دانشگاه یزد

دانشکده‌ی ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض- هندسه توپولوژی

عنوان:

هندسه کلاف مماس کسری و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر اکبر دهقان‌نژاد

استاد مشاور:

محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش‌گر:

زهرا فرشی

دی ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

در سال های اخیر، اهمیت حسابان کسری در علوم رشد قابل توجهی داشته است. حسابان کسری و معادلات دیفرانسیل کسری همانند حسابان سنتی هستند. در این پایان نامه، با بهره مندی از مشتق کسری ریمان-لیویل فضای کلاف مماس کسری از مرتبه k و کلاف جت کسری از یک منیفلد دیفرانسیل پذیر M تعریف و رفتار برخی از اشیا آن ها تحت کارت های موضعی بررسی می شوند. بنابراین در فصول اول و دوم مفاهیم اولیه را که در فصل های دیگر نیاز داشتیم، بیان و در فصل سوم، ابتدا مفهوم حسابان کسری روی منیفلد و فضاهای فرم کسری و سپس کلاف مماس کسری و کلاف جت کسری و ساختارهایشان را تعریف کرده ایم. در فصل چهارم، ابتدا معادلات اویلر-لاگرانژ کسری روی کلاف مماس کسری و کلاف جت کسری را بیان و در ادامه مثال ها و کاربردهایش را ذکرکرده ایم.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
فضای مماس	T_pM
منیفلد ریمانی	(M,g)
کلاف مماس	TM
مشتق از مرتبه دلخواه α	${}_aD_t^\alpha f(t)$
تناوب تانسور t	$Alt(t)$
ضرایب التصاق	Γ_{ij}^k
تابع گاما	$\Gamma(z)$
مشتق کسری نسبت به x^i	$D_{x^i}^\alpha$
مجموعه p-فرمی ها روی M	$D_U^p(M)$
مدول میدان های برداری	$\chi_U(M)$
میدان برداری کسری	X^α
التصاق خطی	∇
مشتق گیری همگرد نسبت به X	∇_X
ضرایب التصاق کسری	∇^α
مشتق خارجی کسری	d^v
هسته عملگر مشتق کسری	$Ker(D_t^v)$
فضای مماس کسری از درجه k	$T_{x_\circ}^{\alpha k}M$

کلاف مماس کسری	$T^{\alpha k}M$
اسپری کسری از درجه k	$S^{\alpha k}$
کلاف جت کسری	$J^{\alpha}(\mathbb{R}, M)$
کروشه پوآسون کسری	$\{f, h\}^{\alpha}$
مجموعه مشتق گیری ها در نقطه p	$\mathcal{D}_p(M)$
مجموعه میدان های برداری روی M	$\chi(M)$

لیست تصاویر

پیشگفتار

از مدت زمان بسیار طولانی، مفهوم حسابان کسری (مشتق و انتگرال گیری با مرتبه کسری) مورد توجه ریاضیدانان بوده است. به زعم غنی بودن این مفهوم، به کار گیری آن در علوم، بویژه در علوم مهندسی (مسائل مدل سازی ، کنترل و ....) سابقه طولانی ندارد. لذا موضوع این پایان نامه تلاشی در جهت هموار سازی ارتباط این مفهوم با علوم کاربردی است. در کاربرد مفاهیم نظری ریاضیات در علوم مهندسی بیشتر با فضاهای مجرد (از جمله منیفلدها) کار می کنیم. بر این اساس، ضمن توسعه مفهوم حسابان کسری از فضای اقلیدسی به منیفلدها، مفاهیم پایه ای دیگری از قبیل، میدان‌های برداری کسری ، کلاف مماس کسری ، کلاف جت کسری و ... تعریف و ساختارهای هندسی روی آن‌ها بیان می‌شوند. به جهت اینکه موضوع این پایان‌نامه، یک تلاش علمی بین رشته‌ای است. لذا سعی شده است که متن پایان نامه به گونه ای تهیه و تنظیم گردد که آن برای عموم علاقمندان بویژه دانشجویان دوره های تحصیلات تکمیلی (ریاضی کاربردی و محض) قابل استفاده باشد. در این راستا، حاصل پژوهش ومطالعه در چهار فصل تنظیم و تقدیم دوستاران دانش می گردد. در فصل اوَل، مفاهیم اولیه از هندسه منیفلد برای دانشجویان حوزه کاربردی مطرح می گردد. فصل دوم را با توصیف نظریه مقدماتی حسابان کسری، برا ی دوستاران حوزه محض ادامه می دهیم. در ادامه، در فصل سوم تلفیق دو مفهوم حسابان کسری و نظریه هندسه منیفلدها (پیاده سازی مفهوم حسابان کسری روی منیفلدها) مطرح و سپس کلاف مماس کسری، $T^{\alpha k}M$ ، کلاف جت کسری، $J^{\alpha}(\mathbb{R},M)$، و ساختارهای هندسی روی آن ها تعریف می شوند. فصل پایانی را به جنبه هایی از کاربرد این تلفیق در علوم مهندسی (معادلات اویلر لاگرانژ کسری روی کلاف مماس کسری، کلاف جت کسری و چند مثال) اختصاص داده ایم.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازهایی از هندسه منیفلد

۱.۱ مفاهیم اولیه از هندسه منیفلد

۱.۱.۱ منیفلد دیفرانسیل پذیر

فرض کنیم M یک مجموعه ناتهی، O زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ و $U \subseteq M$ باشد. نگاشت دو سویی $x : U \to x(U) = O \subset \mathbb{R}^n$ را یک **کارت n بعدی** ، U را حوزه کارت و زوج (x, U) را یک**کارت موضعی**[۱] گویند.

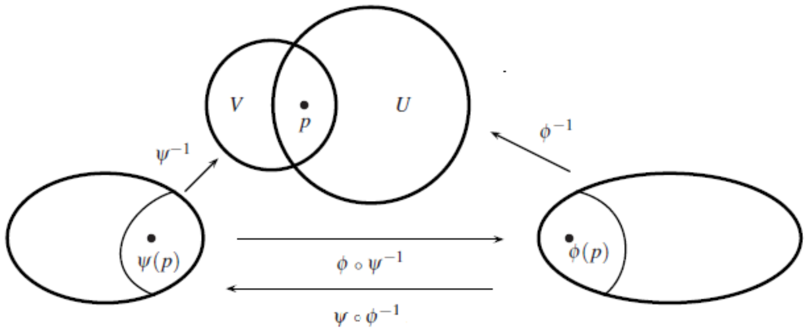
فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو کارت موضعی n بعدی روی M باشند. گوئیم این دو کارت C^k**-مرتبط**[۲] هستند اگر نگاشت زیر که آن را نگاشت تغییر کارت می‌نامیم

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

و معکوس آن توابعی از کلاس C^k بین دو باز $\mathbb{R}^n$ باشند. به عبارت دیگر $x(U \cap V)$ و $y(U \cap V)$ بازهایی از$\mathbb{R}^n$ بوده و $y \circ x^{-1}$ و $x \circ y^{-1}$ از کلاس C^k باشند.

[۱] *Local chart*

[۲] $k - related$

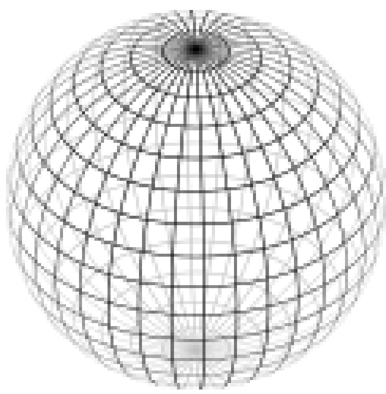


شکل ۱.۱: نگاشت تغییر کارت

در حالت $U \cap V = \emptyset$ حکم به خودی خود برقرار است.

گوئیم یک خانواده از کارت های C^k-مرتبط $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ تشکیل یک **اطلس** [۳] C^k روی M با بعد n را می دهند اگر حوزه تعریف آن‌ها M را بپوشاند، یعنی $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه M همراه با یک اطلس C^k ماکزیمال n بعدی را یک **منیفلد دیفرانسیل پذیر** n بعدی از کلاس C^k گویند.



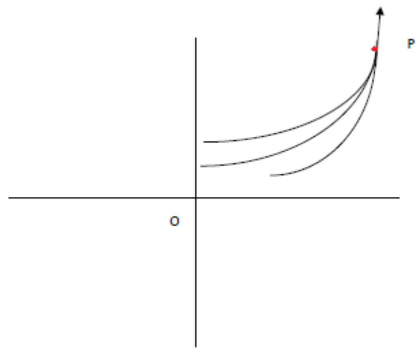
شکل ۲.۱: کره‌ی تو خالی یک منیفلد دو بعدی است

[۳] $Atlas$

۲.۱.۱ فضای مماس

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و $C:]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ یک منحنی از کلاس C^1 روی M و (x,U) یک کارت موضعی در همسایگی نقطه $p=C(0)$ باشد. رابطه هم ارزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$C_1 \sim C_2 \iff \begin{cases} 1) \quad C_1(0)=C_2(0)=p \\ 2) \quad \dfrac{dx\circ C_1}{dt}(0)=\dfrac{dx\circ C_2}{dt}(0) \end{cases}$$



شکل ۳.۱: کلاس هم ارزی منحنی های مماس بر بردار مماس در نقطه p

$[C]_p$ کلاس هم‌ارزی تعریف شده توسط منحنی C را **بردار مماس**[۴] بر M در p گویند .

یک نگاشت مشتق‌گیری در نقطه p عبارت است از نگاشتی که در شرایط زیر صدق کند:

$$\mathcal{D}_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \mathcal{D}_p f$$

به طوری‌که

۱. $\mathcal{D}_p(f+g)=\mathcal{D}_p(f)+\mathcal{D}_p(g)$

۲. $\mathcal{D}_p(\lambda g)=\lambda\mathcal{D}_p(g)$

[۴] *tangent vector*

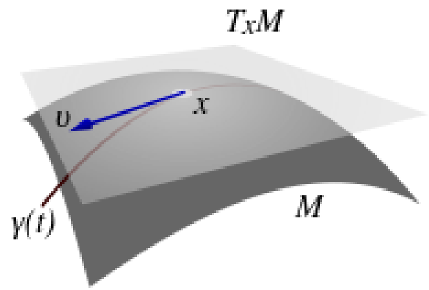
۳. $\mathcal{D}_p(fg)=(\mathcal{D}_pf)g(p)+f(p)(\mathcal{D}_pg)$

مجموعه مشتق‌گیری‌ها در نقطه p از M را با $\mathcal{D}_p(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۱ ([۱۸])

نگاشت $\psi:T_p(M)\to\mathcal{D}_p(M)$ که به هر کلاس هم‌ارزی $[C]_p$ مشتق‌گیری $X_p\in\mathcal{D}_p(M)$ را وابسته می‌کند دوسویی است.

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که تعریف قبلی معادل با این تعریف است که بردار مماس بر M در p عبارت است از مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$ در نقطه p. بردار مماس بر M در p را با X_p نشان می‌دهیم.



شکل ۴.۱: بردار مماس بر منیفلد در نقطه x

فضای مماس[۵] p از منیفلد M عبارت است از خانواده تمام بردارهای مماس در p یا عبارت است از فضای برداری مشتق گیری‌ها در نقطه p از $C^\infty(p)$ که با T_pM نشان داده می‌شود.

اگر (x,U) یک کارت در همسایگی p باشد بردار مماس را می‌توان به صورت زیر نوشت:

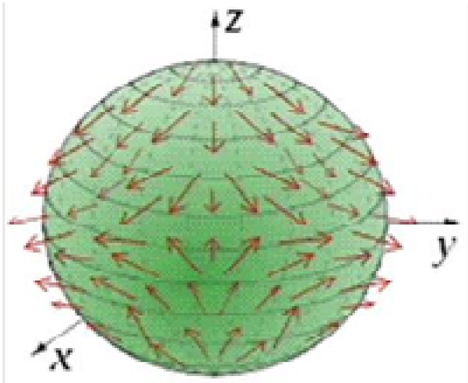
$$X_p=\sum_{i=۱}^{n}X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p(X^i\in\mathbb{R})$$

که در آن $\frac{\partial}{\partial x^i} i=۱,...,n$ پایه فضای مماس است.

یک **میدان برداری**[۶] از کلاس C^r عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r که به هر نقطه p از M بردار مماس X_p را وابسته می‌کند.

[۵] *Tangent spase*

[۶] *vector field*



شکل ۵.۱: میدان برداری روی کره

مجموعه میدان های برداری C^∞ روی M را با $\chi(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱ ([۱۸])

میدان‌های برداری را می‌توان با مشتق‌گیری‌ها از $C^\infty(M)$ همانند نمود. به عبارت دیگر اگر $X \in \chi(M)$ باشد، یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

$$f \mapsto X.f$$

به طوری‌که

$$(X.f)(p) = X_p.f$$

بنابر آنچه گفته شد میدان برداری روی M را می توان با یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ در نظر گرفت.

فرض کنیمM از کلاس C^k باشد. یک میدان برداری از کلاس $(r \leq k)C^r$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r

$$X : C^r(M) \to C^{r-1}(M)$$

به طوری‌که در سه شرط زیر صدق کند:

۱. $X.(f+g) = X.f + X.g \quad f,g \in C^\infty(M)$

۲. $X.(cf) = cX.f$

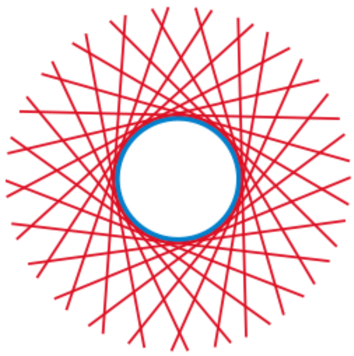
۳. $X.(fg) = (X.f)g + f(X.g)$

۳.۱.۱ کلاف مماس

کلاف مماس[۷] منیفلد دیفرانسیل پذیر M، اجتماع فضاهای مماس M است.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

که در آن T_pM فضای مماس بر M در نقطه p می باشد. اعضای TM را با زوج (p, v) نمایش می‌دهند که p نقطه‌ای در M و v بردار مماس در p بر M است. کلاف مماس دارای ساختار منیفلد می‌باشد[۱۸].



شکل ۶.۱: کلاف مماس دایره

۴.۱.۱ منیفلد ریمانی

متریک ریمانی

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از کلاس $C^۲$ و با بعد n باشد.

تعریف ۴.۱.۱ یک **متریک ریمانی**[۸] روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از یک تانسور g از نوع

---

[۷] *Tangent bundle*

[۸] *Reimannian metric*