بسم الله الرحمن الرحيم

٩٨٧٤٧

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

گروه‌های متناهی با مرتبهٔ گروه خودریختی p^3q یا p^2q^2

استاد راهنما:

دکتر علیرضا جمالی

پژوهش :

سیران زندی

مهر ۱۳۸۵

۱۳۸۷/۳/۱۱

۹۵۷۴۷

تقدیم به

پدر عزیزم

و

مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

آنچه آموختم و اندوختم میسر نمی‌گردد مگر تنها با شامل حال شدن الطاف الهی و زحمات و کوشش‌های دلسوزانه اساتید ارجمندی که در تمام دوران تحصیل با راهنمایی‌ها و آموزش‌های بی‌دریغ خود مرا یاری نمودند. امیدوارم بتوانم رهرو شایسته‌ای برای این اساتید ارجمند باشم.

لازم است که از استاد گرامی آقای دکتر جمالی به پاس زحمات فراوانی که در مدت تحصیلم در دوره کارشناسی ارشد کشیدند صمیمانه تشکر نمایم و برای ایشان آرزوی کامیابی از درگاه حضرت حق مسألت می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر دوستی و جناب آقای دکتر زکایی که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند نیز قدردانی می‌کنم.

همچنین شایسته است که از خانواده عزیزم به‌خاطر تمام فداکاری‌هایشان در طول زندگی‌ام سپاسگزاری نمایم.

در پایان از خانم کارگر و تمامی دوستان عزیز تشکر می‌کنم و امیدوارم که خداوند در تمام مراحل زندگی همراه و یاور آن‌ها باشد.

۱۳۸۷/۳/۱۱

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ خانم سیران زندی دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

گروه‌های متناهی با مرتبهٔ گروه خودریختیِ p^3q یا p^2q^2

در روز سه‌شنبه مورخ ۸۵/۷/۱۸ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/۵ هجده و نیم می‌باشد.

۱ـ عالی ☑
۲ـ بسیار خوب ☐
۳ـ خوب ☐
۴ـ قابل قبول ☐
۵ـ غیرقابل قبول ☐

استادراهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر علیرضا جمالی	دکتر علیرضا زکایی	دکتر حسین دوستی

جواد لآلی
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

فهرست مندرجات

چکیده

این پایان‌نامه از دو قسمت عمده تشکیل شده است. در قسمت اول به بررسی گروههایی متناهی می‌پردازیم که مرتبهٔ گروه خودریختی‌های آنها $p^۳q$ است که در آن p یک عدد اول فرد است. قضیه اصلی زیر در مورد این گروهها ثابت خواهد شد:

قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $|\mathrm{Aut}(G)| = p^۳q$، $p > ۲$، اگر و تنها اگر G با یکی از گروههای زیر یکریخت باشد:

(i) $q = ۲$ و $۲p^۳ + ۱$ یک عدد اول است؛ $\mathbb{Z}_n$، که در آن $n = ۲p^۳ + ۱$ یا $n = ۲(۲p^۳ + ۱)$؛

(ii) $q = ۲$ و $p = ۳$؛ $\mathbb{Z}_{۸۱}$، $\mathbb{Z}_{۸۱} \times \mathbb{Z}_۲$، $G_۱ = \langle a, b | a^۹ = b^۳ = ۱, [a, b] = a^۳\rangle$؛ $G_۲ = G_۱ \times \mathbb{Z}_۲$؛ $G_۳ = \langle a, b | a^۹ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$، $G_۴ = \langle a, b | a^۹ = b^٦ = ۱, b^{-۱}ab = a^۲\rangle$.

در قسمت دوم گروههای متناهی را مورد بحث قرار می‌دهیم که مرتبهٔ گروه خودریختی‌های آنها $p^۲q^۲$ است که در آن p و q دو عدد اول متمایزند. قضیهٔ اصلی زیر در مورد این دسته از گروهها ثابت خواهد شد:

قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $|\mathrm{Aut}(G)| = p^۲q^۲$ اگر و تنها اگر G با یکی از گروههای زیر یکریخت باشد:

(i) $\mathbb{Z}_n$ که در آن n یکی از اعداد ۱۲۵، ۲۵۰، ۱۰۸، ٦۳، ۱۲٦، $r_۱$، $۲r_۱$، $۳r_۲$، $۴r_۲$، یا $٦r_۲$ است به طوری که $r_۱ = ۲p^۳ + ۱$ و $r_۲ = ۴p^۳ + ۱$؛

(ii) $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_n$ که در آن $n \in \{۷, ۹\}$؛

(iii) $S_۳ \times \mathbb{Z}_n$ که در آن $n \in \{۷, ۹\}$.

واژه‌های کلیدی: خودریختی، خودریختی‌مرکزی، خودریختی‌داخلی، خودریختی‌خارجی، برج‌سیلو، گروه غیرآبلی مینیمال، گروه غیرپوچتوان مینیمال.

پیشگفتار

در این پایان‌نامه به مسأله اصلی زیر در دو حالت خاص پاسخ داده می‌شود.

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد.گروه‌هایی را که مرتبه گروه خودریختی‌های آنها n است رده بندی کنید.

مسئله جالب دیگری که در این زمینه مطرح می‌شود این است : اگر B یک گروه متناهی باشد آنگاه گروه‌هایی مانند G را بیابید که $\mathrm{Aut}(G) = B$.

ایر[1] در [۱۳] نشان داد که اگر n عدد طبیعی مفروض باشد آنگاه تعداد گروه‌هایی متناهی که مرتبه گروه خودریختی‌های آنها n است متناهی می باشد.

مسئله فوق در بعضی حالت‌های خاص حل شده است. ابتدا فلانری[2] و مک‌هیْل[3] برای حالتی که $n = pq$ در [۵] مسئله را حل کردند.

مک‌هیْل در [٦] ثابت کرد اگر p یک عدد اول فرد باشد و $1 \leq s \leq 4$، آنگاه هیچ گروهی وجود ندارد که مرتبهٔ گروه خودریختی‌های آن p^s باشد.

همین نتیجه را کاران[4] برای حالتی که $s = 5$ و p فرد باشد در [۳] به‌دست آورد.در حالتی که $n = 2^s$ و $1 \leq s \leq 7$، فلیم[5] ومک‌هیْل به مسئله بالا در [۷] و [۸] جواب دادند. چن[6] همین سؤال را در حالت خاص دیگر با فرض $n = p^2q$ را در [۱۰] بررسی کرد.

---

[1] Iyer
[2] Flannery
[3] MacHale
[4] Curran
[5] Flym
[6] Chen

شیرونگ[1] در این زمینه کارهای جالبی انجام داده است.وی در [۱۹]، [۲۰] و [۲۲] به مطالعه حالتهای خاصی که $n = p^۳q$ و $n = p^۲q^۲$ پرداخته، و در [۲۱] ثابت کرده‌است که اگر n خالی از مکعب باشد، آنگاه گروه مورد نظر دارای خاصیت برج سیلو است و در نتیجه مرتبه G حتماً زوج می‌باشد.

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل است. در فصل اول آن تعاریف و قضایای مقدماتی در نظریه گروه‌ها بیان می‌شود. در فصل دوم به ذکر قضایا و لم‌هایی که در دو فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌پردازیم.

فصل سوم شامل دو بخش است، در بخش اول گروه‌های پوچتوان متناهی با گروه خودریختی‌های از مرتبه $p^۳q$ $(p > ۲)$ بررسی می‌شود و بخش دوم به گروه‌های غیر پوچتوان با شرط فوق اختصاص داده می‌شود.

در فصل چهارم گروه‌های با گروه خودریختی‌های از مرتبه $p^۲q^۲$ را به طور کامل بررسی می‌کنیم. این فصل نیز مانند فصل سوم شامل دو بخش خواهد بود.

فصل سوم این پایان‌نامه تفصیل مقاله زیر است:

Li. Shirong, Finite Groups with Automorphism Group of Order p^3q (p odd), *Proc. R. Ir. Acad.*, **94A**, 1994, 207-18.

در واقع قضیه زیر را در فصل سوم ثابت می‌کنیم:

قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $|\mathrm{Aut}(G)| = p^۳q$، که $p > ۲$ و p و q اعداد اول متمایزند، اگر و تنها اگر G با یکی از گروههای زیر یکریخت باشد:

(i) $q = ۲$ و $۲p^۳ + ۱$ یک عدد اول است؛ $\mathbb{Z}_n$، که در آن $n = ۲p^۳ + ۱$ یا $n = ۲(۲p^۳ + ۱)$؛

(ii) $q = ۲$ و $p = ۳$؛ $\mathbb{Z}_{۸۱}$، $\mathbb{Z}_{۸۱} \times \mathbb{Z}_۲$، $G_۱ = \langle a, b | a^۹ = b^۳ = ۱, [a,b] = a^۳ \rangle$؛ $G_۲ = G_۱ \times \mathbb{Z}_۲$؛

[1] Shirong

$G_3 = \langle a, b | a^9 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \cong D_{18}$، $G_4 = \langle a, b | a^9 = b^6 = 1, b^{-1}ab = a^2 \rangle$.

و فصل چهارم آن تفصیل مقالهٔ زیر است:

Li. Shirong, Autorphism Equation $|Aut(G)| = p^2q^2$, *Chinese Journal of Contemporary Mathematics*, **22**, 2001, 177-82.

و قضیه زیر را در فصل چهارم ثابت می‌کنیم:

قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $|\mathrm{Aut}(G)| = p^2q^2$ اگر و تنها اگر G با یکی از گروههای زیر یکریخت باشد:

(i) $\mathbb{Z}_n$ که در آن n یکی از اعداد ۱۲۵، ۲۵۰، ۱۰۸، ۶۳، ۱۲۶، r_1، $2r_1$، $3r_2$، $4r_2$، یا $6r_2$ است به طوری که $r_1 = 2p^3 + 1$ و $r_2 = 4p^3 + 1$؛

(ii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ که در آن $n \in \{7, 9\}$؛

(iii) $S_3 \times \mathbb{Z}_n$ که در آن $n \in \{7, 9\}$.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل قضایا و لم‌های کلاسیک در نظریه گروه‌ها که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان می‌شود و این فصل شامل چهار بخش است.در بخش اول مفاهیم مقدماتی نظریه گروه‌ها وقضایای مربوط به آن بیان می‌شود. بخش دوم به ذکر قضایای مربوط به گروه‌های آبلی، p_گروه‌ها و گروه‌های پوچتوان و حلپذیر اختصاص داده می‌شود. در بخش سوم تعاریف وقضایای مربوط به همریختی‌ها و خودریختی‌ها و خودریختی‌های‌مرکزی بیان می‌شود. درپایان به ذکر تعاریف و قضایای مربوط به عمل گروه بر مجموعه‌ها و عمل گروه بر گروه پرداخته می‌شود.

توضیح: در این فصل و فصل‌های بعد گروه دوری از مرتبه n با $\mathbb{Z}_n$ نمایش داده می‌شود همچنین مرتبه هر عضو g با $|g|$. در بعضی موارد برای راحتی مرکز گروهG را با Z و همچنین اثر خودریختی σ را روی هر عضو g به صورت g^σ نمایش می‌دهیم.

۱.۱ تعریف‌ها و قضایای بنیادی

قضیه ۱.۱.۱. (قضیه اول یکریختی). اگر $f : G \to H$ یک همریختی باشد آنگاه نگاشت $\theta : G/\mathrm{Kerf} \to H$ با ضابطه‌ی $((Kerf)x)\theta = xf$ یک تکریختی است. در نتیجه ، $G/\mathrm{Kerf} \cong \mathrm{Im}(f)$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷. ■

قضیه ۲.۱.۱. (قضیه دوم یکریختی). فرض کنیم G یک گروه باشد و $M \leq G$، $N \trianglelefteq G$. در این صورت $N \cap M \trianglelefteq M$ و $NM/N \cong M/N \cap M$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷. ■

قضیه ۳.۱.۱. (قضیه سوم یکریختی). فرض کنیم M، N زیرگروه‌های نرمال یک گروه مانند G باشند به طوری که $N \leq M$، در این صورت $M/N \trianglelefteq G/N$، و داریم

$$(G/N)/(M/N) \cong G/N.$$

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷. ■

قضیه ۴.۱.۱. (قضیه‌تناظر). فرض کنیم $N \trianglelefteq G$ و $\sigma : G \to G/N$ همریختی طبیعی باشد. در این صورت σ تناظر یک‌به‌یکی بین همه زیرگروه‌های G که حاوی Nاند و گردایه همه زیر گروه‌های G/N برقرار می کند.

اگر در این تناظر زیرگروه H ازG به زیرگروه H^* از G/N نظیر شود، آنگاه

(i) $H^* = H/N = H\sigma$؛

(ii) $K \leq H$ اگر و تنها اگر $K^* \leq H^*$، $|H : K| = |H^* : K^*|$؛

(iii) $K \trianglelefteq H$ اگر وتنها اگر $K^* \trianglelefteq H^*$، $H/K \cong H^*/K^*$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۸. ■

تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه H از G را زیر گروه مشخّص G گویند درصورتی که برای هر خودریختی G مانند σ. $H\sigma \leq H$ وبه این صورت می‌نویسیم $H\mathrm{ch}G$.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$ در این صورت

(i) اگر $K\mathrm{ch}H$ و $H\mathrm{ch}G$ آنگاه $K\mathrm{ch}G$.

(ii) اگر $H \trianglelefteq G$ و $K\mathrm{ch}H$ آنگاه $K \trianglelefteq G$.

(iii) اگر $H\mathrm{ch}G$ آنگاه $H \trianglelefteq G$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۹. ■

تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. در این صورت $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ را جابه‌جاگر x، y می‌نامیم. زیرگروه تولید شده به وسیله‌ی همه‌ی جابه‌جاگرها را زیرگروه جابه‌جاگر یا زیرگروه مشتق G گوییم و با G' نشان می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم G یک گروه و A و B زیرگروه‌هایی از آن باشند. در این صورت جابه‌جاگر A، B را با علامت $[A, B]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A,\ b \in B \rangle.$$

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. دراین صورت

(i) $G' \trianglelefteq G$.

(ii) $N \trianglelefteq G$ آنگاه G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leq N$.

برهان. [۱۲] صفحه‌ی ٦٦. ■

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد وx، y، z، اعضایی از آن باشند. دراین صورت

(i) $[y,x]=[x,y]^{-1}$؛

(ii) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$؛

(iii) $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۰. ■

قضیه ۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x,y\in G$. اگر x و y هر دو با $[x,y]$ تعویض‌پذیر باشند، آنگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

(i) $[x^n,y]=[x,y]^n$.

(ii) $(xy)^n=x^ny^n[y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}$

برهان. مقدماتی است. ■

قضیه ۹.۱.۱. (**قضیه‌کوشی**). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p\mid |G|$ که در آن p یک عدد اول است در این صورت G عضوی از مرتبه p دارد.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۶۹. ■

قضیه ۱۰.۱.۱. (**سیلو**). فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد که در آن $n=p^\alpha.n'$ که $\alpha\geq 0$ وp عددی اول است که $p\nmid n'$. در این صورت

(i) G حداقل یک p–زیرگروه‌سیلوی دارد.

(ii) هرp–زیرگروه G جزء یک p–زیرگروه‌سیلوی G است.

(iii) هر دو p–زیرگروه‌سیلوی G مزدوجند.

(iv) عده‌ی همه‌ی p–زیرگروه‌های سیلوی G همنهشت یک به پیمانه p است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۱. ■

قضیه ۱۱.۱.۱. (استدلال فراتینی). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، و $H \trianglelefteq G$. در این صورت اگر $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ آنگاه $G = \mathcal{N}_G(P)H$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۴. ■

لم ۱۲.۱.۱. فرض کنیم G یک pـگروه متناهی از مرتبه p^α باشد که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است. در این صورت به ازای هر $\circ \leq \beta \leq \alpha$. گروه G دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی p^β می‌باشد.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۳. ■

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، $N \trianglelefteq G$ و $N \leq M \leq G$. در این صورت $M/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$ اگر وتنها اگر $M = PN$ که در آن $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۶. ■

لم ۱۴.۱.۱. فرض کنیم G گروهی از مرتبه ۳۶ باشد به طوری که ۴ $= n_۳(G)$. در این صورت، ۲ـزیرگروه سیلوی G نرمال است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۸۵. ■

تعریف. فرض کنیم $G_۱$، $G_۲$، ... ،G_n، n گروه باشند. در مجموعه‌ی $G_۱ \times G_۲ \times ... \times G_n$ عمل دوتایی زیر راچنین تعریف می‌کنیم:

$$(g_۱, g_۲, ..., g_n)(g'_۱, g'_۲, ..., g'_n) = (g_۱g'_۱, g_۲g'_۲, ..., g_ng'_n).$$

که در آن به ازای هر i که $\circ \leq i \leq n$، $g_ig'_i \in G_i$.

مجموعه‌ی $G_۱ \times G_۲ \times \times ... \times G_n$ همراه با عمل فوق یک گروه است. این گروه را حاصلضرب مستقیم خارجی $G_۱$، $G_۲$، ...، G_n می‌نامند، و آن را با علامت $G_۱ \times G_۲ \times ... \times G_n$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱۵.۱.۱. فرض کنیم G_1، G_2، ... ، G_n، n گروه باشند و $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ در این صورت G زیرگروه‌هایی مانند H_1، H_2، ...، H_n دارد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \cong G_i$ و

(i) $G = H_1 H_2 \dots H_n$.

(ii) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \cap H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_n = 1$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۰۱. ■

قضیه ۱۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و G_1، G_2، ...، G_n زیرگروه‌هایی از آن باشند به طوری که

(i) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$؛

(ii) $G = G_1 \dots G_n$؛

(iii) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \cap G_1 \dots G_{i-1} G_{i+1} \dots G_n = 1$ در این صورت

$$G \cong G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۰۱. ■

قضیه ۱۷.۱.۱. فرض کنیم G_1 و G_2 گروه‌هایی متناهی باشند و $H_1 \trianglelefteq G_1$ و $H_2 \trianglelefteq G_2$. در این صورت

(i) $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ و $\frac{G_1 \times G_2}{H_1 \times H_2} \cong \frac{G_1}{H_1} \times \frac{G_2}{H_2}$.

(ii) $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

(iii) $(G_1 \times G_2)' = G_1' \times G_2'$

برهان. مقدماتی است. ■

تعریف. فرض کنیم H، K دو گروه دلخواه و $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ یک همریختی باشد. (به ازای هر h

از H، تصویر h را با φ_h نشان می‌دهیم.) در حاصلضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱ h_۲, (k_۱ \varphi_{h_۲}) k_۲)$$

مجموعه $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصلضرب نیم‌مستقیم H، K باعمل φ گویند و با علامت $H \times_\varphi K$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۱.۱۸. فرض کنیم G یک گروه و M، N زیرگروه‌هایی از آن باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

(i) $N \trianglelefteq G$؛

(ii) $M \cap N = ۱$؛

(iii) $G = MN$.

در این صورت G حاصلضرب نیم‌مستقیم M، N است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۸۰. ■

تعریف. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. کوچکترین مضرب مشترک مرتبه‌ی اعضای G را توان G گویند. و با علامت $exp(G)$ نمایش می‌دهند. بنابراین، اگر $exp(G) = n$ آنگاه به ازای هر $g \in G$ داریم $g^n = ۱$.

لم ۱.۱.۱۹. فرض کنیم G یک گروه و $H \trianglelefteq G$ و $|H| = m$. اگر $exp(G/H) = n$ آنگاه $exp(G) \leq mn$.

برهان. فرض کنیم $g \in G$ چون $exp(G/H) = n$ در این صورت $(Hg)^n = H$ یعنی $g^n \in H$. چون $|H| = m$ پس $(g^n)^m=1$. بنابراین به ازای هر $g \in G$ داریم $g^{mn} = ۱$. در نتیجه $exp(G) \leq mn$. ■

قضیه ۱.۱.۲۰. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $|G| = p^۳q$ و $p > ۲$ که در آن p و q اعداد اول متمایزند. اگر q-زیرگروه G نرمال نباشد آنگاه p-زیرگروه G نرمال است.

برهان. (فرض خلف) فرض کنیم p_زیرگروه سیلوی G نرمال نباشد. در نتیجه $n_p = q$. واضح است که $p < q$ و چون q_زیرگروه G نرمال نیست، پس طبق قضیه سیلو یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

$$n_q = \begin{cases} p \\ p^2 \\ p^3 \end{cases}$$

حالت اول: اگر $n_q = p$ آنگاه $q < p$ و این یک تناقض است.

حالت دوم: فرض کنیم $n_q = p^2$. لذا $q \mid p^2 - 1$. چون q یک عدداول است، پس $q \mid p - 1$ یا $q \mid p + 1$ از این که $p < q$ واضح است که $q \nmid p - 1$. بنابراین $q \mid p + 1$ و در نتیجه $p = 2$ و این یک تناقض است.

حالت سوم: اگر $n_q = p^3$ آنگاه تعداد اعضا مرتبه q برابر است با $p^3(q - 1)$ در نتیجه گروه G تنها یک p_زیرگروه سیلو دارد بنابراین p_زیرگروه سیلو G نرمال است و این یک تناقض است.

لذا در هر حالت فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۲.۱ گروه‌های آبلی، p_گروه‌ها، گروه‌های پوچتوان و گروه‌های حلپذیر

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد در این صورت G به حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش تجزیه می شود.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۶. ■

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنیم G یک p_گروه متناهی غیربدیهی، و$a \in G$. در این صورت اگر مرتبه‌ی a از مرتبه هر عضو G ناکمتر باشد، آنگاه G زیرگروهی مانند H دارد به طوری که $G = \langle a \rangle \times H$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۶. ■

قضیه ۱.۲.۳. (قضیه اساسی تجزیه p_گروه‌های آبلی متناهی). فرض کنیم G یک p_گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت، G را به یک وتنها یک صورت می‌توان به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروه‌های دوری غیر بدیهی‌اش تجزیه کرد. به عبارت دیگر، اگر

$$(۱) \quad G = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times ... \times \langle a_r \rangle.$$

$$(۲) \quad G = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times ... \times \langle b_s \rangle.$$

دو تجزیه G باشند که در آن $a_1, a_2...a_r, b_1...b_s \in G$ و

$$|a_1| \geq |a_2| \geq ... \geq |a_r| \quad , \quad |b_1| \geq |b_2| \geq ... \geq |b_s|$$

آنگاه $r = s$ و به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $\langle a_i \rangle \cong \langle b_i \rangle$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۹. ■

تعریف. فرض کنیم G یک p_گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد و $G = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times ... \times \langle a_r \rangle$ که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq r$، $a_i \in G$، $|a_i| = p^{e_i}$ و $e_1 \geq e_2 \geq ... \geq e_r$. در این صورت اعداد p^{e_1}، p^{e_2}، ... ، p^{e_r} را پایاهای G می‌نامند.

قضیه ۱.۲.۴. (وجود یکتایی تجزیه در گروه‌های آبلی متناهی). فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد . همچنین $|G| = p_1^{n_1}...p_k^{n_k}$ که p_i اعداد اول دوبه دو متمایز، و n_i اعداد طبیعی‌اند. در این صورت G را می‌توان به حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی از زیرگروه‌های دوری G که مرتبه‌ی هر یک از آنها توان مثبتی از یکی از اعداد اول p_i است تجزیه کرد. این تجزیه قطع نظر از ترتیب عوامل مستقیم (نسبت به یکریختی این عوامل) یکتاست.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۳۱. ■

لم ۱.۲.۵. فرض کنیم G یک گروه و N زیرگروه آن باشد. اگر $N \leq Z(G)$ و G/N دوری باشد. آنگاه G آبلی است.