بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه ،گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.SC)

گرایش : آنالیز عددی

عنوان

روش بی اسپلاین برای حل دسته خاصی از مسائل مقادیر مرزی غیر عادی

استاد راهنما

دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور

دکتر محمد صادق عسگری

پژوهشگر

فاطمه درویش متولی

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به پروردگارم

او که به من

مادری چون خورشید

پدری چون دریا

وهمسری چون کوه

عطا کرده است

تقدیر وتشکر

حمد وسپاس بی پایان خداوند سبحان را که یاد و نام او همواره مونس جان است . حال که با لطف و نایت پروردگار منان این دوره از تحصیل را پشت سر گذاشته ام، جای ان دارد که از زحمات کلیه کسانی که بنحوی در نگارش این رساله مددکار من بوده اند تشکر وقدردانی نمایم.

اساتید بزرگواری که اندوخته علمی خود را در طبق اخلاص نهاده و مرا در این راه یاری نمودند به ویژه از زحمات و مساعی استاد راهنما جناب آقای دکتررشیدی نیا به پاس رهنمودها نکته یابی ها و زحماتشان صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین از استاد مشاور جناب آقای دکترمحمد صادق عسگری کمال تشکر را دارم. واز کلیه اساتید بزرگواری که هر یک به نوعی بنده را وامدار فضل خود نمودند نهایت امتنان را دارم.

در پایان از خانواده عزیزم به خصوص خواهر مهربانم که همواره در تمام مراحل تحصیل مشوق و پشتوانه من بوده اند بسیار سپاسگزارم.

بسمه تعالی

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب فاطمه درویش متولی دانشجوی کارشناسی ارشدرشته ریاضی کاربردی با شماره دانشجویی ۸۸۱۰۶۸۹۰۷۰۰اعلام می نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه باعنوان :روش بی اسپلاین برای حل مسائل مرزی غیر عادی حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم ، طبق ضوابط و رویه های جاری ، ان را ارجاع داده و در فهرست منابع و ماخذ ذکر نموده ام .

علاوه بر ان تاکید می نماید که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح ، پایین تر یا بابالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف ان ثابت شود بدینوسیله متعهد می شوم ، در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام توسط دانشگاه ، بدون کوچکترین اعتراض ان را بپذیرم.

تاریخ وامضا

بسمه تعالی

درتاریخ : ۱۳۹۰/۱۱/۱۶

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای / خانم فاطمه درویش متولی از پایان نامه خود دفاع نموده وبا نمره ۱۸

بحروف هجده و با درجه مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

بسمه تعالی

دانشکده : علوم پایه

نام واحد دانشگاهی : تهران مرکزی **کد واحد :** ۱۰۱	**کد شناسایی پایان نامه:** **10130109901008**
عنوان پایان نامه کارشناسی ارشد :روش ب- اسپلاین برای حل مسائل مرزی غیر عادی	
نام ونام خانوادگی دانشجو: فاطمه درویش متولی **شماره دانشجویی: ۸۸۱۰۶۸۹۰۷۰۰**	تاریخ شروع پایان نامه :۱۳۹۰/۷/۱ تاریخ اتمام پایان نامه:۱۳۹۰/۱۱/۱۶
استاد راهنما: دکتر جلیل رشیدی نیا استاد مشاور : دکتر محمد صادق عسگری	
ادرس و شماره تلفن : فیروزکوه شهرک ولی عصر کوچه فرهنگ ۱۱ پلاک ۷	

چکیده پایان نامه (شامل خلاصه، اهداف، روش های اجرا و نتایج به دست آمده):

در این پایان نامه جهت حل مسئله بامقدار مرزی دو نقطه ای غیر عادی روش بی اسپلاین را ارائه می دهیم.
مسئله مقدار مرزی غیر عادی را در نقاط غیر عادی اصلاح می کنیم ، و مسئله اصلاح شده را به روش بی اسپلاین حل می کنیم.
در بکارگیری روش بی اسپلاین برای معادله غیر خطی ابتدا با روش شبه خطی سازی معادله را خطی سازی می کنیم و بعد روش بی اسپلاین را بکار می گیریم.
با بدست آوردن خطای برشی روش تصحیح اسپلاین را بدست می آوریم.درجه بهینگی روش را نیز بدست می آوریم .و در نتیجه با مثال های عددی کارایی روش را ثابت می کنیم. .
از طرفی روش ذکر شده تابع اسپلاینی را برای بدست اوردن جواب در هر نقطه از دامنه ارائه می دهد در حالی که روش تفاضلات متناهی بررسی شده در مرجع [1] و [2] جواب را فقط در نقاط گره ای انتخاب شده بدست می دهد. پایان نامه بر پایه مرجع [3] استوار است .

کلید واژه:منفرد، ، مسئله مقدار مرزی، اسپلاین ، بی اسپلاین ، شبه خطی سازی ، خطای برشی

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش نامه دانشگاه مناسب است / مناسب نیست. تاریخ وامضا

فهرست مندرجات

فهرست جداول

چکیده

در این پایان نامه جهت حل مسئله بامقدار مرزی دو نقطه ای غیر عادی روش بی اسپلاین را ارائه می دهیم.

مسئله مقدار مرزی غیر عادی را در نقاط غیر عادی اصلاح می کنیم ، و مسئله اصلاح شده را به روش بی اسپلاین حل می کنیم.

در بکارگیری روش بی اسپلاین برای معادله غیر خطی ابتدا با روش شبه خطی سازی معادله را خطی سازی می کنیم و بعد روش بی اسپلاین را بکار می گیریم.

با بدست آوردن خطای برشی روش تصحیح اسپلاین را بدست می آوریم.درجه بهینگی روش را نیز بدست می آوریم .و در نتیجه با مثال های عددی کارایی روش را ثابت می کنیم. .

از طرفی روش ذکر شده تابع اسپلاینی را برای بدست اوردن جواب در هر نقطه از دامنه ارائه می دهد در حالی که روش تفاضلات متناهی بررسی شده در مرجع [1] و [2] جواب را فقط در نقاط گره ای انتخاب شده بدست می دهد. پایان نامه بر پایه مرجع [3] استوار است .

کلید واژه:غیرعادی، مسئله مقدار مرزی، اسپلاین ، بی اسپلاین ، شبه خطی سازی ، خطای برشی

مقدمه

در این پایان نامه روش بی اسپلاین مکعبی را برای حل مسائل مقدار مرزی غیر عادی خطی و غیر خطی بکار گرفته ایم .

در فصل یک به تعاریف و کلیاتی که در پایان نامه امده است پرداخته ایم از جمله معرفی تابع اسپلاین و بی اسپلاین ، مسائل مقادیر مرزی عادی و غیر عادی ،معادله خطی و غیر خطی

در فصل دو روش بی اسپلاین مکعبی را برای مسئله مقدار مرزی غیر عادی خطی بکار برده ایم و با تکیه به این روش به یک ماتریس سه قطری رسیده ایم که در نهایت منجر به حل یک دستگاه شده است که با حل ان دستگاه به جواب می رسیم.

در ادامه فصل دوم خطای روش را برای مسئله غیر عادی خطی بدست اورده ایم .

در فصل سه روش بی اسپلاین مکعبی را برای مسئله مقدار مرزی غیر عادی غیر خطی بکار برده ایم ،بدین ترتیب که ابتدا مسئله غیر خطی را خطی سازی می کنیم و بعد همان روندی که در فصل دو داشتیم را بکار می بریم ،که در نهایت به یک ماتریس سه قطری خواهیم رسید و خطای روش را نیز ارزیابی کردیم .

فصل چهار مربوط به استراتژی افراز بهینه می باشد که در این فصل برانیم تا بهترین طول گام را بتوا نیم انتخاب کنیم .

ودر اخرین فصل روش های فوق را برای مثال های عددی بکار برده ایم و روش را با استفاده ازبرنامه مطلب نوشته ایم .

فصل ۱

کلیات وتعاریف

۱.۱ مسائل مقدار مرزی

مقدمه:

مسائل مقادیر مرزی خطی و غیر خطی عادی وغیر عادی توسط محققین زیادی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است . کاربرد روش بی اسپلاین برای حل اینگونه مسائل در مراجع [4],[5],[6],[7], امده است.

دربیان این مطالب از مرجع [2] استفاده شده است.

شکل کلی یک مسئله مقدار مرزی به صورت زیر می باشد:

$$L[y] = r$$

$$\mu = 1,2,\cdots,m \quad u_{\mu}[y] = \gamma_{\mu}$$

که در ان L یک عملگر دیفرانسیلی مرتبه m ام ،r یک تابع مفروض u_{μ} شرایط مرزی می باشد.با فرض اینکه x متغیر مستقل باشد :

$$L[y] = \sum_{i=0}^{m} f_i(x)\ y^{(i)}$$

$$= f_0(x)\ y(x) + f_1(x)\ y'(x) + \cdots + f_m(x)\ y^m(x) = r(x)$$

ساده ترین مسئله ی مقدار مرزی مرتبه دوم به صورت زیر می باشد:

$$f_2(x)\ y''(x) + f_1(x)\ y'(x) + f_0(x)\ y\ (x) = r(x)$$

$$u_{\mu}[y]=\sum_{k=0}^{m-1}(a_{\mu,k}\ y^{(k)}(a)+b_{\mu,k}\ y^{(k)}(b)\ )$$

شرایط مرزی به صورت زیر است

شرایط مرزی نوع اول

$$y(a)=\gamma_1\ ,\ y(b)=\gamma_2$$

شرایط مرزی نوع دوم

$$y'(b)=\gamma_2 \qquad\qquad y'(a)=\gamma_1\ ,$$

شرایط مرزی نوع سوم

$$b_0\,y'(b)-b_1\,y(b)\ =\gamma_2 \qquad\qquad a_0\,y'(a)-a_1\,y(a)\ =\gamma_1$$

به طوری که a_1،b_1 ، a_0،b_0 که ثابت های مثبت اند.

۱.۱.۱ مسئله مقدار مرزی غیرخطی

مسئله مقدار مرزی ذکر شده در بالا یک مسئله خطی است زیرا یک رابطه خطی بین $y''\ y'$, y , وجود دارد.

حال اگر یک رابطه غیر خطی بین این عناصروجود داشته باشد ، انگاه مسئله مقدار مرزی یک مسئله غیر خطی خواهد بود.

مسئله غیر خطی مرتبه دوم در حالت کلی به صورت زیر می باشد:

$$y''(x)=\ f\ (x, y'(x), y(x))$$

۲.۱.۱ مسئله مقدار مرزی غیرعادی

مسئله مقدار مرزی مرتبه دوم همراه با شرایط مرزی زیر را در نظر می گیریم:

$$y(a)=\lambda_1 \;\; y(b)=\lambda_2 \;\; y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=r(x)$$

الف) اگر یکی از ضرایب(p (x ،q (x) یا(r (x به صورت

$\frac{c(x)}{x-\alpha}$ ، $\frac{b(x)}{x-\alpha}$ ، $\frac{a(x)}{x-\alpha}$ باشدوαعددی در بازه ی [a,b] باشد که و همچنین(a (x و

b (x) و(c (x در[a, b] تعریف شده باشند انگاه گوییم مسئله مقدار مرزی ، یک مسئله مقدار مرزی غیر عادی می باشد.

جواب عددی یک مسئله مقدار مرزی غیر عادی به دلیل غیر عادی بودن همواره با یک خطا همراه است .

ب) اگر در معادله یک پارامتر کوچک به عنوان ضریب بزرگترین مرتبه مشتق به صورت زیر ظاهر شود:

$$\varepsilon y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x)$$

$$y(a)=\lambda_1 \qquad y(b)=\lambda_2$$

در این صورت مسئله مقدار مرزی غیر عادی مختل داریم.

۲.۱ تاریخچه درونیابی اسپلاین

اسپلاین اولین بار در سال ۱۹٤٦ توسط شخصیت بنام I.J.Schoenberg (شونبرگ) معرفی شد.[8]
هم چنین شونبرگ برای نخستین بار یک قضیه برای اثبات وجود اسپلاین های درون یاب اثبات کرد.

اگر بخواهیم توصیفی درمورد این نوع درونیاب داشته باشیم با در نظرگرفتن خواص و مشخصه های درونیاب یکی از بهترین نوع درونیابی هاست . به این منظور که هم بهترین تقریب است و هم دقیق ترین تقریب.

بهترین از این لحاظ که رفتار نقاط درونیابی را به صورت خیلی هموار تقریب می زند ،یعنی می توان گفت تقریب تابعی نیز است .همچنین دقیق ترین تقریب از این لحاظ که در نقاط مختلف دارای تقریب هایی با خطای خیلی کمتر است .

پس می توان ادعا کرد اسپلاین رفتار تابع به صورت دقیق تر تقریب می زند.در حقیقت برتری این درونیاب نسبت به درونیاب های دیگر به دو دلیل است ، یکی اینکه این تابع علاوه بردرونیابی نقاط (x_i, f_i)،نقاط (x_i, f'_i) و همچنین (x_i, f''_i)وبه مراتب می توان گفت مشتقات مراتب بالاتر را نیز تقریب می زند .دیگر اینکه این درونیاب دارای همگرایی یکنواخت می باشد.

ظاهر تابع درونیاب اسپلاین به صورت یک تابع تکه ای چند جمله ای است . یعنی تابعی است چند ضابطه ای که هر ضابطه ان یک چند جمله ای است . از اسپلاین های چند جمله ای و غیر چند جمله ای می توان برای بدست اوردن جواب عددی معادلات دیفرانسیل استفاده کرد.که بعضی محققان به آن پرداخته اند.[10] , [9]

برای درونیابی تعدادی از نقاط داده شده بهترین روش بر اساس چند جمله ای های چند ضابطه ای است که مهمترین آن ها اسپلاین ها و بی اسپلاین ها می باشند.

۱.۲.۱ کاربرداسپلاین

با توجه به ویژگی های خوبی که در مورد اسپلاین مطرح شد ، کاربرد های علمی فراوانی را می توان برای ان بر شمرد ، مثلا در کارهای عمرانی ، نقشه برداری ،احداث باند فرودگاه بین المللی ، مسائل پزشکی ، سونوگرافی ،نرم افزارهای فارسی نویس، نرم افزارهای مهندسی Auto cad ، تبدیل آنالوگ به دیجیتال وغیره .

۲.۲.۱ فرمول اسپلاین

در بیان این مطالب از مرجع [11] استفاده می کنیم.

اگر بخواهیم ضابطه ی یک تابع از درجه سه(مکعبی) را بررسی کنیم ، با توجه به افرازی که برای دامنه نقاط داریم ، در هر یک از زیر بازه ها یک چند جمله ای از درجه حداکثر سه داریم .یعنی ممکن است یک اسپلاین درجه سه با ضابطه هایی درجه ی یک و دو باشد، حتی درجه سه هم نباشد، واین بدین معنی است که این ضابطه های از درجه دو ویا یک بازه ای از چند جمله ای درجه سه در زیر بازه ها هستند.

در مورد درونیاب اسپلاین می توان گفت که این درونیاب به صورت ترکیب خطی از چند جمله ای های اسپلاین مانند $S_i(x)$ ها می باشد که در زیر معرفی می گردد:

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$

با فرض اینکهیک افراز از بازه ی [a,b] باشد یک تابع اسپلاین از درجه ی $k \geq 0$ با نقاط گره x_i و $i=1,2,\cdots,n$ تابعی مانند s است:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i s_i(x)$$

با معلوم بودن $S_i(x)$ها کافی است که $\mathbf{C}_i$ ها را بدست اوریم . در این صورت چند جمله ای درونیاب معلوم می گردد.که $S_i(x)$ باتوجه به شرایط زیر محاسبه میگردد:

۱)روی هر زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ که $i=1,2,\cdots,n$ ، $S(x)$ یک چند جمله ای از درجه ی کوچکتر یا مساوی k باشد.

۲) $S(x)$ و k-1 مشتق اول ان روی بازه [a,b] پیوسته باشد

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) & x\epsilon[x_0, x_1] \\ s_2(x) & x\epsilon[x_1, x_2] \\ s_n(x) & x\epsilon[x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

در این صورت اسپلاین درجه صفر به صورت زیر می باشد:

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = c_0 & x\epsilon[x_0, x_1] \\ s_1(x) = c_1 & x\epsilon[x_1, x_2] \\ s_{n-1}(x) = c_{n-1} & x\epsilon[x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

اسپلاین درجه یک

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0x + b_0 & x\epsilon[x_0, x_1] \\ s_1(x) = a_1x + b_1 & x\epsilon[x_1, x_2] \\ s_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1} & x\epsilon[x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

اسپلاین درجه دو :

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0 & x\epsilon[x_0, x_1] \\ s_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 & x\epsilon[x_1, x_2] \\ s_{n-1}(x) = a_{n-1}x^2 + b_{n-1}x + c_{n-1} & x\epsilon[x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

و هم چنین اسپلاین درجه سوم یا مکعبی یک چند جمله ای درجه سه می باشدکه مشتقات اول ودوم (x) در بازه [a,b] پیوسته می باشد. که برای حل مسائل مقادیر مرزی توسط بسیاری از نویسندگان انجام شده است ([12] , [13] ,[14] , [15], [16] , [17] , [18] ,[19])توابع اسپلاین مکعبی از مهم ترین توابع اسپلاین هستند:

$$\begin{cases} s_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0 & x\epsilon[x_0, x_1] \\ s_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & x\epsilon[x_1, x_2] \\ s_{n-1}(x) = a_{n-1}x^3 + b_{n-1}x^2 + c_{n-1} + d_n & x\epsilon[x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

۳.۲.۱ فضای اسپلاین

فرض کنیم $\Omega_n = \left\{ x_i \right\}_0^n$ ، که در ان $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$،افرازی از بازه $[a,b] \subset \Re$

می باشد . به ازای $i = 1,\cdots,n-1$ ، نقاط x_i را طبق معمول نقاط گرهی داخلی و نقاط x_0و x_nرا نقاط انتهایی یامرزی می نامیم .