وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجـان
دانشـکده علـوم پـایه
گـروه ریاضـی کاربردی

رســـاله برای دریافت درجه دکتـــری
در رشـــته ریاضی کاربردی، گرایـش آنالیـــز عددی
زمینه پردازش تصویر

بازیابی تصاویر با استفاده از حل دستگاه معادلات خطی به روش تکراری HSS

استاد راهنـما:
دکتـر ناصر آقازاده

استاد مشـاور:
دکتر داود خجسته سالکویه

پژوهشــگر:
مهدی باستانی

فروردین ۱۳۹۴
تبـریز-ایران

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به پدر و مادر مهربانم،

به آنهایی که وجودشان مایه حیات من است؛

و تقدیم به برادر و خواهر عزیزم،

به آنهایی که محبتشان مایه امید من است.

آدرس الکترونیکی پژوهشگر[1]

سپاس گزاری...

شکر و سپاس **خدای بی‌همتا** را که تا این لحظه از زندگی مرا لحظه‌ای به حال خود رها نکرده و همواره وجودش در یکایک لحظات حیاتم باعث شده تا بتوانم قطره‌ای از دریای علم بی‌نهایتش را کسب نمایم.

ابتدا وظیفه خود می‌دانم از آموزش‌ها و زحمات استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه خود، جناب آقای **دکتر ناصر آقازاده**[2] صمیمانه تشکر و قدردانی کنم، که با صبر فراوان، همواره راهنما و راه‌گشای بنده در طول تحصیل و تکمیل این رساله بوده است. از جناب آقای **دکتر داود خجسته سالکویه**[3] که زحمت مشـــاوره این رساله را تقبل فرمودند و در طول دوران تحصیل همواره پشتیبان من بودند و نکته‌های ارزنده خود را نسبت به بنده در دوران تحصیل رواداشتند، کمال امتنان را دارم. از داوران محترم، آقای **دکتر مهرداد لکستانی**، **دکتر قدرت عبادی** و **دکتر علیرضا غفاری حدیقه** که زحمت داوری این رساله را بر عهده داشتند و با نکات ارزنده‌ی خود زمینه بهبود این رساله را فراهم نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از اساتید محترم گروه ریاضی جناب آقای **دکتر اسماعیل عابدی** و **دکتر بهروز خیرفام** که با رهنمودهای خود باعث تسهیل روند دفاع اینجانب شدند، کمال امتنان را دارم.

با تشکر بسیار از آقای دکتر **محمداسماعیل سامعی** که زحمت تهیه قالب این رساله در محیط زی‌پرشین را بر عهده گرفتند و با سپاس بی‌دریغ خدمت دوست گرانمایه‌ام آقای **داود نظری سوسهاب**، که همواره وجود دلگرم کننده ایشان امید راه بنده بود. در نهایت از **پدر** فداکار، **مادر** مهربان، **برادر** صبور و **خواهر** عزیزتر از جانم تشکر می‌کنم که با محبت خود بنده را در این راه یاری نمودند.

مهدی باستانی
تبریز - ایران

[1] bastani@azaruniv.ac.ir
[2] aghazadeh@azaruniv.ac.ir
[3] khojasteh@guilan.ac.ir

فهرست مطالب

چکیده

بازیابی تصویر یکی از مسائل مهم و بروز است که در علوم مختلفی از جمله پزشکی، مهندسی، نجوم و ... کاربرد دارد. در این رساله، ابتدا یک شکل جدیدی از این مساله را به صورت دستگاه معادلات خطی $Rx = g$ معرفی می‌کنیم که در آن R یک ماتریس معین مثبت غیرهرمیتی است. برای حل این دستگاه از روش تکراری هرمیتی و هرمیتی‌کج (HSS) استفاده خواهیم کرد. بعد از معرفی روش HSS، یک تعمیمی از این روش (GHSS) و حالت محدود شده‌ای از آن (RGHSS) برای مساله بازیابی تصویر استفاده می‌شود. همگرایی روش تعمیم یافته بررسی شده و مقدار بهینه در حالت محدود شده‌ای از آن بدست می‌آید. علاوه بر این، روش GHSS دو پارامتری (TGHSS) برای حل مسائل بازیابی تصویر و انتقال-انتشار ارائه شده و همگرایی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از چند مثال، نتایج روش‌های ارائه شده در این رساله با روش‌های کلاسیک مقایسه می‌شوند.

کلمات کلیدی: بازیابی تصویر، روش تکراری HSS، روش تکراری GHSS، همگرایی.

پیشگفتار

این یک دو سه روز نوبت عمر گذشت — چون آب به جویبار و چون باد به دشت
هرگز غم دو روز مرا یاد نگشت — روزی که نیامده‌ست و روزی که گذشت

حکیم عمر خیام

شاخه *بازیابی تصویر* در دهه ۵۰ و اوایل دهه ۶۰ میلادی توسط دو کشور اتحاد جماهیر شوروی و ایالات متحده آمریکا در راستای پیشبرد برنامه فضایی که داشتند، به صورت اساسی مطرح گردید. تصاویر بدست آمده از ماهواره‌ها دارای کیفیت خوبی نبودند و کمبود کیفیت تصاویر می‌توانست برای شرکتهای درگیر در این پروژه‌ها بسیار مضر باشد. بعنوان مثال، ۲۲ تصویر ارسالی از ماهواره *مارینر*[۱] در سال ۱۹۶۴ چیزی در حدود ۱۰ میلیون دلار قیمت گذاری شدند. در حالی که هر گونه کم شدن کیفیت آن تصاویر می‌توانست به ضرردهی شرکت‌های درگیر در پروژه منجر شود [۱۶]. واضح است که بازیابی تصویر تنها در تصویربرداری فضایی مطرح نیست. در بخش تصاویر پزشکی، بازیابی تصویر نقش بسیار عمده‌ای را ایفا می‌کند. از بین بردن نویز در تصاویر گرفته شده توسط اشعه X و تصاویر آنژیوگرافی[۲] [۲۸، ۴۰] و همچنین تصاویر گرفته شده توسط تشدید مغناطیسی[۳] (MRI) [۳۰، ۶۴] از دیگر کاربردهای شاخه بازیابی تصویر است. از دیگر کاربردهای جالب این شاخه می‌توان به کاربرد آن در ارتقای کیفیت فیلم‌ها و تصاویر قدیمی با کیفیت پایین اشاره کرد [۳۳].

بنا به کاربردهای بازیابی تصویر، این مساله اغلب به صورت یک مدل ریاضی در نظر گرفته می‌شود [۲، ۲۳، ۲۹، ۵۷، ۷۱]. بنابراین روش‌های ریاضی در بازیابی تصویر نقش عمده‌ای را ایفا می‌نمایند که به عنوان نمونه می‌توان به برخی از موارد که در ادامه مطرح می‌شوند، اشاره کرد. در سال ۱۹۶۷ *هلستروم*[۴] روش کمترین مربعات را برای بازیابی تصاویر لیزری مورد استفاده قرار داده است [۴۳]. *رینو*[۵] در سال ۱۹۶۹ از یک تقریب کمترین مربعات خطی برای بازیابی تصویر بهره برده است [۶۸]. *هو*[۶] و همکارش در [۴۴] از توابع پایه‌ای اسپلاین برای بهبود تصویر استفاده کرده‌اند. یک روش تکراری سریع برای بازیابی تصویر توسط *باکوشینسکی*[۷] در [۱۵] ارائه شده است. *مامری*[۸] و *سید-احمد*[۹] در [۵۴] از یک تکنیک جدید بر مبنای دامنه مکانی برای بهبود کیفیت تصویر استفاده کرده‌اند. در سال ۱۹۹۴، *آلوارز*[۱۰] و *مازورا*[۱۱] از *فیلتر ضربه‌ای و انتشار ناهمسانگرد* برای کاهش *نویز* در تصویر و سیگنال‌ها استفاده کرده‌اند [۵]. در [۲۵] از روش تکراری ADI[۱۲] برای بازیابی تصویر استفاده شده است. در سال ۱۹۹۵، *کم*[۱۳] و *ناگی*[۱۴] از حاصل‌ضرب کرونکر و تجزیه مقدار تکین برای بازیابی تصویر استفاده کردند [۴۷].

---

[۱] Mariner
[۲] Angiographic images
[۳] Magentic resonace imaging
[۴] Helstrom
[۵] Rino
[۶] Hou
[۷] Bakushinskii
[۸] Mameri
[۹] Sid-Ahmad
[۱۰] Alvarez
[۱۱] Mazorra
[۱۲] Alternating direction implicit
[۱۳] Kamm
[۱۴] Nagy

پنتینی[۱۵] جواب منظم‌سازی شده *تیخونوف*[۱۶] را به ازای نرم-۱ و نرم بی‌نهایت در [۶۵] بررسی کرده است. در سال ۲۰۰۰، *چان*[۱۷] و همکارانش روش مبنا-تغییرات کل[۱۸] از مرتبه بالا را معرفی کردند [۲۷]. در سال ۲۰۰۳، از روش یاد شده برای بازیابی تصاویر با شرایط موضعی استفاده شده است [۲۲]. در سال ۲۰۰۴، از روش ضرب کرونکر برای بازیابی تصویر در شرایط مرزی انعکاسی استفاده شده است [۶۱]. *انجی*[۱۹] و همکارش در سال ۲۰۰۵، از روش تکراری بر مبنای تبدیل کسینوسی برای رسیدن به تصویر با کیفیت بهتر استفاده کرده‌اند [۶۳]. *پرون*[۲۰] در سال ۲۰۰۶، تقریب حاصل‌ضرب کرونکر را برای شرایط مرزی پادانعکاسی بکار برده است [۶۶]. یک روش تقریبی بر اساس *موجک‌ها* توسط *چویی*[۲۱] و *وانگ*[۲۲] در [۳۱] ارائه شده است. در سال ۲۰۰۸، *ون*[۲۳] و همکارانش یک روش دو مرحله‌ای برای بازیابی تصویر ارائه دادند [۷۷]. بدین ترتیب که آنها در مرحله اول، یک تبدیل سریع برای کاهش مات شدگی تصویر ارائه و در مرحله دوم، از موجک‌ها و روش مبنا-تغییرات کل برای کاهش نویز تصویر استفاده کردند. *باربو*[۲۴] و همکارانش در سال ۲۰۰۹ روش تقریبی تغییراتی معادله دیفرانسیل جزئی را برای کاهش نویز و افزایش کیفیت تصویر ارائه داده‌اند [۱۷]. در سال ۲۰۱۲، یک روش دو مرحله‌ای بر مبنای موجک برای بازیابی تصویر ارائه شده است [۳۲]. اخیرا، یک حالت خاصی از روش تکراری هرمیتی و هرمیتی‌کج برای بازیابی تصویر ارائه شده است [۵۳]. در این روش جدید، به ازای حالت خاصی از روش HSS همگرایی بررسی شده و مقدار بهینه پارامتر مورد استفاده در این حالت بدست آمده است.

مروری مختصر بر بازیابی تصاویر

بازیابی تصویر یک مساله بسیار مهم در شاخه‌های مختلفی از علوم کاربردی از قبیل تصاویر پزشکی، لیزر، تصاویر میکروسکوپی و نجومی می‌باشد [۳۸، ۳۷، ۴۲، ۵۵، ۷۳]. در واقع می‌توان بازیابی تصویر را به عنوان فرآیندی بر روی تصویر مشاهده شده برای بهبود کیفیت آن و نزدیک‌تر شدن به تصویر اصلی دانست. به لحاظ ریاضی، یک مدل استاندارد خطی مستقل از مکان برای مساله بازیابی تصویر با در نظر گرفتن وجود نویز[۲۵] را می‌توان به صورت یک *معادله انتگرال فردهلم نوع اول* به شکل زیر بیان کرد [۵۲، ۷۲]:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-\xi,y-\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta+n(x,y), \qquad (۱)$$

که $g(x,y)$ تصویر مشاهده شده، $f(x,y)$ تصویر اصلی (بدون مات شدگی[۲۶] و نویز)، $h(x,y)$ (هسته کانولوشن[۲۷]) *تابع پخش نقطه‌ای*[۲۸] (PSF) و $n(x,y)$ نویز اضافه شده به تصویر است. در این رساله، PSF به صورت معلوم در نظر گرفته می‌شود اما اگر مقدار دقیق آن در اختیار نباشد می‌توان از روش‌های موجود در [۴۹] برای تقریب آن استفاده کرد. شکل گسسته معادله‌ی (۱) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$g(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}h(x-k,y-l)f(k,l)+n(x,y). \qquad (۲)$$

برای یک تصویر با محدوده‌ی مشخص، علاوه بر خود تصویر مشاهده شده، از یک سری فرضیات در بیرون از محدوده قابل مشاهده تصویر نیز استفاده می‌شود. این فرضیات که بر روی قسمت‌های بیرون از تصویر مشاهده

[۱۵] Pentini
[۱۶] Tikhonov
[۱۷] Chan
[۱۸] Total variation-based
[۱۹] Ng
[۲۰] Perrone
[۲۱] Chui
[۲۲] Wang
[۲۳] Wen
[۲۴] Barbu
[۲۵] Noise
[۲۶] Blurred
[۲۷] Convolution kernel
[۲۸] Point spread function

شده در نظر گرفته می‌شوند را *شرایط مرزی* می‌نامند. بنابراین می‌توان معادله (۲) را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$g = Af + \eta, \tag{۳}$$

که A یک ماتریس از بُعد $n^2 \times n^2$ مربوط به PSF و با شرایط مرزی مشخص است، f یک بردار n^2 بعدی است که نشان دهنده تصویر اصلی است، η نویز اضافه شده به تصویر و g تصویر مشاهده شده (*تصویر مات و نویزدار*) است. توجه می‌کنیم که ساختار دقیق ماتریس A به شرایط مرزی اعمال شده بر مساله بستگی دارد. به عنوان مثال، شرایط مرزی متناوب[۲۹]، منجر به یک ماتریس بلوکی چرخشی با بلوک‌های چرخشی[۳۰] (BCCB) می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط مرزی صفر[۳۱]، ماتریس A دارای ساختار بلوکی توپلیتز با بلوک‌های توپلیتز[۳۲] (BTTB) خواهد بود. در شرایط مرزی انعکاسی[۳۳]، ماتریس A دارای ساختار بلوکی توپلیتز-پلاس-هنکل با بلوک‌های توپلیتز-پلاس-هنکل[۳۴] (BTHTHB) خواهد بود.

دستگاه (۳) عمدتا *بدوضع* می باشد به این معنا که یا ممکن است معکوس پذیر نباشد و یا *بدشرط* باشد. یکی از روشهای معمول برای حل آن *روش منظم‌سازی تیخونوف*[۳۵] است. جواب منظم شده تیخونوف در واقع مینیمم کننده مساله زیر است:

$$\min_f \|Af - g\|_2^2 + \mu^2 \|Lf\|_2^2, \tag{۴}$$

که μ یک پارامتر مثبت (عمدتا کوچک و $0 < \mu < 1$) و L یک اپراتور کمکی است. در این رساله ما بر روی حالتی کار خواهیم کرد که در آن $L = I$. بنا به خواص مساله کمترین مربعات، می‌توان نشان داد که دستگاه زیر به صورت ریاضی با مساله (۴) معادل است:

$$(A^T A + \mu^2 I) f = A^T g. \tag{۵}$$

می‌توان دید که دستگاه (۵) با دستگاه $2n^2 \times 2n^2$ زیر که در مساله بازیابی تصویر مورد نظر ما مورد استفاده قرار می‌گیرد، معادل است:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & A \\ -A^T & \mu^2 I \end{bmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}}_{b} \tag{۶}$$

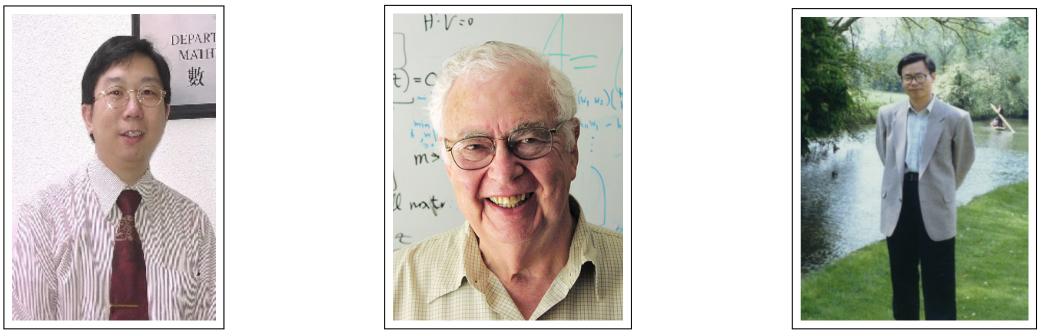
که $e = g - Af$ نشان دهنده مانده یا همان نویز اضافه شده است و R یک ماتریس معین مثبت غیرهرمیتی است.

هر ماتریس به مانند A می‌تواند به صورت مجموع یک ماتریس هرمیتی $H = \frac{1}{2}(A + A^T)$ و هرمیتی‌کج $S = \frac{1}{2}(A - A^T)$ شکافته شود. بنا به این شکافت، روش تکراری *هرمیتی و هرمیتی‌کج* (HSS) برای اولین بار در سال ۲۰۰۲ توسط *بای*[۳۶]، *گلوب*[۳۷] و *اِنجی*[۳۸] برای حل دستگاه‌های *معین مثبت غیرهرمیتی* معرفی شد [۹]. روش تکراری آنها برای حل دستگاه $Kx = b$ که در آن $K = H + S$ معین مثبت غیرهرمیتی است، به ازای بردار آغازین x_0 و $k = 0, 1, 2, \ldots$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} (\alpha I + H) x_{k+\frac{1}{2}} = (\alpha I - S) x_k + b, \\ (\alpha I + S) x_{k+1} = (\alpha I - H) x_{k+\frac{1}{2}} + b, \end{cases} \tag{۷}$$

که α یک ثابت مثبت، و H و S ماتریس‌های هرمیتی و هرمیتی‌کج هستند که قبلا مشخص شدند. در [۹] ثابت شد زمانی که ماتریس ضرایب دستگاه معین مثبت باشد، این روش به ازای هر α به جواب یکتای دستگاه همگرا

[۲۹] Periodic boundary conditions
[۳۰] Block circulant with circulant blocks
[۳۱] Zero boundary conditions
[۳۲] Block Toeplitz with Toeplitz blocks
[۳۳] Reflexive boundary conditions
[۳۴] Block Toeplitz-plus-Hankel with Toeplitz-plus-Hankel blocks
[۳۵] Tikhonov regularization method
[۳۶] Bai
[۳۷] Golub
[۳۸] Ng



(آ) پروفسور بای (ب) پروفسور گلوب (ج) پروفسور انجی

شکل ۱: *روش تکراری هرمیتی و هرمیتی‌کج توسط آقایان بای، گلوب و انجی معرفی گردید.*

است. این روش نیازمند حل دو دستگاه در هر مرحله است. در مرحله اول، دستگاهی با ماتریس ضرایب $\alpha I + H$ و در مرحله بعدی، دستگاهی با ماتریس ضرایب $\alpha I + S$ در نظر گرفته می‌شوند. اولین ماتریس معین مثبت هرمیتی است و اغلب خوش حالت است (حداقل به ازای αهای نه خیلی زیاد کوچک)، ولی دستگاه دوم غالبا مشکل‌ساز است.

در مساله بازیابی تصویر که مطرح گردید، ساختار ماتریس‌های H و S به گونه‌ای است که حل دستگاه‌های مربوط به آنها آسان‌تر است. در واقع، ماتریس ضرایب R در معادله (۶) می‌تواند به صورت زیر شکافته شود:

$$R = \begin{bmatrix} I & A \\ -A^T & \mu^۲ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & ۰ \\ ۰ & \mu^۲ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & A \\ -A^T & ۰ \end{bmatrix} = H + S. \qquad (۸)$$

حال بنا به تعریف H، حل اولین دستگاه در روش تکراری HSS به راحتی امکان‌پذیر است. برای حل دستگاه دوم نیز می‌توان از روش‌های تکراری استفاده نمود. یکی از این روش‌ها، *روش مانده مینیمال تعمیم یافته*[۳۹] (GMRES) است که به دلیل استفاده از ضرب ماتریسی-برداری بسیار مفید می‌باشد [۶۹].

مروری مختصر بر نسخه‌های مختلف روش تکراری هرمیتی و هرمیتی‌کج

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \qquad (۹)$$

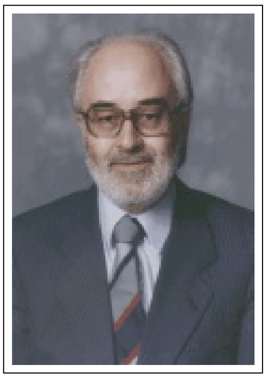
را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک *ماتریس تُنُک* با ابعاد بزرگ و معین مثبت غیرهرمیتی است و $x, b \in \mathbb{C}^n$. امروزه از روش‌های تکراری برای حل این گونه دستگاه‌ها استفاده می‌شود. روش‌های تکراری به دو دسته‌ی *ایستا* و *غیرایستا* تقسیم می‌شوند. یک روش تکراری ایستا برای حل دستگاه (۹) به صورت

$$x_{k+۱} = Gx_k + f, \qquad (۱۰)$$

نوشته می‌شود که در آن $x_۰$ یک حدس اولیه برای جواب دستگاه است. همانطور که ملاحظه می‌شود ماتریس تکرار روش، یعنی G، همیشه ثابت است.

[۳۹] Generalized minimal residual method

کلی‌ترین روش ایستایی که تاکنون ارائه شده است روش AOR[۴۰] [۳۹] می‌باشد که توسط *حاجیدیموس*[۴۱] ارائه شده است. این روش به دو پارامتر وابسته است که به ازای مقادیر خاصی از این پارامترها، روش‌های شناخته شده‌ی *ژاکوبی*[۴۲]، *گوس-سایدل*[۴۳] و *روش SOR*[۴۴] را نتیجه می‌دهد [۶۹، ۷۸، ۳۶]. روش‌های غیر ایستا روش‌هایی هستند که در آن ماتریس تکرار روش ثابت نیستند و در هر تکرار تغییر می‌کنند. از روش‌های غیرایستا می‌توان روش‌های *گرادیان مزدوج*[۴۵] (CG) و GMRES را نام برد [۶۹].



شکل ۲: *Hadjidimos*

از زمان معرفی روش تکراری HSS در [۹]، تاکنون، تعمیم‌ها و بهبودهای مختلفی برای افزایش کارایی این روش ارائه شده است. لازم به ذکر است که در [۹]، علاوه بر روش شکافت هرمیتی و هرمیتی‌کج[۴۶] (HSS)، نسخه‌ی تقریبی آن یعنی IHSS[۴۷] نیز ارائه شده است. روش HSS یک روش ایستا است، اما روش IHSS تلفیقی از یک روش ایستا و یک روش غیر ایستا است. آنها ثابت کردند که اگر ماتریس A معین مثبت غیرهرمیتی باشد، آنگاه روش HSS بدون هیچ شرطی همگرا خواهد بود. همین مساله توجه بسیاری از ریاضیدانان را به این روش تکراری جلب کرده است. توجه کنید که هر تکرار روش HSS شامل دو تکرار داخلی است که در هر کدام از آنها بایستی یک دستگاه معادلات خطی توسط روش‌های مستقیم مثل تجزیه‌ی LU حل شود. بنابراین استفاده از این روند تکراری بسیار پرهزینه است. برای رفع این مشکل می‌توان در حل دو دستگاه داخلی از روش‌های تکراری استفاده کرد که در این صورت الگوریتم IHSS ساخته می‌شود. به عنوان نمونه از بهبودهای این روش، می‌توان به این موارد اشاره کرد: در [۱۱]، روش تکراری هرمیتی و هرمیتی‌کج پیش‌شرط سازی شده، معرفی شده و برای حل دستگاه‌های نیمه معین مثبت غیرهرمیتی استفاده شده است. همگرایی همین روش توسط *بای* و همکارانش در [۸] بررسی شده است. یک شکل نادقیق از این روش در [۱۰] ارائه شده است.

بنزی[۴۸] یک تعمیم دیگر از این روش (GHSS)[۴۹] را در [۱۹] بر اساس شکافت جدید برای ماتریس ضرایب ارائه داده است. در واقع در روش GHSS، یک *شکافت* جدید برای قسمت هرمیتی ماتریس ارائه شده و روش HSS بهبود داده شده است. در سال ۲۰۱۲، تعمیمی از این روش، به صورت یک روش دو پارامتری برای تقریب جواب دستگاه‌های منفرد استفاده شده است [۵۰].

شکل ۳: *پروفسور بنزی*

بنزی در [۲۰] و *بای* و همکارانش در [۱۱] این روش را برای حل *مساله نقطه زینی* استفاده کردند که حوزه کاربرد روش HSS را به دستگاه‌های خطی نیمه معین گسترش می‌دهد. هم چنین با بررسی بیشتر این روش، *بای* و همکارانش در [۱۲] روش NSS[۵۰] را ارائه دادند. در

[۴۰] Accelerated Overrelaxtion
[۴۱] Hadjidimos
[۴۲] Jacobi
[۴۳] Gauss-Seidel
[۴۴] Successive Overrelxation
[۴۵] Conjugate Gradient
[۴۶] Hetmitian and skew-Hermitian splitting
[۴۷] Inexact Hetmitian and skew-Hermitian splitting
[۴۸] Benzi
[۴۹] Generalized HSS
[۵۰] Normal/skew-Hermitian splitting

[۵۳]، یک حالت خاصی از روش HSS (SHSS[۵۱]) برای حل مساله بازیابی تصویر (۶) ارائه شد که می‌توان آن را به شکل روش تکراری زیر خلاصه کرد:

$$\begin{cases} (\alpha I + H)x_{k+\frac{1}{2}} = (\alpha I - S)x_k + g, \\ (I+S)x_{k+1} = (\alpha I - H)x_{k+\frac{1}{2}} + g. \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{11}$$

رئوس مطالب و نتایج مستخرج از رساله

آشنایی با روش‌های تکراری HSS، GHSS و ارائه تعمیمی از آنها برای مساله بازیابی تصویر از مهمترین اهداف این رساله است. این رساله به پنج فصل تقسیم شده است:

فصل ۱ برخی تعاریف و قضایای مقدماتی جمع‌آوری شده است.

فصل ۲ مساله بازیابی تصویر و شرایط مرزی مورد استفاده در این رساله معرفی شده است.

فصل ۳ روش HSS و SHSS به طور کامل معرفی شده و همگرایی آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل ۴ روش GHSS برای مساله بازیابی تصویر به کارگرفته شده و یک حالت خاصی از آن مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل ۵ روش GHSS دو پارامتری برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت غیرهرمیتی معرفی شده و برای حل مساله بازیابی تصویر و *معادله انتقال-انتشار* استفاده شده است.

شایان ذکر است مشخصات مقالاتی که از این رساله حاصل شده‌اند در مراجع [۳، ۴] ذکر شده است. همچنین برای مطالعه بیشتر در زمینه بازیابی تصویر می‌توان به [۶] رجوع کرد که در آن روش جدیدی بر اساس تفاضلات متناهی فشرده برای بازیابی تصویر مطرح شده است.

[۵۱] Special Hermitian and skew-Hermitian splitting

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

۱.۱ مقـــدمه

با توجه به اینکه در این رساله از یک روش ریاضی برای بازیابی تصویر استفاده خواهیم کرد، لذا بیان یک سری تعاریف و مقدمات اولیه ریاضی ضروری به نظر می‌رسد. غالب این مفاهیم، در معرفی یا استفاده از روش‌های تکراری کاربرد خواهند داشت.

۲.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک نرم روی V تابعی است مثل $\|\cdot\|$ از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

۱) به ازای هر $x \in \mathbb{C}$ ، $\|x\| \geq 0$. بعلاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

۲) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$؛

۳) به ازای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $V = \mathbb{C}^n$، نرم را نرم برداری و در صورتی که $V = \mathbb{C}^{n\times n}$، نرم را نرم ماتریسی گوییم.

مثال ۲.۲.۱. *اگر $\|\cdot\|$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد، آنگاه*

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

یک نرم ماتریسی را تعریف می‌کند. این نرم را نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری گویند.

مثال ۳.۲.۱. *فرض کنید M یک ماتریس نامنفرد باشد. به سادگی می‌توان دید که $|||\cdot|||_M$ که برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ به صورت $|||x|||_M = \|Mx\|_2$ تعریف می‌شود یک نرم برداری است و نرم ماتریسی زیر را نیز خواهیم داشت:*

$$|||X|||_M = \|MXM^{-1}\|_2, \qquad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

تعریف ۴.۲.۱. یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V، تابعی است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V، یک اسکالر حقیقی (یا مختلط) (x,y) نسبت می‌دهد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

۱) (x,x) حقیقی باشد و $(x,x) \geq 0$. بعلاوه $(x,x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

۲) برای هر اسکالر λ، $(x,\lambda y) = \lambda(x,y)$؛

۳) برای هر $z \in V$، $(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$؛

۴) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

هر فضای برداری مختلط یا حقیقی که یک ضرب داخلی در آن تعریف شده باشد یک فضای حاصل‌ضرب داخلی نامیده می‌شود. همچنین به سادگی می‌توان دید که اگر V یک فضای حاصل‌ضرب داخلی با ضرب داخلی (x,y) باشد، آنگاه $\|\cdot\| = \sqrt{(.\,,.)}$ یک نرم روی V تعریف می‌کند.

مثال ۵.۲.۱. *برای هر دو بردار x و y در $\mathbb{C}^n$، ضرب داخلی استاندارد آنها به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i.$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید که $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ و $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$ دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت، *ضرب کرونکر* ماتریس A در ماتریس B را با نماد $A \otimes B$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1s}B \\ a_{21}B & a_{22}B & & a_{2s}B \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \\ a_{r1}B & a_{r2}B & \cdots & a_{rs}B \end{pmatrix}.$$

تعریف ۷.۲.۱. ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را *بالا* هسنبرگ گوییم هرگاه به ازای $i > j+1$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ را *پایین* هسنبرگ گوییم هرگاه به ازای $j > i+1$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. این ماتریس را توپلیتز می‌نامند هرگاه درایه‌های روی هر قطر آن ثابت باشند. به عبارت دیگر، شکل کلی ماتریس توپلیتز A به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & & \cdots & & a_0 \end{pmatrix}.$$

به همین ترتیب اگر هر سطر (یا ستون) ماتریس توپلیتز A به صورت تناوبی از سطر (یا ستون) قبلی باشد، آنگاه این ماتریس را ماتریس چرخشی می‌نامند. می‌توان شکل کلی ماتریس چرخشی A را به صورت زیر ارائه داد:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & & a_0 \end{pmatrix}.$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. این ماتریس را یک ماتریس هنکل می‌نامند هرگاه درایه‌های روی هر پاد قطر آن ثابت باشند.

مثال ۱۰.۲.۱. *فرض کنید که a_iها، $i = ۰, \dots, ۸$، اسکالرهای دلخواه باشند، آنگاه ماتریس A که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک ماتریس هنکل است.*

$$A = \begin{pmatrix} a_۰ & a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ \\ a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ & a_۶ \\ a_۳ & a_۴ & a_۵ & a_۶ & a_۷ \\ a_۴ & a_۵ & a_۶ & a_۷ & a_۸ \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر A یک ماتریس مربعی باشد، *چندجمله‌ای مشخصه* A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

قضیه ۱۲.۲.۱. *(قضیه‌ی کیلی- همیلتون[۱]) هر ماتریس مربعی A در چندجمله‌ای مشخصه‌ی خود صدق می‌کند. یعنی اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشد، آنگاه*

$$p(A) = ۰.$$

برهان. به [۷۴] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید که $A = (a_{ij})$ ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد. مزدوج ماتریس A به صورت $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ و ترانهاده مزدوج آن به صورت $A^H = \overline{A}^T$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۴.۲.۱. ماتریس A را هرمیتی گوییم هر گاه $A^H = A$ و آن را هرمیتی‌کج گوییم هرگاه $A^H = -A$.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید $\Re(z)$ قسمت حقیقی عدد مختلط z باشد. ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت گوییم هرگاه:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, x \neq ۰ \ : \ \ \Re(x^H A x) > ۰.$$

ماتریس A را معین مثبت هرمیتی (HPD) گویند هرگاه A هرمیتی بوده و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^H A x > ۰$. همچنین ماتریس A را نیمه معین مثبت هرمیتی گویند هرگاه A هرمیتی بوده و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^H A x \geq ۰$.

قضیه ۱۶.۲.۱. *اگر ماتریس مربعی A معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه خواهیم داشت:*

۱) *$A^{-۱}$ موجود و معین مثبت هرمیتی است.*

۲) *دترمینان ماتریس A مثبت است.*

۳) *درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A مثبت هستند.*

برهان. به [۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۷.۲.۱. *اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی هستند. بعلاوه A معین مثبت هرمیتی است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشند.*

---
[۱] Cayley-Hamilton

برهان. به [۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۸.۲.۱. مجموعه‌ی تمام مقادیر ویژه ماتریس A را *طیف* A می‌نامند و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند. بعلاوه *شعاع طیفی* ماتریس A را با $\rho(A)$ نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

قضیه ۱۹.۲.۱. *فرض کنیم λ یک مقدار ویژه $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد. دراین صورت برای هر نرم طبیعی $\|.\|$ داریم* $|\lambda| \le \|A\|$.

برهان. به [۱] مراجعه شود. ■

به عنوان یک نتیجه، برای هرماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و هر نرم طبیعی $\|.\|$ داریم $\rho(A) \le \|A\|$.

قضیه ۲۰.۲.۱. *برای هر ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، ماتریس $A^H A$ معین مثبت هرمیتی است.*

برهان. اثبات ساده است و از ارائه‌ی آن صرف‌نظر می‌شود. ■

قضیه ۲۱.۲.۱. *ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ معین مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس $A + A^H$ معین مثبت باشد.*

برهان. اثبات ساده است و از ارائه‌ی آن صرف‌نظر می‌شود. ■

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید $\lambda_۱ \ge \lambda_۲ \ge \cdots \ge \lambda_n \ge ۰$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A^H A$ باشند. قرار می‌دهیم

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

مقادیر $\sigma_۱ \ge \sigma_۲ \ge \cdots \ge \sigma_n \ge ۰$ را *مقادیر تکین* A می‌نامند.

قضیه ۲۳.۲.۱. *فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. اگر $\|\cdot\|_۲$ نرم ماتریسی تولید شده توسط نرم بردار اقلیدسی باشد، آنگاه*

$$\|A\|_۲ = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sigma_۱,$$

که در آن $\sigma_۱$ بزرگترین مقدار تکین A است.

برهان. به [۱] مراجعه شود. ■

به عنوان یک نتیجه، اگر A هرمیتی باشد آنگاه $||A||_۲ = \rho(A)$.

تعریف ۲۴.۲.۱. برای ماتریس نامنفرد A، *عدد وضعیت* (عدد شرطی) $\kappa(A)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa(A) = cond(A) = ||A||\ ||A^{-۱}||.$$

در صورتی که نرم ماتریسی نرم$-p$ باشد، داریم:

$$\kappa(A) = cond_p(A) = ||A||_p||A^{-۱}||_p.$$

اگر $cond(A)$ کوچک باشد، آنگاه دستگاه $Ax = b$ را یک دستگاه *خوش‌شرط* و در صورتی که $cond(A)$ بزرگ باشد دستگاه را بدشرط نامیم.

۳.۱ روش‌های تکراری ایستا

تعریف ۱.۳.۱. اگر A ماتریسی مربعی باشد، آنگاه $A = M - N$ یک شکافت برای ماتریس A گفته می‌شود هرگاه ماتریس M نامنفرد باشد.

دستگاه

$$Ax = b$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت برای A باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Longrightarrow \quad (M-N)x = b \\ &\Longrightarrow \quad x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $G = M^{-1}N$ و $f = M^{-1}b$. در این صورت روند تکراری

$$x_{k+1} = Gx_k + f, \tag{۱.۱}$$

را تعریف می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانیم، این رابطه شکل کلی یک روند تکراری ایستا برای حل دستگاه مذکور است که در آن G را ماتریس تکرار روش گویند. با حدس اولیه‌ی x_0 روند تکراری فوق دنباله‌ای مثل x_k تولید می‌کند که تحت شرایطی به جواب دستگاه همگرا می‌شود. قضیه‌ی زیر شرایط همگرایی دنباله‌ی مذکور را معین می‌کند.

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت از A باشد، $G = M^{-1}N$ و $f = M^{-1}b$. شرط لازم و کافی برای همگرایی روند تکراری ایستای $x_{k+1} = Gx_k + f$ به ازای هر حدس اولیه x_0 به جواب دستگاه $Ax = b$، این است که $\rho(G) < 1$ باشد.*

برهان. به [۶۹، ۱] مراجعه نمایید. ■

۴.۱ تولید بردارهای متعامد یکه با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت

در این بخش به صورت مختصر به معرفی فرآیند گرام-اشمیت می‌پردازیم [۱۸، ۱]. ابتدا قضیه زیر را ارائه می‌دهیم که بنا به آن یک بردار در فضای برداری را به آسانی می‌توان بر اساس ترکیب خطی از بردارهای متعامد نوشت.

قضیه ۱.۴.۱. *فرض کنیم V یک فضای حاصل‌ضرب داخلی باشد. اگر برداری چون v، ترکیبی خطی از یک دنباله‌ی متعامد از بردارهای غیرصفر $\{v_1, \ldots, v_m\}$ باشد، آنگاه v برابر است با ترکیب خطی*

$$v = \sum_{k=1}^{m} \frac{(v, v_k)}{\|v_k\|^2} v_k,$$

که $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$ و $(.,.)$ ضرب داخلی در V است.

برهان. ساده است و از ارائه آن صرف‌نظر می‌شود. ■

حال فرض کنیم $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در فضای حاصل‌ضرب داخلی V باشند. نشان می‌دهیم که می‌توان بردارهای متعامدی چون $\{u_1, \ldots, u_n\}$ را چنان در V ساخت که به ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$، مجموعه‌ی

$$\{u_1, \ldots, u_k\}$$

پایه‌ای برای زیرفضای پدید آمده توسط $\{v_1, \ldots, v_k\}$ باشد. بردارهای $\{u_1, \ldots, u_n\}$ با روندی معروف به فرآیند متعامدسازی *گرام-اشمیت*[۲]، بدست خواهند آمد. ابتدا قرار می‌دهیم $u_1 = v_1$، سپس بردارهای دیگر به طور استقرایی به صورت زیر بدست می‌آیند:

فرض کنیم مجموعه $\{u_1, \ldots, u_m\}$ $(1 \leq m < n)$ طوری انتخاب شده باشد که به ازای هر k،

$$\{u_1, \ldots, u_k\}, \quad 1 \leq k \leq m$$

پایه‌ی متعامدی برای زیرفضای پدید آمده توسط $\{v_1, \ldots, v_k\}$ باشد. برای ساختن بردار u_{m+1}، قرار می‌دهیم:

$$u_{m+1} = v_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(v_{m+1}, u_k)}{\|u_k\|^2} u_k.$$

آنگاه $u_{m+1} \neq 0$. زیرا در غیر این صورت v_{m+1} ترکیبی خطی از بردارهای $\{u_1, \ldots, u_m\}$ است و از این رو با توجه به رابطه اخیر، ترکیبی خطی از $\{v_1, \ldots, v_m\}$ خواهد بود که خلاف مستقل خطی بودن v_i-ها است. بعلاوه، اگر $1 \leq j \leq m$، آنگاه

$$\begin{aligned}
(u_{m+1}, u_j) &= (v_{m+1}, u_j) - \sum_{k=1}^{m} \frac{(v_{m+1}, u_k)}{\|u_k\|^2}(u_k, u_j) \\
&= (v_{m+1}, u_j) - (v_{m+1}, u_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

بنابراین، $\{u_1, \ldots, u_{m+1}\}$ مجموعه‌ی متعامدی متشکل از $m+1$ بردار غیر صفر از زیرفضای پدید آمده توسط $\{v_1, \ldots, v_{m+1}\}$ است. بنابراین این مجموعه پایه‌ای برای این زیرفضا است. نکته‌ی حائز اهمیت مطالب بالا این است که با فرض اینکه $\{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد آنگاه با استفاده از فرایند گرام-اشمیت پایه متعامد $\{u_1, \ldots, u_n\}$ را می‌سازیم. در نتیجه برای بدست آوردن یک پایه‌ی یکامتعامد کافی است به جای هر بردار u_k بردار $\frac{u_k}{\|u_k\|}$ را قرار دهیم. بنابراین با فرض اینکه $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V باشد، می‌توان روش گرام-اشمیت برای ساختن پایه‌ی یکامتعامد $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ برای V را به صورت الگوریتم ۱ خلاصه کرد. به عنوان یک کاربرد از روش گرام-اشمیت، در بخش بعدی خواهیم دید که این روش در ساخت یک پایه برای زیرفضای کرایلف به کار گرفته می‌شود.

۵.۱ زیرفضاهای کرایلف

در این بخش به معرفی زیرفضای کرایلف خواهیم پرداخت. بدین منظور خلاصه‌ای از مطالب گفته شده در [۱۸] را در اینجا مرور می‌کنیم.

---

[۲] Gram-Schmidt

الگوریتم ۱ الگوریتم گرام-اشمیت

1. $u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$
2. For $k = 2, \ldots, n$ Do
3. $\quad w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_i^H v_k) u_i$
4. $\quad u_k := \frac{w_k}{\|w_k\|}$
5. EndDo

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b \tag{۲.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن A یک ماتریس $n \times n$ نامنفرد است. با استفاده از قضیه‌ی کیلی-همیلتون می‌دانیم که جواب واقعی دستگاه یعنی $x^* = A^{-1}b$ در فضای

$$span\{b, Ab, ..., A^{n-1}b\},$$

قرار دارد. زیرا فرض کنید

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A باشد با توجه به قضیه کیلی-همیلتون داریم:

$$p(A) = 0 \Longrightarrow a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0,$$

بنابراین اگر $a_0 \neq 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A = -a_0 I, \\ \Longrightarrow \quad & A^{-1} = -\tfrac{1}{a_0}(a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \cdots + a_1 I), \\ \Longrightarrow \quad & x^* = A^{-1}b = -\tfrac{1}{a_0}(a_n A^{n-1}b + a_{n-1} A^{n-2}b + \cdots + a_1 b). \end{aligned}$$

بنابراین بردار x^* به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\{b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\}$ است. اما ممکن است که بردارهای $\{b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\}$ مستقل خطی نباشند، بنابراین:

$$x^* \in span\{b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\}.$$

در صورتی که x_0 یک حدس اولیه برای جواب واقعی دستگاه باشد، آنگاه خواهیم داشت $x^* = x_0 + \delta$ که در آن δ یک بردار n-تایی است. بنابراین کافیست که δ را به دست آوریم.

با جای‌گذاری x^* در معادله خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Ax^* = b \quad & \Longrightarrow \quad Ax_0 + A\delta = b \\ & \Longrightarrow \quad A\delta = b - Ax_0 = r_0 \\ & \Longrightarrow \quad A\delta = r_0. \end{aligned}$$