



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک اتمی و ملکولی (اپتیک و لیزر)

پدیده های مغناطوآپتیکی در بلورهای فوتونیک

استاد راهنما:

دکتر عبدالرحمن نامدار

استاد مشاور:

دکتر کاظم جمشیدی قلعه

پژوهشگر:

سهیلا کشکی زاده

بهمن ۱۳۹۰

تبریز - ایران

اسلامی

تقدیم ہے:

مادر عزیزم

پدر فداکارم

ہمسفر مہربانم

سپاس گذاری:

به نام آنکه هستی نام ازو یافت

فلک جنبش، زمین آرام ازو یافت

سپاس پروردگاری را که ما را به اندیشیدن، به تفکر و تعقل و استدلال و حقیقت بینی راهنمایی کرد، تا با پی بردن به علم و حکمتش، هر چند ناچیز حق عاشق در برابر معشوق را به جای آوریم.

همچنین از اساتید محترم آقایان دکتر عبدالرحمن نامدار، دکتر کاظم جمشیدی نهایت تشکر و سپاس گذاری را دارم که با صبر و حوصله بنده را در پیشبرد این پایان نامه یاری نموده اند.

در نهایت از پدر و مادر عزیزم که نه تنها پایان نامه بلکه همه زندگیم را مدیون آنها هستم، قدرانی می کنم.

فهرست مطالب

| صفحه | عنوان |
|---------|--|
| یک..... | چکیده |
| ۱..... | مقدمه |
| ۳..... | فصل ۱ مقدمه‌ای بر اپتیک بلورهای فوتونیکی |
| ۴..... | مقدمه |
| ۴..... | ۱-۱- بلورهای فوتونیکی |
| ۷..... | ۲-۱- انتشار امواج الکترومغناطیسی در لایه‌های متناوب |
| ۸..... | ۱-۲-۱- قطبش |
| ۸..... | ۲-۲-۱- روش ماتریس انتقال برای انتشار امواج الکترومغناطیسی در لایه‌های متناوب |
| ۱۵..... | ۳-۱- موجهای بلاخ و ساختار گاف |
| ۱۹..... | ۴-۱- انتشار امواج در محیط‌های متناوب |

| | |
|----|---|
| ۲۳ | ۱-۵- اساس گاف باندهای فوتونیک |
| ۲۴ | ۱-۶- اپتیک و فوتونیک در طبیعت |
| ۲۸ | فصل ۲ انتشار امواج الکترومغناطیسی در مواد ناهمسانگرد |
| ۲۹ | مقدمه |
| ۲۹ | ۲-۱- تانسور دی‌الکتریک در مواد ناهمسانگرد |
| ۳۲ | ۲-۲- انتشار موج تخت در مواد ناهمسانگرد |
| ۳۶ | ۲-۲-۱- خواص ارتوگنالیته ویژه مدها |
| ۳۶ | ۲-۳- سرعت فاز، سرعت گروه و سرعت انرژی |
| ۳۸ | ۲-۴- طبقه‌بندی مواد ناهمسانگرد (بلورها) |
| ۴۱ | ۲-۵- انتشار نور در بلور تک محوری |
| ۴۵ | ۲-۶- دوشکستی در مرز |
| ۴۶ | ۲-۷- انتشار نور در بلورهای دوشکستی |
| ۵۱ | ۲-۸- چرخش فارادی |
| ۵۲ | ۲-۹- تحلیل مد کوپل شده موج منتشره در محیط ناهمسانگرد |
| ۵۸ | فصل ۳ پاسخ نوری فیلم دی‌الکتریک غیرخطی |
| ۵۹ | مقدمه |
| ۶۰ | ۳-۱- شرح مسئله |
| ۶۱ | ۳-۲- معادله‌ی موج اصلی |
| ۶۴ | ۳-۳- شرایط مرزی |
| ۷۲ | ۳-۴- بحث و نتایج |
| ۸۰ | فصل ۴ خواص تراگسیلی غیرخطی بلور مغناطو-فوتونی |
| ۸۱ | مقدمه |
| ۸۱ | ۴-۱- آشنایی |
| ۸۳ | ۴-۲- ساختار و فرمول بندی مساله |
| ۸۶ | ۴-۳- محاسبات عددی برای حالت $\lambda_2 < 0$ |

| | |
|---------|---|
| ۸۹..... | ۴- محاسبات عددی برای حالت $\lambda_2 > 0$ |
| ۹۲..... | نتیجه گیری |
| ۹۳..... | فهرست منابع |
| | Abstract |

چکیده

در این پایان نامه خواص تراگسیلی غیر خطی در یک بلور مغناطوفوتونی شامل ماده مغناطیسی غیر خطی را به طور نظری مطالعه می کنیم رفتار وابسته به قطبش تراگسیل موج الکترومغناطیسی را در لبه گاف باند بررسی می کنیم. نشان می دهیم که تراگسیل هر دو مولفه قطبش دارای خواص چند پایایی بوده و تبهگنی در تراگسیل بر حسب مولفه مختلف به علت اثر مغناطو اپتیکی جا به جا می شود. همچنین نشان می دهیم که در در ساختار مغناطو فوتونی مورد مطالعه برای قطبش های مختلف سالیتون های متفاوت حاصل می شود. لذا تراگسیل تشدید یافته نتیجه جفت شدگی میان موج فرودی و سالیتون است.

کلید واژه- اثر مغناطو اپتیکی، چند پایایی، سالیتون

بلورهای فوتونیک ساختارهایی هستند که ضریب شکست آنها بطور متناوب تغییر می‌کند. اگر این تکرار در یک بعد باشد به بلور تشکیل شده بلور فوتونیک^۱ یک بعدی و اگر در دو یا سه بعد باشد بلور فوتونیک دو و سه بعدی گوئیم بلورهای فوتونیک از عبور امواج الکترومغناطیسی در بازه‌ی فرکانسی خاصی، جلوگیری می‌کنند. چنین گافی که یک ناحیه‌ی فرکانسی غیرمجاز برای امواج الکترومغناطیسی است یک گاف باند فوتونیک^۲ نامیده می‌شود اگرچه بلورهای فوتونی در واقع از سال ۱۸۸۷ مورد مطالعه قرار گرفته اند، ولی عبارت "بلورهای فوتونیک" برای اولین بار ۱۰۰ سال بعد، زمانی که الی یابلانویچ^۳ مقاله مشهور خود درباره بلورهای فوتونی را در سال ۱۹۸۷ منتشر کرد [۱]، مورد استفاده قرار گرفت. قبل از سال ۱۹۸۷ بلورهای فوتونی یک بعدی به صورت پشته‌های چند لایه متناوب از مواد دی‌الکتریک به طور گسترده مورد مطالعه قرار می‌گرفت هرچند بدان نام بلورهای فوتونی اطلاق نمی‌گرفت. بلورهای فوتونیک به دلیل ویژه گی های خاص نظیر وجود گافهای ممنوعه در طیف فرکانسی در انتشار امواج الکترومغناطیسی از اهمیت و توجه خاصی برخوردار است [۱۲-۲]. این بلورها دارای کاربردی های در موارد مختلف مانند دیود های اپتیکی، کلید زنی های نوری و وسایل تمام نوری هستند. تاکنون مطالعات معطوف محیطهای همسانگرد بوده‌اند. بلورهای مغناطو اپتیکی بلور فوتونی است که شامل مواد مغناطیس نوری است به طوری که پاسخ های نوری از دستگاه بستگی به مغناطیس ماده مغناطو اپتیکی^۴ دارد. در واقع اثر مغناطو اپتیکی، مطالعه اثر یک میدان مغناطیس بر خواص خاصی از نور از جمله قطبش است که می توان با استفاده از رزونانس نوری افزایش داد در این پایان نامه ما بلور های فوتونیک شامل

Photonic Crystal^۱
 Photonic Band Gap^۲
 E.Yablonovitch^۳
 Magneto-optical^۴

مواد مغناطیسی ناهمسانگرد را در نظر می‌گیریم و به مطالعه انتقال انرژی از طریق بلورهای ناهمسانگرد و اثری که بر روی قطبش و خواص اپتیکی ناشی از می‌پردازیم. حضور مواد ناهمسانگرد مغناطیسی برای مطالعه پدیده‌هایی نظیر اثر فارده ضرورت داشته و نتایج حاصل برای اهداف کاربردی اهمیت دارد.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر اپتیک بلورهای فوتونیک

در دو دهه ی گذشته مرز جدیدی با هدف کنترل بشر بر خواص مواد پدید آمده که کنترل خواص اپتیکی مواد است. اگر بتوانیم موادرا طوری مهندسی کنیم که نور منتشر نشود و یا فقط در جهت های خاصی منتشر شود یا در نواحی ویژه ای جایگزیده شود در این صورت یک فناوری مفیدی را بوجود آورده ایم. قبلا کابل های فیبر نوری که نور را به سادگی هدایت می کردند، صنعت مخابرات را بطور جدی متحول کردند. لیزرها، کامپیوترهای سرعت-بالا و طیف نمایی زمینه هایی هستند که دقیقا از مزایای پیشرفت در موارد اپتیکی بهره می برند [۱۳].

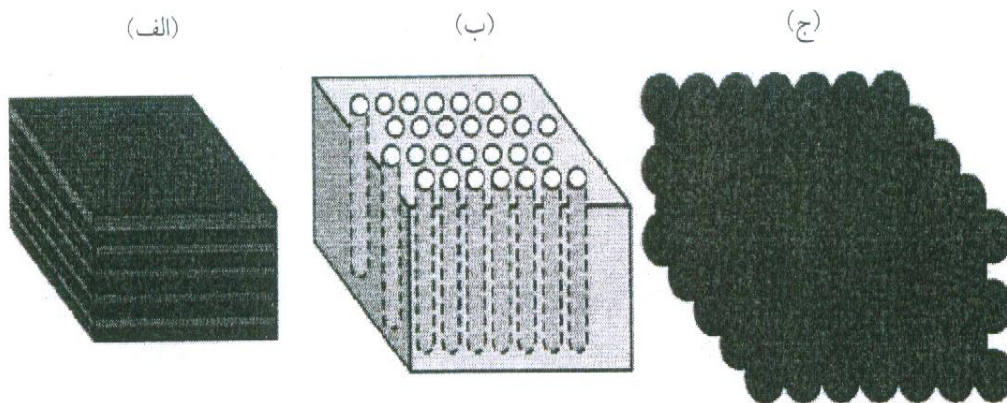
۱-۱- بلورهای فوتونیکی

یک بلور عبارت است از آرایشی تناوبی از اتمها یا ملکولها ، یعنی یک شبکه ی بلوری زمانی حاصل می شود که یک بلوک ساختاری ساده و پایه از اتمها یا ملکولها در فضا تکرار شود. بنابراین یک بلور یک پتانسیل تناوبی در برابر انتشار از آن از خود نشان می دهد. و هندسه ی بلور خیلی از خواص

رسانشی بلور را تعیین می کند. به ویژه شبکه گافهایی را در ساختار باند انرژی بلور ایجاد می کند به طوری که الکترونها مجاز نباشند با انرژی های معینی در جهت های معینی انتشار یابند. اگر پتانسیل شبکه به حد کافی قوی باشد گاف بایستی به تمام جهات ممکن توسعه یابد، نتیجه یک گاف باند کامل خواهد بود. مثلا یک نیمرسانا دارای یک گاف باند کامل بین باندهای ظرفیت و رسانش است.

اگر ثابت های دی الکتریک مواد در بلور به حد کافی متناوب باشد و جذب نور بوسیله ی ماده ضعیف باشد در این صورت پراکندگی در فصل مشترک دی الکتریکها می تواند خیلی از پدیده های مشابه را برای فوتونها ایجاد کند همانطور که پتانسیل اتمی برای الکترونها ایجاد می کند. بنابراین یک روش برای کنترل اپتیکی و دستکاری عبارت است از بلور فوتونیک: یک محیط ددی الکتریک متناوب کم اتلاف [۱۳]. این تناوبها از مرتبه ی طول موج نور هستند، بنابراین نور می تواند تغییر در ضریب شکست را هنگام عبور از میان ساختار احساس کند. نور هنگام برخورد به ساختار شکسته شده و در هر فصل مشترک دی الکتریک منعکس می شود. این تداخل می تواند بسته به طول موج سازنده یا ویرانگر باشد. نور در یک محدوده ی خاصی از انرژی در داخل ساختار نمی تواند منتشر شود. بنابراین باند ممنوع فوتونیک یا گاف باند فوتونیک بوجود می آید. گاف باند فوتونیک مشابه گاف باند انرژی الکترون در نیمرسانا است. وابستگی انعکاس و شکست به زاویه ی فرود و هندسه ی ساختار، در اپتیکهای معمولی کاملا شناخته شده است. گاف انرژی ممنوع در بلور فوتونیک نیز می تواند با زاویه ی فرود تغییر کند. فقط وقتی گاف باند فوتونیک به عنوان یک گاف باند کامل توصیف می شود که فوتونها بتوانند در هر زاویه ای بطور کامل منعکس شوند. وقتی گاف باند فوتونیک فقط مانع انتشار نور در جهت های خاصی شود، به عنوان گاف باند ناکامل یا شبه باندگاف شناخته می شود.

از نظر ابعاد ساختارهای تناوبی بلورهای فوتونیک در یک دو و سه بعد طبقه بندی می شوند. که جریان نور می تواند بترتیب در یک، دو و سه بعد مدوله شود. یک نمونه از بلور فوتونیک یک بعدی در شکل ۱-۱(الف) نشان داده شده است. یک بلور فوتونیک دوبعدی، یک محیط دی الکتریک با الگوی دو بعدی است که معمولا آرایه های منظمی از میله های دی الکتریک یا حفره ی هوا در یک تک دی الکتریک است. (شکل ۱-۱ب) با استفاده از بلورهای فوتونیک دوبعدی می توان یک تراشه ی دی الکتریک ساخت که در مدارهای اپتیکی برای مهندسين خیلی جالب است. یک بلور فوتونیک سه بعدی می تواند نور را در تمامی جهت ها کنترل کند. که به خاطر مشکلات تولید در چند سال اخیر فقط در آزمایشگاهها بدست آمده اند. سنگ جواهر طبیعی، شامل کره های اکسید سیلیسیم با اندازه ی زیر میکرون یک نمونه ی نوعی از بلور



شکل ۱-۱: تصاویری از بلورهای فوتونیکی (الف) یک بعدی، (ب) دوبعدی و (ج) سه بعدی [۳].

فوتونیکی سه بعدی با یک شبه گاف باند است، که در شکل ۱-۱ ج نشان داده شده است. کاملاً واضح است که خواص و کاربردهای بلورهای فوتونیکی شدیداً به هندسه و تناوبشان بستگی دارد [۱۴]. همچنین می‌توان بلورهای فوتونیکی را طراحی کرد که دارای گاف باندهای فوتونیکی باشند که از انتشار نور در جهات معینی با انرژی‌های خاص جلوگیری نمایند.

برای توسعه‌ی این مفهوم برای توسعه‌ی این مفهوم دو وسیله‌ی متفاوت موجبرهای فلزی و آینه‌های دی‌الکتریک را در نظر بگیرید که چگونه به بلورهای فوتونیکی ربط پیدا می‌کنند. کاواک‌های فلزی و موجبرهای فلزی بطور گسترده در کنترل انتشار ماکروویو بکار می‌روند. کاواک فلزی اجازه نمی‌دهد امواج الکترومغناطیسی با فرکانس زیر فرکانس آستانه‌ی معین منتشر شود و موجبر فلزی فقط انتشار در امتداد محور خود را مجاز می‌کند. هر دو خاصیت فوق مفید هستند و در فرکانسهای بیرون از رژیم ماکروویو مفید خواهند بود.

با وجود این، امواج الکترومغناطیسی در فرکانس‌های دیگر سریعاً در مولفه‌های فلزی تلف می‌شوند. و موجب می‌شود این روش کنترل نور برای تعمیم ناممکن شود. بلورهای فوتونیکی تنها می‌توانند از خواص کاواکها و موجبرها تقلید کنند بلکه مقیاس پذیر و قابل کاربرد به یک گستره‌ی وسیع از فرکانس‌ها هستند. یک بلور فوتونیکی با هندسه‌ی معلوم را می‌توان با ابعاد میلیمتری برای کنترل ماکروویو یا ابعاد میکرونی برای کنترل فرسرخ ساخت.

وسیله ی اپتیکی دیگر با کاربرد فراوان آینه‌ی دی‌الکتریکی یعنی دسته ربع موج متشکل از لایه‌های متناوب از مواد دی‌الکتریکی مختلف است. وقتی نوری با طول موج مناسب به چنین ماده ی لایه‌ای بتابد کاملاً بازتابیده می‌شود. علت این است که موج نوری در فصول مشترک لایه‌ها پراکنده می‌شود و اگر فاصله دقیقاً صحیح باشد امواج چندبار پراکنده، بطور ویرانگر در داخل ماده تداخل می‌کنند. این اثر مشهور است و اساس خیلی از وسایل را تشکیل می‌دهد نظیر آینه‌های دی‌الکتریکی، فیلترهای فابری-پرو دی‌الکتریکی و لیزرهای فیدبک توزیع یافته. همه‌ی اینها شامل دی‌الکتریک‌های کم اتلاف هستند که در یک جهت تناوبی هستند. لکن در حالی که چنین آینه‌هایی بطور زیاد مفید هستند فقط نور را در تابش قائم یا تقریباً قائم به ماده‌ی لایه‌ای بازمی‌تابانند.

اگر بلور فوتونیک برای یک گستره‌ی فرکانسی نور را با هر قطبش و با هر زاویه ی تابش بازتاباند گویند بلور دارای یک گاف باند فوتونیک کامل است. در چنین بلوری هیچ مدنوری نمی‌تواند منتشر شود به شرطی که فرکانسهای آن داخل گستره باشند. یک آینه‌ی دی‌الکتریکی ساده نمی‌تواند دارای یک گاف باند کامل باشد زیرا پراکندگی فقط در امتداد یک محور رخ می‌دهد. برای ایجاد ماده‌ای با گاف باند فوتونیک کامل بایستی دی‌الکتریکهای متمایز را در شبکه‌ای آراست که در امتداد سه محور تناوبی باشد [۱۳].

۱-۲- انتشار امواج الکترومغناطیسی در لایه های متناوب

اکنون که مختصری در مورد بلورهای فوتونیک آشنا شدیم، به بررسی انتشار امواج الکترومغناطیسی و انواع قطبش آن در این لایه‌های متناوب می‌پردازیم.

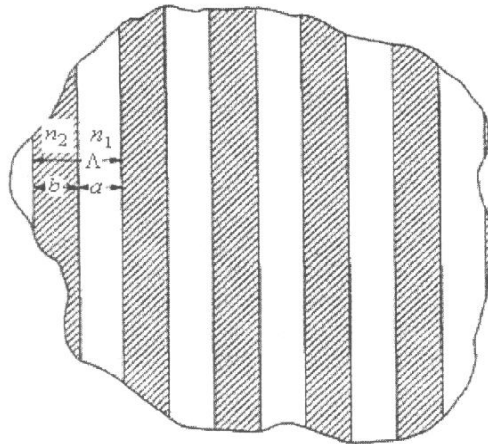
برای بررسی انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های متناوب فرض می‌کنیم قطبش نور از دو مولفه‌ی متعامد تشکیل شده است. این دو مولفه را به این صورت تعریف می‌کنیم. اگر میدان الکتریکی نور موازی صفحه‌ی فصل مشترک دو محیط باشد قطبش را S و اگر میدان مغناطیسی موازی صفحه‌ی فصل مشترک باشد قطبش را p می‌گویند. این دو قطبش را اصطلاحاً در موجرها به ترتیب امواج الکتریکی عرضی (TE) و مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند [۱۵].

۱-۲-۲- روش ماتریس انتقال برای انتشار امواج الکترومغناطیسی در لایه‌های متناوب

بعد از مطرح کردن انواع قطبش به بررسی انتشار این امواج در لایه‌های متناوب می‌پردازیم. برای این منظور یک عملگر ماتریسی را برای انتقال امواج بدست می‌آوریم [۱۶ و ۱۷]. جهت فرومل بندی ماتریس انتقال برای هر دو نوع قطبش هندسه‌ی ساده‌ای از یک محیط متناوب در شکل ۱-۲ نشان داده شده است که در آن لایه‌ها با دو ضریب شکست n_1 و n_2 مشخص شده‌اند:

$$n_{(x)} = \begin{cases} n_2 & 0 < x < b \\ n_1 & b < x < \Lambda \end{cases} \quad (1-1)$$

بطوریکه b و $a = \Lambda - b$ ضخامت لایه‌ها هستند و Λ دوره‌ی تناوب است.



شکل ۲-۱ محیط متناوب با ضرایب شکست n_1 و n_2 [۵].

با توجه به اینکه ساختار متناوب است رابطه‌ی $n(x) = n(x + \Lambda)$ برقرار است. محور x را در جهت عمود بر فصل مشترک می‌گیریم و میدان الکتریکی را نیز بصورت زیر می‌نویسیم.

$$E(x, z) = E(x)e^{ikz} \quad (2-1)$$

میدان الکتریکی در هر لایه‌ی همگن را به صورت برهم نهی موج تخت انعکاسی در نظر می‌گیریم. دامنه‌های مختلط این دو موج یک بردار ستونی را تشکیل می‌دهند. میدان الکتریکی در لایه‌ی α از n امین سلول با بردار ستونی زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} a_n^{(\alpha)} \\ b_n^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

در نتیجه توزیع میدان در این لایه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

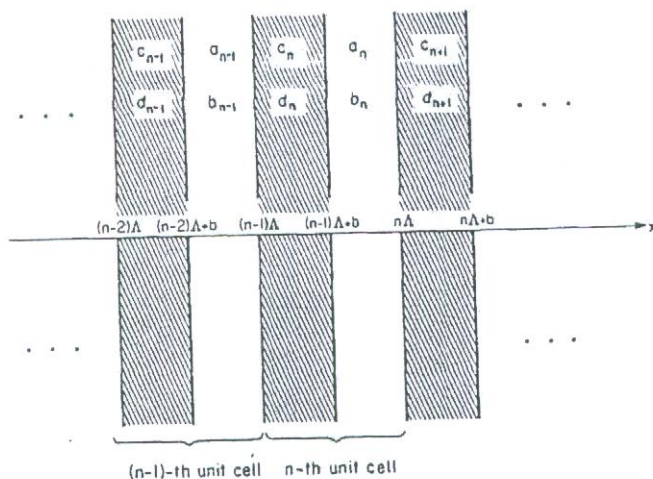
$$E(x, z) = (a_n^{(\alpha)} e^{ik_{\alpha x}(x-n\Lambda)} + b_n^{(\alpha)} e^{-ik_{\alpha x}(x-n\Lambda)}) e^{i\beta z} \quad (4-1)$$

بطوریکه

$$k_{\alpha x} = \{[(\omega/c)n_{\alpha}]^2 - \beta^2\}^{1/2} \quad \alpha = 1, 2 \quad (5-1)$$

چون انتشار را در راستای عمود بر صفحه‌ی فرودی گرفته‌ایم پس $\beta = 0$ است.

بردارهای ستونی هر یک از لایه‌ها مستقل از یکدیگر نیستند بلکه با شرایط مرزی در سطوح فصل مشترک به هم مروط می‌شوند. ابتدا قطبش TE موج را بررسی می‌کنیم. به طوریکه بردار E در صفحه‌ی $y-z$ است. بنابراین شرط پیوستگی در مرزها را بر روی E و $\frac{\partial E}{\partial x}$ اعمال می‌کنیم (شکل ۳-۱).



شکل ۳-۱ دامنه‌های موج تخت در n امین سلول، به همراه سلولهای مجاور [۵]

در مرز $x = (n-1)\Delta$

$$a_{n-1} + b_{n-1} = e^{-ik_{2x}\Delta} c_n + e^{ik_{2x}\Delta} d_n \quad (6-1)$$

$$ik_{1x}(a_{n-1} - b_{n-1}) = ik_{2x}(e^{-ik_{2x}\Delta} c_n - e^{ik_{2x}\Delta} d_n)$$

در مرز $x = (n-1)\Delta + b$

$$e^{-ik_{2x}a} c_n + e^{ik_{2x}a} d_n = e^{-ik_{1x}a} a_n + e^{ik_{1x}a} b_n \quad (7-1)$$

$$ik_{2x}(e^{-ik_{2x}a} c_n - e^{ik_{2x}a} d_n) = ik_{1x}(e^{-ik_{1x}a} a_n - e^{ik_{1x}a} b_n)$$

چهار معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی بازنویسی کرد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_{2x}\Lambda} & e^{ik_{2x}\Lambda} \\ \frac{k_{2x}}{k_{1x}} e^{-ik_{2x}\Lambda} & -\frac{k_{2x}}{k_{1x}} e^{ik_{2x}\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \quad (8-1)$$

$$\begin{pmatrix} e^{-ik_{2x}a} & e^{ik_{2x}a} \\ e^{-ik_{2x}a} & -e^{-ik_{2x}a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_{1x}a} & e^{ik_{1x}a} \\ \frac{k_{1x}}{k_{2x}} e^{-ik_{1x}a} & -\frac{k_{1x}}{k_{2x}} e^{ik_{1x}a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (9-1)$$

با استفاده از تعاریف زیر

$$a_n \equiv a_n^{(1)}, b_n \equiv b_n^{(1)}, \quad (10-1)$$

$$c_n \equiv a_n^{(2)}, d_n \equiv b_n^{(2)},$$

همچنین با حذف کردن $\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ ، معادله‌ی ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (11-1)$$

که عناصر ماتریسی آن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A = e^{-ik_{1x}a} \left[\cos k_{2x}b - \frac{1}{2}i \left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} + \frac{k_{1x}}{k_{2x}} \right) \sin k_{2x}b \right] \quad (12-1)$$

$$B = e^{ik_{1x}a} \left[-\frac{1}{2}i \left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} - \frac{k_{1x}}{k_{2x}} \right) \sin k_{2x}b \right] \quad (13-1)$$

$$C = e^{-ik_{1x}a} \left[\frac{1}{2}i \left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} - \frac{k_{1x}}{k_{2x}} \right) \sin k_{2x}b \right] \quad (14-1)$$

$$D = e^{ik_{1x}a} \left[\cos k_{2x}b + \frac{1}{2}i \left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} + \frac{k_{1x}}{k_{2x}} \right) \sin k_{2x}b \right] \quad (15-1)$$

ماتریس بدست آمده، دامنه‌های مختلط موج تخت فرودی a_{n-1} و موج تخت انعکاسی b_{n-1} را در یک لایه از یک سلول به لایه‌ی معادل از سلول بعدی مرتبط می‌کند. به عبارتی این ماتریس مولفه‌های میدان دولایه با ضرایب شکست یکسان را به هم مربوط می‌سازد و $AD - BC = 1$. عناصر ماتریسی (A, B, C, D) برای امواج TM که در آن میدان مغناطیسی در صفحه‌ی $y-z$ است اندکی متفاوت از امواج TE است. در این مورد نیز با اعمال شرط پیوستگی در مرزها بر روی مولفه‌های میدان مغناطیسی می‌توانیم عناصر ماتریسی را بدست می‌آوریم:

$$A_{TM} = e^{-ik_1 a} \left[\cos k_{2x} b - \frac{1}{2} i \left(\frac{n_2^2 k_{1x}}{n_1^2 k_{2x}} + \frac{n_1^2 k_{2x}}{n_2^2 k_{1x}} \right) \sin k_{2x} b \right] \quad (16-1)$$

$$B_{TM} = e^{ik_1 a} \left[-\frac{1}{2} i \left(\frac{n_2^2 k_{1x}}{n_1^2 k_{2x}} - \frac{n_1^2 k_{2x}}{n_2^2 k_{1x}} \right) \sin k_{2x} b \right] \quad (17-1)$$

$$C_{TM} = e^{-ik_1 a} \left[\frac{1}{2} i \left(\frac{n_2^2 k_{1x}}{n_1^2 k_{2x}} - \frac{n_1^2 k_{2x}}{n_2^2 k_{1x}} \right) \sin k_{2x} b \right] \quad (18-1)$$

$$D_{TM} = e^{ik_1 a} \left[\cos k_{2x} b + \frac{1}{2} i \left(\frac{n_2^2 k_{1x}}{n_1^2 k_{2x}} + \frac{n_1^2 k_{2x}}{n_2^2 k_{1x}} \right) \sin k_{2x} b \right] \quad (19-1)$$

با توجه به روابط به دست آمده در بالا نتیجه می شود که فقط یک بردار ستونی مستقل است. بنابراین به عنوان مثال بردار ستونی لایه ی n_1 از سلول صفرم را انتخاب می کنیم و با استفاده از ماتریس فوق بردارهای ستونی لایه های معادل را به دست می آوریم:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-n} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad (20-1)$$

روش دیگری نیز برای به دست آوردن ماتریس انتقال وجود دارد که در محاسباتمان بیشتر از این روش استفاده کرده ایم [۱۸].

ابتدا ماتریس انتقال را برای یک لایه به دست می آوریم. در این حالت انتشار موج را به صورت عمود بر صفحه فصل مشترک در راستای محور Z گرفتیم. میدان الکتریکی در راستای محور X قطبیده می شود. برای لایه ی j ام میدان الکتریکی به صورت زیر نوشته می شود:

$$(z_{j-1} < z < z_j, j=1,2,\dots,N) \quad (21-1)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} E_j(z, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} n_j^2 E_j(z, \omega) = 0$$

به طوریکه $n_j = \sqrt{\epsilon_j}$ ، بیانگر ضریب شکست لایه ی j ام است، که در لایه های یکسان ثابت است. با حل معادله ی (۲۱-۱) رابطه ی زیر برای میدان الکتریکی به دست می آید:

$$E_j(z, \omega) = E_{+j}(\omega) \exp \left[i \frac{\omega}{c} n_j (z - z_{j-1}) \right] + E_{-j}(\omega) \exp \left[-i \frac{\omega}{c} n_j (z - z_{j-1}) \right] \quad (22-1)$$

با استفاده از رابطه ی $\nabla \times E = -(\partial / \partial t) B = i\omega B$ ، می توان میدان مغناطیسی را به صورت زیر بیان کرد: