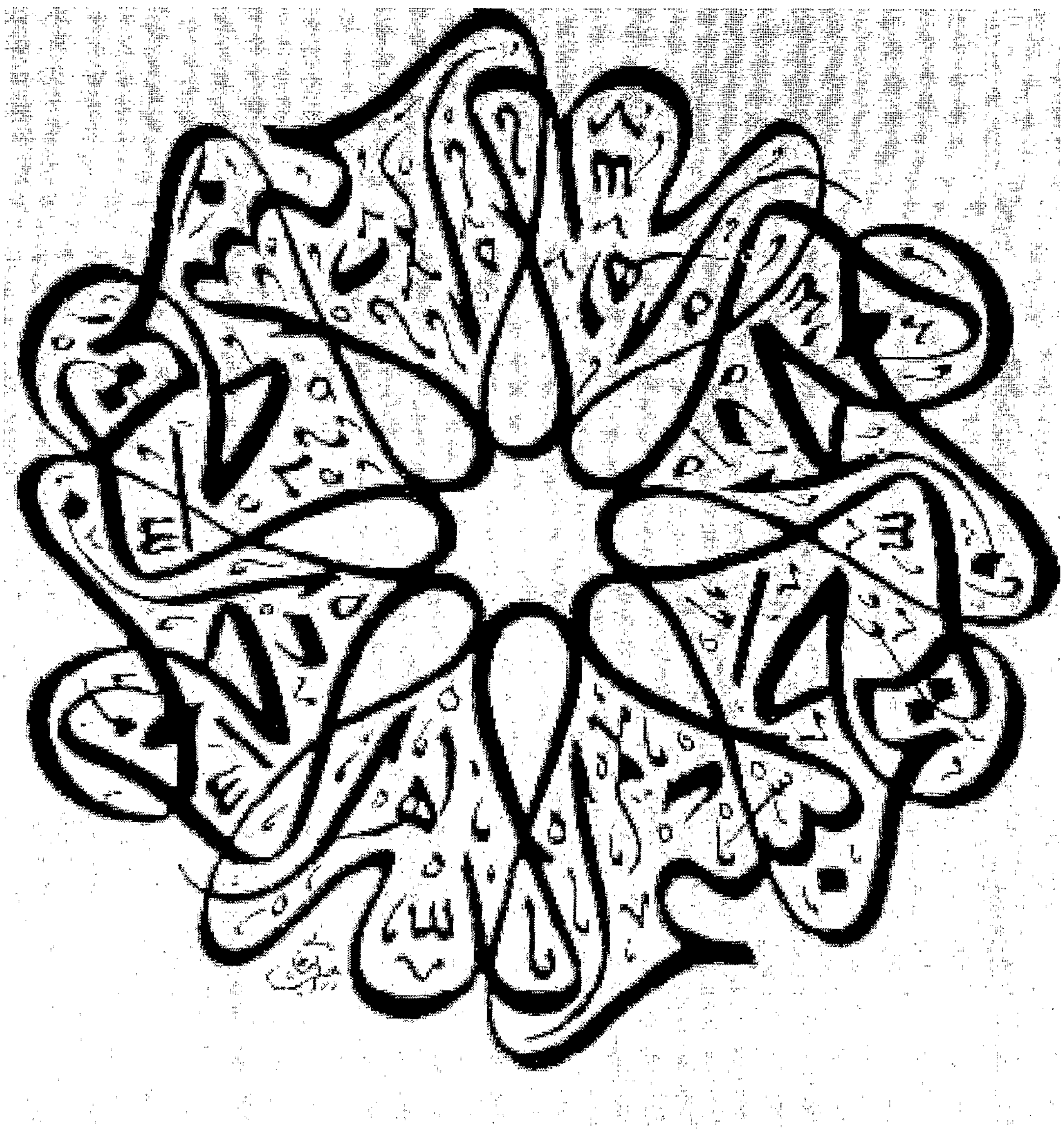

دانشگاه پیام نور

دانشکده:علوم پایه

گروه:ریاضی

عنوان پایان نامه:

روش های تکراری برای حل سیستم های خطی بزرگ

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته:ریاضی کاربردی

مؤلف:

مریم مهربانی

استاد راهنما:

دکتر جلیل رشیدی نیا

مهر ۱۳۸۷

دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور استان تهران

((تصویب نامه))

پایان نامه تحت عنوان :

" روشهای تکراری برای حل سیستمهای بزرگ خطی "

تاریخ دفاع :۸۷/۷/۹ , ساعت :۱۸/۳۰-۱۷/۳۰

نمره: هیجده و هفتاد و پنج صدم درجه :

اعضای هیات داوران :

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱-جناب آقای دکتر رشیدی نیا	استاد راهنما		
۲-سرکار خانم دکتر احمدی	استاد مشاور		
۳-جناب آقای دکتر نیسی	استاد داورخارجی		
۴- جناب آقای دکتر بیژن زاده	استاد داور داخلی		
۵-سرکار خانم دکتر ناجی	نماینده گروه		

تهران، خیابان انقلاب،
خیابان استاد نجات اللهی،
نبش خیابان سپند،
پلاک ۲۳۳
تلفن: ۸۸۸۰۱۰۹۰
دورنگار: ۸۸۹۰۳۱۵۸
پست الکترونیکی:
info@Tehran.pnu.ac.ir
نشانی الکترونیکی:
http://www.Tehran.pnu.ac.ir

نام خانوادگی دانشجو:مهربانی **نام**:مریم

عنوان پایان نامه:روش های تکراری برای حل سیستم های خطی بزرگ

استاد راهنما:دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور:دکتر خدیجه احمدی

مقطع تحصیلی:کارشناسی ارشد **رشته**:ریاضی **گرایش**:آنالیز عددی **دانشگاه**:پیام نور

دانشکده:علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی**: **تعداد صفحه**:

کلید واژه ها: سیستم های خطی بزرگ، روش های تکراری،همگرایی روش های تکراری،آنالیز خطا و کاربرد روش ها

چکیده: دراین پایان نامه به بررسی روش های تکراری برای حل سیستم های خطی با ابعاد بزرگ می پردازیم.علی رغم پیشرفت هایی که در بهبود اینگونه روش ها صورت گرفته است ،مشکلات بسیاری در فرایند محاسباتی وجود دارد که سبب اختلاف فاحش در جواب تقریبی نسبت به جواب واقعی می گردد.در سال های اخیر برای رفع اینگونه مشکلات،روش های جدیدی ارائه شده است که نسبت به روش های قبلی از سرعت بالاتر و دقت قابل توجهی برخوردارهستند.

لذا سعی کردیم ابتدا در فصل اول به طور اجمالی به بررسی مفاهیم اولیه و کلی روش های تکراری متداول بپردازیم در ادامه در فصل دوم به منظور شتاب بخشیدن به سرعت همگرایی روش تکراری(AOR)،انواع ماتریس های پیش حالت ساز را معرفی کرده،وهمگرایی روش فوق را همراه با این ماتریس ها بررسی می کنیم.در فصل سوم به توضیح درباره روش تناوبی فوق تخفیف تعمیم یافته (GSOR) می پردازیم و در فصل چهارم روش تکراری(GAOR)،برای حل مسائل حداقل مربعات بررسی می کنیم و در فصل پنجم روش تعمیم یافته شبهSOR (GSOR-LIKE)را برای مسائل حداقل مربعات به کار می بریم.

این پایان نامه اساساً بر پایه مطالب مندرج در مراجع [۲۲]و[۲۳]و[۲۴] استوار می باشد.

تقدیم به اولین آموزگارم پدر عزیزم که لطف بی دریغ اش سایه بانی است برای زندگی
وپیشکش به مادر عزیزم ،آن دریای عاطفه که نهال حیاتم را با عشق پیراست
و نیز ارمغانی است ناچیز به همسر فرزانه ام ،که به راستی شمع راهم شد
و درشتی راه تحقیق را برایم پرنیان نمود

تقدیر وتشکر

خداوند بزرگ را سپاس می گویم که با الطاف خویش مرا یاری کرد تا راهی را که آغاز کردم با موفقیت به پایان برسانم.

در نگارش این رساله از محضر برخی استادان و فرهیختگان مستفیض شدم که لازم می دانم تا مراتب قدردانی و سپا س بی کران خود را حضورشان ابراز نمایم.

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر جلیل رشیدی نیا کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

همچنین از سرکار خانم دکتر احمدی که پیش از این افتخار شاگردی ایشان را داشتم ،به عنوان استاد مشاور در این رساله ،ممنون و سپاسگزارم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه

مقدمه

مطالب مندرج در این پایان نامه در شش فصل تنظیم شده است.

چون در بسیاری از موارد با مسائلی مواجه هستیم که روش های تحلیلی برای حل دستگاه های خطی پاسخگو نیستندویااگر پاسخگو باشند زمان حل آنها آنقدر طولانی است که نیازمند تسریع در حل آنها هستیم بنابراین جواب تقریبی حاصل از روش های دیگر نیازمند دقت بیشتر و کنترل خطا است. از جمله اینگونه روش ها؛ روش های تکراری می باشد که به ما در حل مسائلی نظیر حل سیستم های خطی با ابعاد بسیار بزرگ یاری میرساند.علی رغم پیشرفت هایی که دربهبود اینگونه روش ها صورت گرفته است ،مشکلات بسیاری در فرآیند های محسباتی وجود دارد که سبب تفاوت فاحش در جواب تقریبی نسبت به جواب واقعی می گردد.بنابراین بهبود این روش ها ضرورت دارد.و در سال های اخیر مطالعات زیادی در این باره صورت گرفته است از جمله گسترش روش های مختلف مانند روش های (SOR) و(AOR) که میزان خطا در این روش ها رو به کاهش است.لذا در فصل اول به طور اجمالی روش های تکراری متداول برای حل دستگاه های منتج از معادلات انتگرال و معادلات با مشتقات جزئی بررسی می شود.

در فصل دوم به منظور افزایش سرعت همگرایی روش (AOR) از پیش حالت سازهای متفاوت استفاده می کنیم تا علاوه بر شتاب بخشیدن به سرعت همگرایی ،تعداد عملیات محاسباتی نیز کاهش یابد.

در فصل سوم روش (GSOR)مطرح می شود و همگرایی آن به طور مبسوط تحلیل می شود.

و در فصل چهارم،به بررسی روش (GAOR) برای حل مسائل حداقل مربعات می پردازیم وادامه این فصل را به مقایسه روش های(GSOR)و (GAOR) اختصاص می دهیم.

در فصل پنجم تعمیم روش تکراری شبه (SOR)را برای حل مسائل حداقل مربعات ارائه می کنیم.

در فصل آخر نتیجه گیری نهایی و پیشنهاد برای کارهای آینده مطرح می شود و در پایان مراجع مورد استفاده ذکر می گردد.

فصل اول

مقدمه ای بر روش های تکراری برای حل سیستم های خطی

۱-۱ مقدمه

در این بخش به بیان تعدادی تعاریف اساسی، و چگونگی به دست آوردن برخی از فرمول ها می پردازیم، که به ما در بررسی ، روش های تکراری برای حل دستگاه های خطی یاری می رسانند .

سیستم خطی زیر را در نظر می گیریم :

$$Ax = b \qquad (۱-۱)$$

که در آن ماتریس ضرایب دستگاه A ، نامنفرد است و بردارb داده شده است ، درصدد یافتن یک جواب برای سیستم (۱-۱) هستیم .

تعریف(۱-۱): روش تکراری

یک روش تکراری به دنباله ای از بردارهای $\{x^{(k)}\}$ $k = 0,1,...$ اطلاق می شود که انتظار می رود با تقریب اولیه $x^{(0)}$ داده شده به x جواب واقعی سیستم (۱-۱) همگرا شود .

تعریف(۱-۲): همگرایی روش تکراری

یک روش تکراری را همگرا گوییم هرگاه:

$$\lim_{k \to \infty} \left\| x - x^{(k)} \right\| = 0$$

در روش های تکراری ماتریس ضرایب سیستم ، A را به شکل زیر تجزیه می کنیم:

$$A = M - N$$

که M یک ماتریس نامنفرد است .

سپس دنباله $\{x^{(k)}\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \qquad (۱-۲)$$

و تقریب اولیه $x^{(0)}$ داده شده است .

چنانچه روش همگرا باشد ، آن گاه روش تکراری فوق به سمت جواب منحصر بفرد سیستم (۱-۱) همگرا می شود .

اکنون شرایطی برای همگرایی این دنباله از بردارها را مشخص می کنیم .

فرض می کنیم $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ بردار خطا در تکرار k ام باشد ، بنابراین اگر x جواب واقعی سیستم (۱-۱) باشد .

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$x^{(k)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

$$e^{(k+1)} = x - x^{(k)} = M^{-1}Nx + M^{-1}b - M^{-1}Nx^{(k)} - M^{-1}b = M^{-1}N(x - x^{(k)}) =$$

$$M^{-1}N(M^{-1}N(x - x^{(k-1)})) = \ldots = M^{-1}N^{(k+1)}e^{(0)} \qquad (۱-۳)$$

رابطه فوق به ما می گوید که روش تکراری به ازاء هر تقریب اولیه $x^{(0)}$ همگرا است ، اگر و فقط اگر

$$\lim_{k\to\infty}(M^{-1}N)^k=0$$

قضیه (۱-۱) : روش تکراری (۱-۲) به ازاء هر تقریب اولیه $\mathrm{x}^{(0)}$ همگرا است اگر و فقط اگر

$$\rho(M^{-1}N)<1$$

اثبات :

ثابت می کنیم $\lim_{k\to\infty}A^k=0 \leftrightarrow \rho(A)<1$

برای این منظور نشان می دهیم چهار گزینه زیر معادل اند

۱- $\lim_{k\to\infty}A^k=0$

۲- $\lim_{k\to\infty}A^k x=0 \qquad \forall x\in C\ ,\ x\neq 0$

۳- $\rho(A)<1$

۴- $\|A\|<1$

از ۱به۲:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^k x\right\|\leq \lim\left\|A^k\right\|\|x\|\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left\|A^k x\right\|=0\Rightarrow$$

$$\left\|\lim_{k\to\infty}A^k x\right\|=0\Rightarrow \lim_{k\to\infty}A^k x=0$$

از ۲ به ۳:فرض کنیم $\rho(A)\geq 1$ ، بنابراین یک مقدار ویژه مانند λ وجود دارد به طوریکه $|\lambda|\geq 1$

و اگر xیک بردار ویژه متناظر با λ باشد داریم: (منظور از $\rho(A)$ شعاع طیفی ماتریس Aاست)

$$Ax = \lambda x$$
$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$$
$$A^k x = \lambda^k x \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \lambda^k x \Rightarrow 0 = \lim_{k\to\infty} |\lambda|^k x$$

واین تناقض است لذا نتیجه می گیریم $\rho(A) < 1$.

از ۳به ۴:میدانیم برای هر $\varepsilon > 0$ نرمی سازگار مانند $\|.\|$ وجود دارد به طوری که

$$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$$
$$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon < 1$$

از ۴به ۱:

$$\|A^k\| \le \|A\|^k, \lim_{k\to\infty} \|A\|^k = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|A^k - 0\| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0$$

۱-۲ روش تکراری **SOR**

در این بخش روش تکراری فوق تخفیف متوالی (SOR) برای حل دستگاه خطی (۱-۱) مورد بررسی قرار می دهیم .

مجدداً سیستم خطی (۱-۱) را در نظر می گیریم :

$$Ax=b$$

که در آن $A \in R^{n\times n}, b \in R^n$

اگر ماتریس A را به شکل زیر تجزیه کنیم:

$$A = D - L - U$$

که U, L, D به ترتیب ماتریس های قطری ، اکیداً پایین مثلثی و اکیداً بالامثلثی، ماتریس A هستند .

مولفه های بردار x در (k+1) امین تکرار از روش SOR از دستور زیر محاسبه می شوند .

$$x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) + (1-w) x_i^{(k)} \qquad (۴-۱)$$

که در آن پارامتر w حقیقی است و $w > 0$

$$(D + wL)x^{(k+1)} = ((1-w)D - wU)x^{(k)} + wb \qquad (۵-۱)$$

ماتریس تکرار روش SOR را با L_w نشان می دهیم و برابر

$$L_w = (D + wL)^{-1}[(1-w)D - wU] \qquad (۶-۱)$$

قضیه (۱-۲) : اگر روش SOR همگرا باشد ، آن گاه $0 < w < 2$

اثبات :

ماتریس تکرار در این روش برابر است با :

$$L_w = (I + wD^{-1}L)^{-1}\left((1-w)I - wD^{-1}U\right)$$

ماتریس L_w یک ماتریس بالامثلثی با عناصر قطری $(1-w)$ است بنابراین

و $\det(L_w)$ حاصلضرب مقادیر ویژه L_w است پس

$$\det(L_w) = (1-w)^n$$

$$|1-w|^n \le \rho(L_w)^n$$

بنابراین

$$|1-w| \le \rho(L_w)$$

اگر روش SOR همگرا باشد $\rho(L_w) < 1$ پس نتیجه می گیریم :

$$|1-w| < 1 \Rightarrow 0 < w < 2$$

تعریف(۱-۳):ماتریس $[A]_{n\times n}$ را اکیداً غالب قطری گویند هرگاه:

$$\forall_i \ |a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

همچنین به سادگی می توان نشان داد اگر ماتریس ضرایب A ،اکیداً غالب قطری باشد و $0 < w \le 1$ آن گاه روش SOR همگر است .

اما مسئله مهم در پرداختن به روش SOR ، انتخاب پارامتر w است به طوریکه $\rho(L_w)$ مینیمم گردد این مسئله را Young [1] برای ماتریس های با درجه بسیار بزرگ حل کرد و ثابت کرد که مقدار بهینه W یعنی Wopt برابر

$$w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(j(A))^2}} \qquad (۷-۱)$$

که $\rho(j(A))$ شعاع طیفی ماتریس تکرار روش ژاکوبی است و

$$\rho(L_{w_{opt}}) = w_{opt} - 1$$

و همچنین نشان داد که اگر λ یک مقدار ویژه L_w باشد و μ یک مقدار ویژه $j(A)$ باشد آن گاه

$$(\lambda + w - 1)^2 = w^2 \mu^2 \lambda$$

رابطه (۱-۷) نشان می دهد که برای پیدا کردن Wopt باید $\rho(j(A))$ را در اختیار داشت اما در بسیاری از مسائل $\rho(j(A))$ را به راحتی نمی توان محاسبه کرد .

اما پس از مطالعات بسیاری که در این زمینه انجام شد سرانجام Hageman and young[2] در مدل مسئله خاص کتاب خود به رابطه ای برای تقریب w_{opt} که مستقل از $\rho(j(A))$ باشد دست یافتند که به صورت زیر است :

$$w_{opt} = \frac{2}{1+\sin(\pi h)} \quad , \quad \rho(l_w) = \frac{1-\sin(\pi h)}{1+\sin(\pi h)}$$

و نتیجه گرفتند

$$\rho(L_{wopt}) = 1 - 2\pi h + 0(h^2)$$

۱-۳روش تکراری AOR[1]

دستگاه خطی $Ax=b$ را در نظر می گیریم،

که $x,b\in R^n, A\in R^{n\times n}$ و درایه های روی قطر اصلی A مخالف صفراند .

در سال ۱۹۷۸ ، Hodjidimos [3] ، روش تکراری SOR را برای حل دستگاه خطی فوق ، با به کارگیری دو پارامتر تعمیم داد و روشی با نام AOR را پایه گذاری کرد .

در این روش اگر ماتریس ضرایب A را به شکل زیر تجزیه کنیم :

$$A=D-A_L-A_U$$

که $D, -A_L, -A_U$ به ترتیب ماتریس های قطری ، اکیداً پایین مثلثی و اکیداً بالامثلثی هستند . آن گاه بردار x در (k+1) امین تکرار از دستور زیر محاسبه می شود :

$$x^{(k+1)}=(I-rI)^{-1}\left((1-w)I+(w-r)L+wU\right)x^{(k)}+w(I-rL)^{-1}D^{-1}b \qquad (۱-۸)$$

ماتریس تکرار روش AOR را با $L_{r,w}$ نمایش می دهیم و

$$L_{r,w}=(I-rL)^{-1}\left((1-w)I+(w-r)L+wU\right) \qquad (۱-۹)$$

که

$$L=D^{-1}A_L \qquad , \qquad U=D^{-1}A_U$$

و r,w اعداد حقیقی هستند و $w>0$

اگر $r=w$ آن گاه روش AOR به روش SOR تبدیل خواهد شد .

همگرایی روش AOR در مرجع[3] به تفصیل شرح داده شده است .

---

[1] - Accelerated overrelaxation method

فصل دوم

بهبود روش تکراری AOR با انواع ماتریس های پیش حالت ساز

۲-۱ مقدمه

سیستم خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$Ax=b \qquad (۲-۱-۱)$$

که $b\in R^n, A\in R^{n\times n}$ و بردار $x\in R^n$ مجهول است .

همان طور که در فصل قبل بیان شد شعاع طیفی ماتریس تکرار ، تعیین کننده همگرایی و پایداری یک روش تکراری است . و همچنین یک روش تکراری همگرا است اگر و فقط اگر شعاع طیفی ماتریس تکرار آن کمتر از یک باشد . در این فصل نشان خواهیم داد که با قراردادن پیش شرط های معین و مشخصی برای سیستم خطی (۲-۱-۱) شعاع طیفی ماتریس تکرار کاهش می یابد و ما در جهت بهبود سرعت همگرایی گام برداشته ایم .

به این معنی که با ضرب ماتریس پیش حالت ساز P در سیستم (۲-۱-۱) خواهیم داشت :

$$PAx=Pb$$

P یک ماتریس نامنفرد است .

و ماتریس PA را به شکل زیر تجزیه می کنیم:

$$PA=M_P-N_P$$

M_P وارون پذیر است .

بنابراین خواهیم داشت

$$x^{(k+1)} = M_p^{-1} N_p x^{(k)} + M_p^{-1} P b$$

در ادامه نشان خواهیم داد که روش تکراری فوق به منظور شتاب بخشیدن به سرعت همگرایی روش هـای متداول تکراری صورت می گیرد و بدون اینکه به کلیـت مـسئله خدشـه ای وارد شـود مـاتریس ضـرایب سیستم (۲-۱-۱) را به شکل زیر تجزیه می کنیم .

$$A = I - L - U \qquad (۲-۱-۲)$$

که در آن I ماتریس واحد $-L,-U$ به ترتیب ماتریس های اکیداً پایین مثلثی و اکیداً بالامثلثی هستند .

روش AOR برای حل سیستم خطی (۲-۱-۱) به شکل زیر بیان شد .

$$x^{(k+1)} = (I - rL)^{-1}\big((1-w)I + (w-r)L + wU\big)x^{(k)} + (I - rL)^{-1} wb$$

که r, w پارامترهای حقیقی هستند $w \neq 0$

در بخش های بعد ، ثابت خواهیم کرد که با درنظر گرفتن ماتریس های پـیش حالـت سـاز P بـرای حـل سیستم خطی (۲-۱-۱) سرعت همگرایی روش AOR قابل افزایش است .

۲-۲ بهبود روش تکراری **AOR** با ماتریس های پیش حالت ساز P_2, P_1

ابتدا به بیان چند تعریف و نتایج آنها می پردازیم .

تعریف (۲-۲-۱): ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ را نامنفی گویند هرگاه $a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1,2,\dots,n$ و با نماد $A \geq 0$ نمایش می دهند .

تعریف (۲-۲-۲): اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ آن گاه $A \geq B$ هرگاه برای هر i,j=1,…,n داشته باشیم $a_{ij} \geq b_{ij}$

تعریف (۲-۲-۳) : ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را یک L- ماتریس گویند هرگاه

$$\begin{cases} a_{ii}>0 & i=1,\dots,n \\ a_{ij}\le 0 & i,j=1,\dots,n \end{cases}$$

تعریف (۲-۲-۴): ماتریس A را یک ماتریس تحویل ناپذیر گویند هرگاه گراف جهت دار و ابسته به آن همبند قوی باشد .

لم (۲-۲-۱) : اگر ماتریس $A\in R^{n\times n}$ تحویل ناپذیر و نامنفی باشد آن گاه :

۱) ماتریس A ، دارای یک مقدار ویژه حقیقی و مثبت است که با $\rho(A)$ برابر است .

۲) برای $\rho(A)$ یک بردار ویژه $x>0$ متناظر است .

۳) $\rho(A)$ یک مقدار ویژه ساده A است .

۴) با افزایش مقدار درایه های ماتریس A ، مقدار $\rho(A)$ نیز افزایش پیدا می کند .

اثبات : مرجع [4] را ببینید .

لم(۲-۲-۲) : اگر ماتریس $A\in R^{n\times n}$ نامنفی باشد $(A\ge 0)$ آن گاه :

۱) اگر $\alpha x\le Ax$ و $x>0$ آن گاه $\alpha<\rho(A)$

۲) اگر $Ax\le \beta x$ و $x\ge 0$ آن گاه $\rho(A)\le\beta$

۳) اگر ماتریس A ، تحویل ناپذیر نیز باشد و $\alpha x<Ax<\beta x$, $x>0$ آن گاه $\alpha<\rho(A)<\beta$

اثبات : فصل دوم از مرجع [5] ببینید .

اکنون ماتریس های پیش حالت ساز P_2,P_1 را معرفی کرده و در ادامه همگرایی روش AOR را همراه با این پیش شرط ها بررسی می کنیم .

$$P_1=I+S_1 \qquad (۲-۲-۱)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ -a_{n1} & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲-۲-۲)$$

و قرار می دهیم :

$$\bar{b} = (I+S_1)b \ , \ \bar{A} = (I+S_1)A \qquad (۲-۲-۳)$$

بنابراین

$$\bar{A}x = \bar{b} \qquad (۴-۲-۲)$$

و

$$P_2 = I + S_2 \qquad (۵-۲-۲)$$

بنابراین

$$A'x = b' \qquad (۸-۲-۲)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & -a_{1n} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \qquad (۶-۲-۲)$$

وقرار می دهیم:

$$A' = (I+S_2)A \qquad , \qquad b' = (I+S_2)b \qquad (۷-۲-۲)$$

بنابراین