس $(D_{۲n})'' = \{۱\}$ و در نتیجه $D_{۲n}$ گروهی متاآبلی است.*

لم ۳۷.۱.۱ *اگر G گروه باشد و $N \lhd G$ آنگاه GN آبلی است اگر و تنها اگر $G' \subseteq N$.*

مثال ۳۸.۱.۱ *$A_۴$ حل پذیر است. چون $N = \{۱, (۱,۲)(۳,۴), (۱,۳)(۲,۴), (۱,۴)(۲,۳)\}$ زیرگروهی نرمال از $A_۴$ بوده و $A_۴N$ آبلی است و در نتیجه $A'_۴ \leq N$ و چون N آبلی است پس $A''_۴ \leq N' = \{۱\}$ که از آن حاصل می‌شود $A''_۴ = \{۱\}$.*

تعریف ۳۹.۱.۱ *اگر گروه G دارای سری مرکزی باشد آن را پوچتوان گوییم. طول کوتاهترین سری مرکزی گروه پوچتوان G را رده‌ی پوچتوانی G می‌گوییم.*

قضیه ۴۰.۱.۱ *الف) عبارات زیر معادلند:*

۱. G *پوچتوان است.*

۲. $\Gamma_n(G) = ۱$ *برای یک n در Z.*

۳. $Z_n(G) = G$ *برای یک n در Z.*

ب) فرض می‌کنیم که G پوچتوان باشد. در این صورت برای هر سری مرکزی از G مانند $1 = G_0 G_1 \cdots G_r =$ G که $i = 0, 1, \ldots, r$ داریم: $\Gamma_{r-i+1}(G) \leq G_i \leq Z_i(G)$.

به قضیه ۷.۵۴ از [۳۴] رجوع کنید.

تعریف ۴۱.۱.۱ *کوچکترین عدد صحیح c به طوری که $\Gamma_{c+1}(G) = 1$ برابر است با کوچکترین عدد صحیح c به طوری که $Z_c(G) = G$ این عدد صحیح c را کلاس پوچتوانی گروه G می‌گوئیم.*

قضیه ۴۲.۱.۱ *الف) اگر G پوچتوان باشد، همه زیرگروه‌ها و همه گروه‌های خارج قسمتی G نیز پوچتوان‌اند.*

ب) اگر G حل‌پذیر باشد، همه زیرگروه‌ها و همه گروه‌های خارج قسمتی G نیز حل‌پذیرند.

به [۳۴] رجوع کنید.

قضیه ۴۳.۱.۱ *اگر $G \neq \{1\}$ یک گروه پوچتوان باشد آنگاه مرکز G غیربدیهی است.*

فرض کنید G پوچتوان از کلاس c باشد. پس $\Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$ و $\Gamma_c(G) \neq \{1\}$، ثابت می‌کنیم $\Gamma_c(G) \leq Z(G)$. اگر $u \in \Gamma_c(G)$ آنگاه برای هر $g \in G$ داریم:

$$[u, g] \in [\Gamma_c(G), G] = \Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$$

بنابراین $[u, g] = 1$ و $ug = gu$. پس $u \in Z(G)$. چون $u \in \Gamma_c(G)$ دلخواه بود، $\{1\} \neq \Gamma_c(G) \leq Z(G)$ لذا $Z(G) \neq \{1\}$.

تعریف ۴۴.۱.۱ *فرض کنید p یک عدد اول است. گروه متناهی G یک p-گروه نامیده می‌شود هر گاه مرتبه G توانی از عدد اول p باشد.*

قضیه ۴۵.۱.۱ *هر p-گروه متناهی، گروهی حل پذیر است.*

از استقراء روی $|G|$ استفاده می‌کنیم.

بنابر قضیه بالا، $Z \neq 1$. چون $Z(G)$ آبلی است در نتیجه حل پذیر است. چون $|GZ(G)| < |G|$ پس بنابر فرض استقراء $GZ(G)$ گروهی حل پذیر است و در نتیجه گروه G حل پذیر است.

تعریف ۴۶.۱.۱ *یک مجموعه‌ی غیرتهی از گروه‌ها را یک کلاس از گروه‌ها می‌گوییم و با χ نشان می‌دهیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:*

- $<e>=\{e\}\in\chi$.
- *برای هر* $G\in\chi$ *و* HG *داشته باشیم* $H\in\chi$.

مثال ۴۷.۱.۱ *کلاس گروه‌های حل‌پذیر را با* S*، کلاس گروه‌های پوچ‌توان را با* N *و کلاس گروه‌های آبلی را با* A *نمایش می‌دهیم.*

قضیه ۴۸.۱.۱ (نئومن) *اگر گروهی مانند* G *اجتماع تعداد متناهی از زیرگروه‌های آن باشد آنگاه* G *را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از زیرگروه‌ها با شاخص متناهی از آن نوشت.*

تعریف ۴۹.۱.۱ *گروه* G *ددکیند گروه است اگر هر زیرگروه دوری از* G*، در* G *نرمال باشد.*

تعریف ۵۰.۱.۱ *نرم گروه* G *که با نماد* $N(G)$ *نشان می‌دهیم، عبارت است از اشتراک تمام نرمالسازهایی از همه زیرگروه‌های* G *یعنی* $N(G)=\bigcap\limits_{H\leq G}N_G(H)$.

تعریف ۵۱.۱.۱ *گروه* G *را متناوب گوییم هرگاه هر عنصر از* G *مرتبه متناهی داشته باشد.*

تعریف ۵۲.۱.۱ *گروهی که هر زیرگروه غیرآبلی آن نرمال باشد، متاهمیلتون[1] نامیده می‌شود.*

تعریف ۵۳.۱.۱ *گروه* G *را متناهیاً تولید شده گوییم هرگاه* G *عناصری مانند* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *داشته باشد به طوری که* $G=<a_1,a_2,\ldots,a_n>$.

تعریف ۵۴.۱.۱ *گروه* G *را یک گروه موضعاً متناهی گوییم هرگاه هر زیرگروه متناهیاً تولید شده آن متناهی باشد.*

---
[1] Metahamiltonian

برخی از خواص گروه‌های موضعاً متناهی عبارتند از:

۱) هر گروه متناهی، موضعاً متناهی است.

۲) هر زیرگروه از گروه موضعاً متناهی، موضعاً متناهی است.

تعریف ۵۵.۱.۱ *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت عنصر g از G را یک FC-عنصر گوییم هر گاه*

$$|G : C_G^{(g)}| < \infty$$

یعنی تعداد مزدوجات g در G متناهی باشد.

تعریف ۵۶.۱.۱ *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت زیرگروهی از G که شامل همه FC-عنصرها است را FC-مرکز، G گوییم. یعنی*

$$F_c(G) = \{g \in G : |x^g| < \infty\}.$$

تعریف ۵۷.۱.۱ *فرض کنیم G یک گروه باشد. G، FC-گروه نامیده می‌شود اگر هم‌ارز FC-مرکز خودش باشد.*

تذکر ۵۸.۱.۱ *از جمله FC-گروه‌های مهم، گروه‌های مرکز-بواسطه-متناهی هستند. در حالت خاص همه گروه‌های آبلی و همه گروه‌های متناهی، FC-گروه هستند.*

فصل ۲

گروه‌هایی با تعداد متناهی نرمالساز

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بررسی گروه‌هایی با تعداد متناهی نرمالساز می‌پردازیم. مورا در سال ۲۰۰۰ ثابت کرد گروه‌های موضعاً متناهی متعلق به $\mathcal{N}$ هستند اگر و تنها اگر مرکز-بواسطه-متناهی[1] باشند. با استفاده از این نتایج ما نشان می‌دهیم گروه G تعداد متناهی نرمالساز دارد اگر و تنها اگر مرکز-بواسطه-متناهی باشد. در انتها با اثبات قضیه‌ای به رابطه بین گروه‌های متناوب و گروه‌های موضعاً متناهی می‌پردازیم.

۲.۲

برای بررسی گروه‌هایی با تعداد متناهی نرمالساز ابتدا به بیان چند لم و تعریف و سپس به اثبات چند قضیه می‌پردازیم:

لم ۱.۲.۲ *فرض کنید G یک گروه و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند به طوری که $H \leq K \leq G$ آنگاه $N_H^{(K)} = N_G^{(K)} \cap H$.*

به [۱۵] رجوع کنید.

به [۱۵] رجوع کنید.

لم ۳.۲.۲ *اگر G گروه و $H_1, \dots H_n$ زیرگروه‌های نرمال G فرض شوند آنگاه $G \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$ با زیرگروهی از $\sqcap_{i=1}^{n} GH_i$ یکریخت است.*

[1] Central-by-finite

به [۱۵] رجوع کنید.

لم ۴.۲.۲ *هر گروه آبلی با تولید متناهی G با حاصلضرب مستقیم گروه‌های دوری به شکل زیر یکریخت است:*

$$Z_{(p_1)^{r_1}} \times Z_{(p_2)^{r_2}} \times \cdots \times Z_{(p_k)^{r_k}} \times Z \times \cdots \times Z$$

که در آن p_i ها اولند و لزوماً متمایز نیستند.

به [۱۵] رجوع کنید.

تعریف ۵.۲.۲ *فرض کنید x و y دو کلاس از گروه‌ها باشند. در این صورت گوییم G یک x- بواسطه-y است هرگاه وجود داشته باشد NG به طوری که $x \in N$ و $y \in GN$.*

یادآوری ۶.۲.۲ *به ازای هر زیرمجموعه ناتهی H از گروه G داریم: $Z(G)N_G^{(H)}$*

قضیه ۷.۲.۲ *اگر گروه G متعلق به $\mathcal{N}$ باشد آنگاه G یک FC- گروه است.*

فرض می‌کنیم $G \in \mathcal{N}_n$ برای $n \in N$. قرار می‌دهیم که F یک FC-مرکز از G باشد. برای اثبات، به استقراء روی n عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $n = ۱$ برقرار باشد، در این صورت $G \in N_۱$. بنابراین G یک نرمالساز مانند $k_۱$ دارد، لذا برای هر زیرگروه سره H از G داریم $k_۱ = N_G^{(H)}$. از طرفی طبق تعریف n نرمالساز، $k_۱ = G$، یعنی زیرگروه سره H در G نرمال است، بنابراین G ددکیند گروه است. لذا G را می‌توان بصورت $G = Q_۸ \oplus P \oplus Q$ نوشت که در آن P یک دو-گروه آبلی مقدماتی و Q یک گروه آبلی که هر عضو آن مرتبه فرد دارد. فرض $g \in G$، لذا برای هر $a \in Q_۸$ و $b \in P$ و $d \in Q$ آنگاه $g = abd$. اگر $O(a) = ۲$ آنگاه $g \in Z(G)$ و حکم واضح است. اگر $O(a) = ۴$ آنگاه abd و $a^{-۱}bd$ مزدوج‌های abd هستند، لذا G یک FC-گروه است. حال فرض کنید $n۱$ و $G \in \mathcal{N}_n \setminus \mathcal{N}_{n-۱}$. با توجه به فرضیات نرمالسازی در G مانند یکی از زیرگروه‌های $k_۱, ..., k_n$ از G که $k_۱ = G$ و $k_i < G$ برای $i \in \{۲, ۳, ..., n\}$ وجود دارد، اکنون ادعا می‌کنیم $k_۲, ..., k_n \in N_{n-۱}$. مجموعه نرمالسازهای k_i بصورت

$$\{k_i, k_i \cap k_۱, k_i \cap k_۲, ..., k_i \cap k_i, ..., k_i \cap k_n\}$$

است که ممکن است برخی موارد تکراری باشند. چون $H \subseteq k_i$ و بنابر لم ۱.۲.۲ داریم

$$N_{k_i}^{(H)} = N_G^{(H)} \cap k_i = k_j \cap k_i$$

پس $k_2, ..., k_n \in \mathcal{N}_{n-1}$. لذا با توجه به فرضیات استقراء هر کدام از آنها یک FC-گروه هستند. حال فرض کنید $x \in G$. اگر $G < x >$ واضح است $x \in F$. زیرا طبق قضیه NC می‌توان نگاشتی مانند

$$N_G^{(<x>)} C_G^{(<x>)} \hookrightarrow (< x >)$$

تعریف کرد و چون $Z_2 = (< x >)$ و نیز Z_2 متناهی است پس $x \in F$. حال اگر $G \not< x >$ آنگاه $T = N_G^{<x>} \ni x$ که T زیرگروه سره‌ای از G است. چون TG و $G \in \mathcal{N}_n \setminus \mathcal{N}_{n-1}$ پس T برابر $k_2, ..., k_n$ است. که در بالا نشان دادیم $k_2, ..., k_n \in \mathcal{N}_{n-1}$.

بنابراین $G = F \cup k_2 \cup ... \cup k_n$ و طبق قضیه نئومن G اجتماعی از زیرگروه‌هایی با شاخص متناهی است. به عبارت دیگر زیرگروه‌هایی مانند k_{ij} وجود دارند به طوری که به ازای هر j، $|G : k_{i_j}| < \infty$ که $G = F \cup k_{i_1} \cup ... \cup k_{i_t}$. اگر $x \in k_{i_j}$ آنگاه $|k_{i_j} : C_{K_{i_j}}^{(x)}| < \infty$، چون k_{i_j} یک FC- گروه است. لذا طبق قضیه ۷.۱.۱

$$|G : C_G^{(x)}| \leq |G : k_{ij}||k_{ij} : C_{k_{ij}}^{(x)}| \ < \infty$$

پس $|G : C_G^{(x)}| \ < \infty$ بنابراین به ازای هر j، $k_{ij} \leq F$. از رابطه $G = F \cup k_{i_1} \cup ... \cup k_{i_j}$ با قرار دادن $k_{ij} \leq F$ داریم $G = F$، در نتیجه G یک FC-گروه است.(زیرا G یک FC-گروه نامیده می‌شود اگر هم ارز FC-مرکز خودش باشد).

مورا در سال ۲۰۰۰ ثابت کرد که گروه‌های موضعاً متناهی متعلق به $\mathcal{N}$ هستند اگر و تنها اگر مرکز-بواسطه-متناهی باشند.

ما این نتیجه را با اثبات قضیه زیر تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۸.۲.۲ *گروه G تعداد متناهی نرمالساز دارد اگر و تنها اگر مرکز - بواسطه- متناهی باشد.*

اگر G مرکز-بواسطه-متناهی باشد آنگاه طبق تعریف، تعدادی از زیرگروه‌های G که شامل $Z(G)$ هستند متناهی هستند از طرفی طبق یادآوری ۶.۲.۲ $Z(G)$ شامل در هر نرمالساز از G هست، پس $G \in \mathcal{N}$.

برعکس فرض کنید $G \in \mathcal{N}$ پس $G \in \mathcal{N}_n$ برای $n \in N$، پس طبق قضیه ۸.۲.۲ G یک FC-گروه است. بنابراین طبق تعریف FC-گروه به ازای هر $g \in G$ داریم: $|G : N_G^{(<g>)}| < \infty$. چون $G \in \mathcal{N}_n$ پس وجود دارد $g_1, ..., g_n \in G$ که لزومی ندارد از هم متمایز باشند با خاصیت زیر:

اگر $x \in G$، آنگاه داریم $N_G^{(<x>)} = N_G^{(<g_i>)}$ برای $i = 1, 2, ..., n$. زیرا اگر برای هر $x \in G$، g_i را $< x >$ اختیار کنیم. آنگاه هر عنصر g از G با $< x >$ جابه جا می‌شود. از طرفی چون اشتراکی از نرمالسازهای G، زیرگروهی از G است لذا

$$|G : \cap_{g\in G} N_G^{(<g>)}| = |G : \cap_{i=1,2,...,n} N_G^{(<g_i>)}|$$

همچنین طبق لم ۳.۲.۲

$$\Big|G : \bigcap_{i=1,2,...,n} N_G^{(<g_i>)}\Big| \leq \prod_{i=1,2,...,n} |G : N_G^{(<g_i>)}| < \infty.$$

لذا

$$\Big|G : \bigcap_{g\in G} N_G^{(<g>)}\Big| = \Big|G : \bigcap_{i=1,2...,n} N_G^{(<g_i>)}\Big| \leq \prod_{i=1,2,...,n} |G : N_G^{(<g_i>)}| < \infty.$$

حال در ادامه اگر ثابت کنیم G زیرگروهی مانند H داشته باشد به طوری که

$$|G : N_G^{(H)}| < \infty$$

آنگاه G مرکز-بواسطه-متناهی است، پس اگر $H \leq G$ باشد، آنگاه

$$\bigcap_{x\in H} N_G^{(<x>)} \leq N_G^{(H)}.$$

چون اگر

$$g \in \bigcap_{x\in H} N_G^{(<x>)}$$

آنگاه به ازای هر $x \in H$، $g \in N_G^{(<x>)}$، لذا به ازای هر $x \in H$ داریم

$$< x >^g = < x >$$

بنابراین به ازای هر $x \in H$

$$x^g \in < x >$$

لذا به ازای هر $x \in H$

$$x^g = x^i$$

بنابراین به ازای هر $x \in H$

$$g^{-1}xg = x^i$$

لذا به ازای هر $x \in H$، $xg = gx^i$ و از رابطه $g^{-1}xg = x^i$ به ازای هر $m \neq 0$ داریم

$$(g^{-1}xg)^m = x^{im} \to (g^{-1}x^m g) = x^{im}$$

لذا $x^{m(1-i)} = 0$ بنابراین $i = 1$ پس از $xg = gx^i$ داریم $xg = gx$. بنابراین به ازای هر $x \in H$ داریم $g \in N_G^{(H)}$، پس

$$\bigcap_{x \in H} N_G^{(<x>)} \leq N_G^{(H)}$$

از رابطه بدست آمده داریم

$$|G : N_G^{(H)}| \leq \left|G : \bigcap_{x \in H} N_G^{(<x>)}\right|$$

همچنین از روابط $N_G^{(<x>)} = N_G^{(<g_i>)}$ و

$$\left|G : \bigcap_{g \in G} N_G^{(<g>)}\right| = |G : \cap_{i=1,2,\ldots,n} N_G^{(<g_i>)}|$$

داریم

$$\left|G : \bigcap_{x \in H} N_G^{(<x>)}\right| \leq \left|G : \bigcap_{g \in G} N_G^{(<g>)}\right|$$

و چون در بالا ثابت کردیم

$$\left|G : \bigcap_{g \in G} N_G^{(<g>)}\right| < \infty$$

پس

$$|G : N_G^{(H)}| \leq \left|G : \bigcap_{x \in H} N_G^{(<x>)}\right| \leq \left|G : \bigcap_{g \in G} N_G^{(<g>)}\right| < \infty$$

پس

$$|G : N_G^{(H)}| < \infty$$