بسم الله الرحمن الرحیم

١٤٥٨٦، ـ٢٠٢٥٩٦٨

دانشکده فیزیک

گروه نظری

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک گرایش نظری

عنوان فارسی:

مکانیک کوانتومی ناجابجایی

عنوان انگلیسی:

Noncommutative quantum mechanics

استاد راهنما :

آقای دکتر حسین متولی

استاد مشاور:

آقای دکتر مهدی رضایی کرامتی

پژوهشگر:

امین رضایی اکبریه

شهریور ماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

با تشکر از دوست عزیزم:

سید محمد حسین قاضی الطباطبائی

نام خانوادگی : رضایی اکبریه	نام : امین
استاد راهنما : دکتر حسین متولی	استاد مشاور : دکتر مهدی رضایی کرامتی
عنوان پایاننامه : مکانیک کوانتومی ناجابجایی	
مقطع : کارشناسی ارشد رشته : فیزیک	گرایش : فیزیک نظری
دانشگاه : تبریز دانشکده : فیزیک تعداد صفحه : ۸۲	تاریخ فارغ التحصیلی : شهریور ۸۹
کلید واژه : مکانیک کوانتومی ناجابجایی ، کلاین – گوردن ، ضرب ستاره ، پتانسیل اسپایک ، روش نیکی فرو-یوارو	

چکیده :

هدف این پایاننامه بررسی مکانیک کوانتومی ناجابجایی و حل معادلات شرودینگر و کلاین – گوردن در فضای ناجابجایی است ابتدا مکانیک کوانتومی ناجابجایی و ضرب ستاره را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم . سپس با اعمال ضرب ستاره فضای جابجایی را به فضای ناجابجایی تبدیل کرده و معادله کلاین گوردن را در این فضا حل نموده و ویژه مقادیر و ویژه توابع پتانسیل های اسپایک و کولن را محاسبه می کنیم .

در این پایاننامه از روش نیکی فرو-یوارو برای حل معادلات دیفرانسیل ظاهر شده استفاده می کنیم . بنابراین در فصل دوم به مطالعه در باره روش نیکی فرو-یوارو می پردازیم . از آنجایی که روش فاکتوریزه کردن یک روش بسیار قدرتمند برای حل معادله شرودینگر می باشد در فصل سوم این روش را با استفاده از نیکی فرو-یوارو بدست می آوریم .

هدف ما از انجام این پایاننامه یافتن ساختارهای اختلالی در مکانیک کوانتومی به صورتی است که با رویکرد ناجابجایی در تشابه باشد و از این طریق می توانیم مفهومی فیزیکی برای فضای ناجابجایی بدست آوریم . در نتایج مسایل مطرح شده در این پایاننامه خواهیم دید که جملات اضافی حاصل از ناجابجایی فضا ، تعبیری همچون اختلال حاصل از یک میدان مغناطیسی خارجی خواهند داشت .

فهرست مطالب

در سالهای اخیر هندسه ی ناجابجایی[1] [۱] ،یکی از مهمترین زمینه های تحقیقاتی بوده است. بعضی از دانشمندان، کشف هندسه ی ناجابجایی در ریاضایات محض را اگر چه دیر ،ولی موازی با کشف نظریه ی کوانتوم مکانیک در فیزیک نظری دانسته اند.امروزه تحقیقات بسیار بنیادین وگسترده در این زمینه انجام می شود . هندسه ی ناجابجایی بوسیله ی ریاضیدان برجسته ی فرانسوی *آلن کن*[2] [۱-۲] گسترش یافت .کاربردهای متنوع این نظریه در زمینه های مدل استاندارد در فیزیک ذرات و هندسه ی فضا-زمان ناجابجایی در نظریه ی نسبیت ونظریه ی ریسمان وبه خصوص نظریه ی میدان های کوانتومی و... به صورت گسترده مورد تحقیق قرار گرفت.

در این پروژه برآن هستیم که تاثیرات ناجابجا کردن مختصات فضایی را در مسایل فیزیک کوانتومی و گرانش مورد مطالعه قرار دهیم.برای این منظور ابتدا به بررسی ضرب ستاره یا ضرب مویال می پردازیم تا بتوانیم جبر هایزنبرگ تعمیم یافته را بدست آوریم سپس به بررسی مسایل فیزیک کوانتومی ونظریه میدان های کوانتومی در فضای ناجابجایی می پردازیم. هدف ما از ارایه ی این پروژه پاسخ دادن به این سوال است که آیا می توان ساختارهای اختلالی در مکانیک کوانتومی را به صورتی یافت که با رویکرد ناجابجایی در تشابه باشد و از این طریق مفهومی فیزیکی برای فضای ناجابجایی اطلاق کرد.در راستای چنین مطلبی خواهیم دید که جملات اضافی حاصل از ناجابجا کردن فضا تعابیر گوناگونی همچون اختلال و..... خواهند داشت.

[1] -Noncommutative geometry
[2] -Alain Conne

درا ین پروژه سعی می کنیم که معادلات دیفرانسیل درجه ی دوم ظاهر شده را باروش نیکی فرو-یوارو[3] حل کنیم. با استفاده از روش مذکور معادلات موج مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی برای برخی از پتانسیل های حقیقی یا مختلط را می توان حل کرد .با استفاده از این مطالعات نشان می دهیم که کوانتوم ناجابجایی چگونه بدست می آید و همچنین در این پروژه خواص بعضی از پتانسیلها ی معروف و فیزیکی در مکانیک کوانتومی ناجابجایی در حوزه های نسبیتی و غیر نسبیتی را بررسی میکنیم . معادلات شرودینگر و کلاین گوردون حاصل در فضای ناجابجایی را با روش نیکی فرو-یوارو حل نموده و ویژه توابع و طیف انرژی را بدست می آوریم.

---

[3] - Nikiforov-Uvarov

فصل اول

بررسی منابع

مکانیک کوانتومی ناجابجایی

۱-۱- مقدمه

اولین ایده ی فضای ناجابجایی توسط پدر فیزیک کوانتومی ،*هایزنبرگ* مطرح شد وی طی یک مقاله ، ایده خود را به *ولفانگ پائولی* تشریح کرد. [۲-۳] سرانجام در سال ۱۹٤۷ یکی از شاگردان *اپنهایمر* به نام سیندر[4]توانست در مقاله ی خود [۱۰] صورت بندی جدیدی برای مکانیک کوانتوم ناجابجایی ارایه کند . سپس در سال ۱۹٤۸ *مویال*[5] با استفاده از توابع توزیع ویگنر[11] ،ضرب جدیدی موسوم به حاصلضرب مویال را پیشنهاد داد[٦]تا با استفاده از این ضرب جدید ،فضای ناجابجایی بدست آید. پس از سالها وقفه در این زمینه ، سرانجام هندسه ی ناجابجایی در سال ۱۹۸۰ توسط ریاضی دانانی چون *آلن کن* ، *ورونوویکز* [6] [۳۸و21]ودرین*فلدد*[7] احیا شد.[22] چند سال بعد با گسترش نظریه ابر-ریسمان فیزیکدانان نظری متوجه شدند که در حقیقت فیزیک ناجابجایی در نظریه ی ریسمان بخصوص در محاسبه ی دامنه ی پراکندگی ریسمانهای انرژی بالا مطرح می شود . در این خصوص می توان به مقالات [۵-۲۰] مراجعه کرد.در سال ۱۹۹۹ مقاله ی بسیار بنیادین توسط *ادوارد ویتن*

[4] -Hartland Snyder
[5] -Moyal
[6] -Woronowicz
[7] -Drinfel'd

[۱٤][8] و همکارش به چاپ رسید که آنها در این مقاله موفق به ارایه نظریه پیمانه ای در فضای ناجابجایی شدند.

۱-۲- فرمول بندی وایل - ویگنر[9]

اگر بخواهیم بطور خلاصه مبانی فیزیک ناجابجایی را بیان کنیم باید به این نکته اشاره کنیم که در حل مسایل فیزیکی در حالت نا جابجایی می توان با ا ستفاده از تعریف ضرب ستاره[10]، فضا ی جابجایی را تبدیل به حالت نا جابجایی کرد بدین منظور مطالعه ی ضرب ستاره ضروری به نظر می رسد. در مکانیک کوانتومی جابجایی ، روابط جابجایی بین عملگرهای xوp به صورت زیر است:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad [x_i, x_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \quad i, j = 1,2,\ldots, n. \tag{1.1}$$

که به جبر هایزنبرگ مشهور است و همین طور معادلات حرکت را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$[x_i, H] = \dot{x}_i \qquad\qquad [p_i, H] = \dot{p}_i \quad i, j = 1,2,\ldots, n. \tag{2.1}$$

که در آن هامیلتونی به شکل :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{3.1}$$

[8] - Edward Witten
[9] - Weyl-Wigner
[10] -Star product

است. حال اگر در معادله ی شرودینگر و فضا ی هیلبرت ، نوع ضرب را به ضرب مویال یا ضرب ستاره تغییر دهیم، می توانیم تاثیرات ناجا بجا کردن فضا را با استفاده از این ضرب جدید مشاهده کنیم .ضرب مویال یا ضرب استار،در بین دو تابع اختیاری به صورت زیر تعریف می شود :

$$(f*g)(u)=\exp\left[\frac{i\hbar}{2}\alpha^{ab}\partial_a^{(1)}\partial_b^{(2)}\right]f(u_1)g(u_2) \tag{4.1}$$

که در آن α ماتریس N*N پاد متقارن می باشد:

$$\alpha=\begin{pmatrix}\theta_{ij} & \delta_{ij}+\sigma_{ij}\\ -\delta_{ij}-\sigma_{ij} & \beta_{ij}\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

θ_{ij}و β_{ij} به ترتیب برحسب پارا مترها ی ناجابجایی مختصات و تکانه به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\theta_{ij}=\varepsilon_{ij}{}^{k}\theta_k \qquad\qquad \beta_{ij}=\varepsilon_{ij}{}^{k}\beta_k \tag{6.1}$$

در رابطه ی فوق σ_{ij} مثل دلتای کرونکر متقارن می باشد و مقدار آن هنگامی که $i=j$ باشد برابر یک می شود و درصورت نابرابر بودن اندیسها ، صفر می شود. با در نظر گرفتن این نوع جدید ضرب می توان رابطه ی جاجایی را به صورت زیر نوشت:

$$[f,g]_*=f*g-g*f \tag{7.1}$$

که با استفاده از روابط بالا ، جبر تعمیم یافته ی هایزنبرگ به دست می آید:

$$[x_i,p_j]=i\hbar(\delta_{ij}+\sigma_{ij}) \qquad [x_i,x_j]=i\hbar\theta_{ij} \qquad [p_i,p_j]=i\hbar\beta_{ij} \quad i,j=1,2,\dots,n. \tag{8.1}$$

اختلاف عمیقی بین ، فرمول بندی مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی برای یک سیستم فیزیکی وجود دارد . طبق اصل مکملیت ، وقتی که حالت حدی سیستم کوانتومی را بررسی می کنیم این اختلاف ژرف، از بین می رود . فرمول بندی وایل – ویگنر ، چارچوب مناسبی را برای تحلیل و آنالیز جنبه های این اختلاف ارایه می کند. اساس این فرمول بندی بر مبنای نگاشت وایل می باشد . با استفاده از این نگاشت می توان توابع تعریف شده بر روی فضای برداری حقیقی با ابعاد زوج را به عملگرهای روی فضای هیلبرت جداپذیر ،نگاشت:

$$\hat{\Omega} : F(s) \quad \rightarrow \quad O_P(H)$$

نگاشت وایل ، وارون پذیر است و وارون آن ،نگاشت ویگنر نامیده می شود. این نگاشت ها به وسیله ی استفاده از ثابت بنیادی $\hbar$ واستفاده از یک فضای برداری شناخته می شوند که این فضای برداری، " فضای فاز حامل سیستم کلاسیکی" نامیده می شود. این نگاشت دوسویه ، نگاشتی بین فضای مشاهده پذیرهای کلاسیکی و مشاهده پذیرهای کوانتومی محسوب می شود.

این دو فضا با هم تفاوت های بسیاری دارند قاعده ی ترکیب بین مشاهده پذیرهای کلاسیکی آبلی می باشد حال آنکه قاعده ی ضرب در مشاهده پذیرها ی کوانتومی ،غیر آبلی است.نگاشت وایل – ویگنر می تواند ضرب ناجابجایی مربوط به فضای عملگرهارا به ضرب نا جابجایی در مجموعه ای از توابع بر روی فضای فاز کلاسیک تبدیل کند.یا به عبارتی دیگر می توان گفت که جبر کوانتومی می تواند به صورت توابع بر روی فضای فاز کلاسیکی با ضرب ستاره-* نمایش داده شود.

برای اولین بار ضرب ستاره به وسیله ی نظریه ی کوانتش وایل به دست آمد اما در این بخش با رهیافتی متفاوت به تعریف ضرب ستاره می پردازیم. فرض کنید تابع $f(p_i,q_i)$ در فضای فاز کلاسیکی تعریف شده باشد عملگر وابسته به این تابع به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{f} = \Omega(f) = \int d^n\xi d^n\eta \quad \tilde{f}(\xi,\eta) e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{q}.\xi+\hat{p}.\eta)} \qquad (9.1)$$

$\tilde{f}(\xi,\eta)$ تبدیل فوریه ی f می باشد وعملگرهای $\hat{q}_i$ و $\hat{p}_i$ در رابطه ی جابجایی کانونی $[\hat{q}_i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ صدق می کنند. عملگر وارون را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\Omega^{-1}(\hat{f}) = \int d^n\xi d^n\eta\, tr(\hat{f} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{q}.\xi+\hat{p}.\eta)}) e^{i(\hat{q}.\xi+\hat{p}.\eta)} \qquad (10.1)$$

که در آن نماد tr، رد عملگرها در فضای نمایش فوک[11] می باشد.اکنون با توجه به تعریف عملگر وارون می توان حاصل ضرب جدیدی را بین عملگرها تعریف کرد:

$$f *_M g = \Omega^{-1}(\Omega(\hat{f})\Omega(\hat{g}))$$

این نوع ضرب در فضای فاز کلاسیکی به ضرب مویال[12] مشهوراست.

اگر $(\partial_I = (\partial_{q_i},\partial_{p_j}))$ $P^{IJ}\partial_I \wedge \partial_J$ ها ساختار پواسن برای فضای فاز کلاسیکی باشند.یا به عبارتی دیگر ،روابط $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$ و $\{f,g\} = P^{IJ}\partial_I f \partial_J g$ در این فضا برقرارباشند. آنگاه می توان رابطه ی (۱۰.۱)را به صورت زیر بازنویسی کرد:

11 - Fock
12 - Moyal

$$f *_M g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hbar)^n}{2^n n!} P^{I_1 J_1} ... P^{I_2 J_2} \partial_{I1} ....\partial_{In} f \partial_{J1} ....\partial_{Jn} g \quad (11.1)$$

مرجع بسیارمناسبی که می توان برای تشریح بیشتر این موضوع معرفی کرد مقاله ی [۲۳] و مراجع داخل آن می باشد. تعمیم این روند، کوانتش تغییرشکل یافته نامیده می شود برای کوانتیزه کردن فضای فاز لازم است که ضرب ستاره ی مناسبی را بین توابع تعریف شده روی این فضا ،پیدا کرد.ضرب مویال (11.1) حالت خاصی از ضرب ستاره -*- می باشد. برای تعریف کلی ضرب استار فرض کنید M خمینه [۱۳]ای با بعد متناهی باشد .ضرب ستاره -*- روی خمبنه M به صورت زیر تعریف می شود:

$$f * g = fg + \frac{h}{2} B_1(f,g) + (\frac{h}{2})^2 B_2(f,g) + ... \quad (12.1)$$

f,g توابع دلخواه روی خمینه M می باشندو B_i ها عملگرهای روی خمینه ی M هستند. h پارامتر دفرم نامیده می شود.البته این نوع تعریف در این کار پژوهشی چندان مورد توجه قرار نمی گیرد اما با استفاده از این تعریف (12.1) می توان چندین رابطه ی مهم را به اثبات رساند .می توان یک گروه پیمانه ای ذاتی را که روی ضرب ستاره -*-عمل می کند ، پیدا کرد :

$$f \rightarrow f + hD_1(f) + (h)^2 D_2(f) + ... \quad (13.1)$$

D_i ها عملگرهای دیفرانسیلی هستند. اگر D تبدیل خطی باشد که ضرب ستاره-*-قدیم را به ضرب -*-جدید بنگارد ، خواهیم داشت

$$f *' g = D^{-1}(D(f)D(g)) \quad (14.1)$$

[13] -Manifold

اگر طرفین رابطه ی (14.1) را برحسب پارامتر h بسط دهیم ، رابطه ی تبدیل عملگر B_1 را به دست می آوریم :

$$B_1^{'}(f,g) = B_1(f,g) + D_1(fg) - fD_1(g) - D_1(f)g \qquad (15.1)$$

می توان قسمت متقارن B_1 را به وسیله ی یک تبدیل خطی حذف کرد. بنابراین B_1 را می توان به صورت پاد متقارن در نظر گرفت و از نتیجه بحث می توان روابط مهم زیر را اثبات نمود:

$$[f,*g] = f*g - g*f = hB_1(f,g) + \cdots \qquad (16.1)$$

$$[f*g,*h] = f*[g,*h] + [f,*h]*g \qquad (17.1)$$

$$[f,*[g,*h]] + [h,*[f,*g]] + [g,*[h,*f]] = 0 \qquad (18.1)$$

۱-۲-۱- عملگرهای وایل و ضرب ستاره -*

در این بخش با استفاده از عملگرهای وایل[۲۴-۲۸] تعریف جدیدی از ضرب ستاره -* را ارایه می دهیم. برای تبدیل فضای جابجایی R^N به فضای نا جابجایی ، کافی است که عملگر های هرمیتی $\hat{x}^i$را جایگزین مختصات x^i کنیم. که $\hat{x}^i$ها در رابطه زیر صدق می کنند :

$$\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\theta^{ij} \tag{19.1}$$

در فضای نا جابجایی ، نماد وایل تابع دلخواه f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{W}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i} \tag{20.1}$$

$\tilde{f}(k)$ تبدیل فوریه ی تابع f در فضای جابجایی R^N می باشد:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^N x f(x) e^{-ik_i x^i} \tag{21.1}$$

بعنوان مثال آموزنده ، نماد وایل تابع $f(x) = e^{ik_i x^i}$ را محاسبه می کنیم:

$$\hat{W}[e^{ik_i x^i}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D k' d^D y}{(2\pi)^D} e^{ik'_i(\hat{x}^i - y^i)} e^{ik_i y^i}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d^D k' e^{ik'_i \hat{x}^i} \delta^{(D)}(k_i - k'_i)$$

$$= e^{ik_i \hat{x}^i} \tag{22.1}$$

اگر تابع f(x) حقیقی مقدار باشد عملگر وایل $\hat{W}[f]$ هرمیتی خواهد بود. با ترکیب روابط اخیر ،عملگر وایل را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\hat{W}[f] = \int_{\infty}^{+\infty} d^D x f(x)\hat{\Delta}(x) \qquad (23.1)$$

که در آن $\hat{\Delta}(x)$به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\Delta}(x) = \int_{\infty}^{+\infty} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_{i_i}(\hat{x}^i - x^i)} \qquad (24.1)$$

عملگر $\hat{\Delta}(x)$ هرمیتی است[۱۱] و پایه ها ی آمیخته برای عملگرها و میدان های تعریف شده روی فضا – زمان را توصیف می کند .در حالت جا بجایی یعنی وقتی $\theta^{ij} = 0$ است عملگر $\hat{\Delta}(x)$ به تابع $\delta^{(D)}(\hat{x} - x)$ تبدیل می شود و $\hat{W}[f]$ در حد $\theta^{ij} = 0$ به تابع $f(\hat{x})$ تبدیل می شود[۲۶-۲۷].برای ادامه ی بحث ،لازم است که خواص عملگر پاد هرمیتی مشتق خطی $\hat{\partial}_i$ را یادآوری کنیم:

$$[\hat{\partial}_i, \hat{x}] = \delta_i^{\ j} \quad , \quad [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0 \qquad (25.1)$$

پس از کمی محاسبه ی جبری می توان روابط زیر را به دست آورد:

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(x)] = -\partial_i \hat{\Delta}(x) \qquad (26.1)$$

$$[\hat{\partial}_i, \hat{W}[f]] = \int_{\infty}^{+\infty} d^D x \partial_i f(x)\hat{\Delta}(x) = \hat{W}[\partial_i f] \qquad (27.1)$$

با استفاده از این روابط و فرمول –BCH:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \qquad [\hat{A}, \hat{B}] = c \qquad (28.1)$$

(cیک عدد است) می توان کمیت $e^{v^i \hat{\partial}_i} \hat{\Delta}(x) e^{-v^i \hat{\partial}_i}$ را به طریق زیر محاسبه کرد:

$$e^{v^i\partial_i}\hat{\Delta}(x)e^{-v^i\partial_i} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{v^i\partial_i} e^{ik.\hat{x}^i} e^{-v^i\partial_i} e^{ik.x^i}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_i[\hat{x}^i-(x^i-v^i)]}$$

$$= \hat{\Delta}(x-y) \qquad (29.1)$$

از رابطه ی (29.1) برای محاسبه ی $tr\hat{W}[f]$ استفاده می کنیم:

$$tr\hat{W}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} d^D x f(x) \qquad (30.1)$$

در آن از شرط بهنجارش $tr\hat{\Delta}(x) = 1$ را اعمال کرده ایم. در این موارد عملگر tr معادل انتگرال گرفتن برروی فضای مختصات ناجابجایی $\hat{x}^i$ می باشد. اکنون می توان نتیجه ی مهم زیر را مطرح کرد :

نتیجه: *رد عملگرهای هرمیتی $\hat{\Delta}(y)$ و $\hat{\Delta}(x)$ در فضای ناجابجایی ،تابع دلتای دیراک می باشد:*

$$tr(\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)) = \delta^{(D)}(x-y) \qquad (31.1)$$

اثبات:

برای اثبات ابتدا حاصل ضرب $\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)$ را محاسبه می کنیم: