بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولي عصر (عج) رفسنجان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضي

پایان نامه ي کارشناسي ارشد رشته رياضي محض
گرایش آنالیز

نامساوی‌های هاردی و هولدر برای انتگرال فازی

استاد راهنما :
دکتر داوود فروتن نیا

استاد مشاور :
دکتر مهران نامجو

دانشجو :
صادق اسدیان

دی ۱۳۹۰

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

آقای صادق اسدیان

نامساوی‌های هاردی و هولدر برای انتگرال فازی

در تاریخ ۹۰/۱۰/۲۵ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر داود فروتن‌نیا با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۲- استاد مشاور پایان‌نامه آقای مهران نامجو با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه آقای دکتر محمدعلی یعقوبی با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۴- استاد داور داخل از گروه آقای دکتر مرتضی ساحلی با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۵- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی خانم دکتر سهیلا فغفوری با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

تقدیم به:

همسر مهربانم

او که همواره

مشوق و همراه

من بوده وهست.

تقدیر و تشکر

سپاس بی‌پایان خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند، حسابگران از شمارش نعمت‌های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده‌اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید.

الهی ای خالق بی مدد و ای واحد بی عدد، ای اول بی هدایت و ای آخر بی نهایت، ای ظاهر بی صورت و ای باطن بی سیرت، ای می بی ذلت، ای معطی بی فطرت و ای بخشنده‌ی بی منت، ای داننده‌ی رازها، ای شنونده‌ی آوازها، ای بیننده‌ی نمازها، ای شناسنده‌ی نام‌ها، ای رساننده‌ی گام‌ها، ای مبرا از عوایق، ای مهربان بر خلایق.

عذرهای ما را بپذیر که تو غنی و ما فقیر، تو قوی و ما حقیر، از بنده خطا آید و ذلت و از تو عطا آید و رحمت.

هزاران هزار گوهر سپاس و احساس تقدیم به استاد راهنمایم جناب آقای دکتر داوود فروتن‌نیا، بزرگی که نه تنها درتمام مراحل این پایان‌نامه همواره مرا یاری کردند و از محضر علم ایشان بهره فراوان بردم بلکه بودن با ایشان برایم سراسر درس اخلاق، تواضع، فروتنی و زندگی بود.

و هزاران سپاس تقدیم به استاد مشاورم جناب آقای دکتر مهران نامجو و دیگر اساتید محترم گروه‌ی ریاضی که در لحظات علم‌آموزی، راهنمایی‌های آنان چراغ راهم بود.

و از استادان عزیز و گرانقدر، دکتر ساحلی و دکتر یعقوبی که داوری این پژوهش را پذیرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و تقدیم سپاس و ادب به همه‌ی دوستان و عزیزانی که در طول تحصیل مرا یاری کردند.

و در پایان بر دستان پر مهر پدر دلسوزم و بر چشمان پر محبت مادر مهربانم بوسه می‌زنم، کسانی که دعای خیرآنها همواره بدرقه‌ی راهم بوده وهست، کسانی که شعر زندگی‌ام ترنم آهنگ مهربانی آنان است، آن ستاره‌های درخشان آسمان زندگی‌ام که هیچ‌گاه نورشان به خاموشی نخواهد گرایید و همچنین از همسر فداکارم سرکار خانم لیلا مهدیان و فرزندان عزیزم گلبرگ و گلشید سپاس‌گزارم که در طی این دوره صبورانه مرا همراهی کردند.

چکیده

هدف اصلی این تحقیق بررسی نامساوی‌های هاردی و هولدر برای انتگرال فازی ساگنو روی فضای اندازه‌ی فازی مجرد می‌باشد.

در این تحقیق، انتگرال فازی ساگنو معرفی و خواص آن مورد بررسی قرار می‌گیرد، سپس نامساوی هاردی

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 f^p(x)dx$$

و نامساوی هولدر

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^1 f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

برای انتگرال فازی ساگنو بررسی می‌شود، که در آن $f, g : [0, 1] \to [0, \infty)$ توابع انتگرال‌پذیر بوده، $p \geq 1$ و همچنین $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

واژه‌های کلیدی: اندازه فازی، انتگرال فازی، نامساوی هاردی، نامساوی هولدر، نامساوی کوشی-شوارتز

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نظریه‌ی اندازه‌ی فازی و انتگرال فازی در سال ۱۹۷۴ توسط ساگنو[۱] [۱۶] معرفی شد وخواص و کاربردهای این انتگرال توسط ریاضیدان‌های دیگری از جمله رالسکیو[۲] و آدامز[۳] [۱۵] و وانگ[۴] و کلیر[۵] [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین در سال‌های اخیر افراد دیگری نشان داده‌اند که بعضی از نامساوی‌های انتگرال نه تنها در زمینه‌ی کلاسیک، بلکه در زمینه‌ی فازی نیز برقرارند که از جمله‌ی آنها می‌توان به نامساوی هاردی، نامساوی هولدر، نامساوی ینسن[۶] [۱۴]، نامساوی چبیشف[۷] [۶]، نامساوی استولارسکی[۸] [۵]، نامساوی پرکپا—لیندلر[۹] [۱۲] و نامساوی یانگ[۱۰] [۱۶] اشاره کرد.

نرم‌های مثلثی نخستین بار توسط منجر در سال ۱۹۴۲، در رابطه با فضاهای متریک آماری، معرفی شد. شوارتز و اسکلار درسال ۱۹۶۰ این موضوع را مجددا مورد توجه قرار دادند. پس از معرفی مجموعه‌های فازی و بررسی درباره‌ی عملگرهای مجموعه‌ای، تحقیقات در زمینه‌ی T- نرم‌ها و S- نرم‌ها، به عنوان یک موضوع محوری و پایه‌ای، مورد توجه بیشتر و جدی‌تر قرار گرفت.

در فصل اول این پژوهش، T- نرم و S- نرم را تعریف و T- نرم‌های معروف مورد بررسی قرار گرفته شده است، همچنین اندازه‌ی معمولی و اندازه‌ی فازی، با آوردن چندین تعریف و قضیه معرفی و بررسی شده است.

در فصل دوم، نامساوی هاردی در حالت‌های متناهی و نامتناهی برای انتگرال فازی ساگنو مورد بررسی قرار گرفته شده است.

در فصل سوم، انتگرال فازی نیم نرم معرفی شده و سپس نامساوی هاردی برای این انتگرال تعمیم داده شده است. قابل توجه است که در این فصل با انتگرال‌های فازی معرفی شده توسط ساگنو سر و کار داریم.

---

[۱] Sugeno
[۲] Ralescu
[۳] Adams
[۴] Wang
[۵] Klir
[۶] Jensen
[۷] Chebyshev
[۸] Stolarsky
[۹] Prekopa-Leindler
[۱۰] Young

در فصل چهارم، نامساوی کوشی– شوارتز برای انتگرال‌های فازی معرفی و مورد بررسی قرار گرفته، با آوردن نتایج متعدد و ذکر چندین مثال، اهمیت وجود شرایط برقراری این نامساوی بررسی شده است.

در پایان، فصل پنجم به معرفی و بررسی نامساوی هولدر برای انتگرال ساگنو می‌پردازد، همچنین در این فصل نامساوی معکوس را برای انتگرال ساگنو معرفی و بررسی کرده‌ایم و با آوردن نتایج و مثال‌های متعدد وجود شرایط برقراری قضایا مورد اهمیت قرار گرفته است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱—۱ مقدمه

این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول T- نرم‌ها و S- نرم‌ها، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نظریه‌ی اندازه، تعاریف و مفاهیم مقدماتی آن در بخش دوم بیان شده است. در بخش سوم اندازه‌ی فازی رابررسی کرده، یک گزاره‌ی ۹ قسمتی را بیان می‌کنیم که در ادامه مفید واقع می‌شود. خواننده می‌تواند برای اطلاع بیشتر به [۱۳] مراجعه کند.

۱—۲ T- نرم

نرم‌های مثلثی نخستین بار توسط منجر[۱] در سال ۱۹۴۲، در رابطه با فضاهای متریک آماری، معرفی شد. شوارتز[۲] و اسکلار[۳] در سال ۱۹۶۰ این موضوع را مجددا مورد توجه قرار دادند. پس از معرفی مجموعه‌های فازی و بررسی درباره‌ی عملگرهای مجموعه‌ای، تحقیقات در زمینه‌ی T- نرم‌ها و S- نرم‌ها، به عنوان یک موضوع محوری و پایه‌ای، مورد توجه بیشتر و جدی‌تر قرار گرفت.

تعریف ۱.۱.۱ یک T-نرم یک تابع دو متغیره $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ است که در شرایط زیر صدق کند

(۱) برای هر $x \in [0,1]$، $T(x,1) = T(1,x) = x$؛

(۲) برای هر x_1، x_2، y_1 و y_2 در $[0,1]$ اگر $x_1 \le x_2$ و $y_1 \le y_2$ آن‌گاه $T(x_1,y_1) \le T(x_2,y_2)$؛

(۳) $T(x,y) = T(y,x)$؛

(۴) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$.

تعریف ۲.۱.۱ هر عمل دوتایی T روی $[0,1]$ با خواص (۱) و (۲) از تعریف فوق، t—نیم نرم نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱ یک T-هم‌نرم یا(S-نرم) یک تابع دو متغیره $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ است که در شرایط

[۱] Manger

[۲] Schwarz

[۳] Scelar

زیر صدق کند

(۱) برای هر $x \in [0, 1]$، $S(x, 0) = S(0, x) = x$؛

(۲) برای هر x_1 و x_2 و y_1 و y_2 در $[0, 1]$ اگر $x_2 \leq x_1$ و $y_2 \leq y_1$ آن‌گاه $S(x_2, y_2) \leq S(x_1, y_1)$؛

(۳) $S(x, y) = S(y, x)$؛

(۴) $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$.

همان‌طور که از تعاریف فوق بر می‌آید، T- نرم‌ها و S- نرم‌ها دوگان یکدیگرند. به این بیان که برای هر T- نرم می‌توان یک و فقط یک S- نرم تعریف کرد به قسمی که $T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$.

چهار T-نرم معروف عبارتند از:

(۱) T- نرم می‌نیمم، $T_M(x, y) = \min\{x, y\}$؛

(۲) T- نرم ضرب، $T_P(x, y) = x.y$؛

(۳) T- نرم لوکاسویچ [1]

$$T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\},$$

(۴) T- نرم ضرب دراستیک

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \max\{x, y\} < 1, \\ \min\{x, y\} & \max\{x, y\} = 1. \end{cases}$$

با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری T- نرم‌ها، می‌توان تعریف T- نرم را به n مولفه تعمیم داد. این تعریف بر پایه‌ی یک رابطه‌ی بازگشتی و بر مبنای تعریف T- نرم است.

تعریف ۴.۱.۱ هر تابع n متغیره $T_n : [0, 1]^n \to [0, 1]$ با

$$T_n(x_1, ..., x_n) = T[T_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}), x_n]$$

را یک T- نرم با n مولفه گوییم. $T(x_1, x_2)$، T- نرم معمولی با دو مولفه است.

قضایای زیر خاصیت‌های عملگر تعمیم یافته T- نرم را بیان می‌کند.

[1] Lukasiewicz

قضیه ۵.۱.۱ هر T- نرم تعمیم یافته، در خاصیت‌های زیر صدق می‌کند

(۱) بی اثر بودن عنصر ۱، یعنی

$$T_n(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) = T_{n-1}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

(۲) یکنواختی، برای هر $i \in \{1, ..., n\}$، $x_i \le x'_i$ داریم

$$T_n(x_1, ..., x_n) \le T_n(x'_1, ..., x'_n).$$

(۳) جابه‌جایی تعمیم یافته، یعنی با هر جایگشت دیگری از x_iها در $(x_1, ..., x_n)$، مقدار $T_n(x_1, ..., x_n)$ تغییر نمی‌کند.

(۴) شرکت‌پذیری تعمیم یافته، یعنی

$$\begin{aligned} T_n(x_1, ..., x_n) &= T_{i+1}[x_1, ..., x_i, T_{n-i}(x_{i+1}, ..., x_n)] \\ &= T_{n-j+1}[T_j(x_1, ..., x_j), x_{j+1}, ..., x_n]. \end{aligned}$$

قضیه ۶.۱.۱ هر T- نرم تعمیم یافته، در روابط زیر صدق می‌کند

(۱) $T_n(x_1, ..., x_n) \le \min\{x_1, ..., x_n\}$.

(۲) $T_n(x_1, ..., x_n) = 1$ اگر و فقط اگر برای هر $i \in \{1, ..., n\}$، $x_i = 1$.

(۳) اگر $i \in \{1, ..., n\}$، وجود داشته باشد که $x_i = 0$ آن‌گاه $T_n(x_1, ..., x_n) = 0$.

(۴) $T_n(x_1, ..., x_n) \le T_{n-k}(x_1, ..., x_{n-k})$ برای $0 \le k < n$.

مثال ۷.۱.۱ سه نمونه از T- نرم‌های تعمیم یافته که هر یک تعمیمی از حالت دو بعدی متناظر می‌باشد، عبارتند از

(۱) $T_n(x_1, ..., x_n) = \min\{x_1, ..., x_n\}$،

(۲) $T_n(x_1, ..., x_n) = x_1 x_2 ... x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$،

(۳) $T_n(x_1, ..., x_n) = \max(0, x_1 + x_2 + ... + x_n - n + 1)$.

به طور مشابه با روند فوق، می‌توان S- نرم تعمیم یافته را تعریف کرد و خاصیت‌های آن‌را به دست آورد.

۱—۳ نظریه‌ی اندازه

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه و S خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد، S را سیگما—جبر گوییم هرگاه

الف) برای هر $A \in S$، $X - A \in S$؛

ب) اگر (A_n) دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های X در S باشد، آن‌گاه $\underset{n}{\cup} A_n \in S$.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید S یک سیگما— جبر از زیر مجموعه‌های X باشد. تابع $\mu : S \to [\circ, \infty]$ را یک اندازه گوییم هرگاه

الف) $\mu(\emptyset) = \circ$

ب) اگر (A_n) دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های مجزا در S باشد، آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

تعریف ۳.۲.۱ اگر S یک سیگما— جبر از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ی روی S باشد، (X, S, μ) یک فضای اندازه و اعضای S مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید (X, S) یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژی باشد. تابع $f : X \to Y$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هرمجموعه‌ی باز v در Y، $f^{-1}(v)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد و

$$L_p(X, S, \mu) = \left\{ f \;\middle|\; f : X \to C, \quad \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

نرم روی این فضا به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

که در آن C مجموعه‌ی اعداد مختلط است.

برای $p \geq ۱$، فضای $L_p(X, S, \mu)$ باناخ است.

تعریف ۶.۲.۱ هرگاه p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند که $p + q = pq$ یا

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱, \qquad (۱.۲)$$

آن‌گاه p و q را یک جفت نماهای مزدوج می‌نامیم. واضح است که رابطه‌ی (۲.۱) نامساوی‌های $۱ < p < \infty$ و $۱ < q < \infty$ را ایجاب می‌کند. وقتی $p \to ۱$، رابطه‌ی (۲.۱) ایجاب می‌کند که $q \to \infty$. در نتیجه ۱ و ∞ را نیز یک جفت از نماهای مزدوج می‌نامیم.

در قضیه‌ی زیر نامساوی معروف هولدر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۲.۱ ([۵]) فرض کنید p و q مزدوج هم باشند. اگر $f \in L_p$ و $g \in L_q$، آن‌گاه $fg \in L_۱$ یعنی

$$\int |fg| \, d\mu \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{۱}{p}} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{۱}{q}}$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر ثابت‌هایی مانند α و β که هر دو صفر نیستند، وجود داشته باشند به‌طوری‌که تقریبا همه جا $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$. نامساوی فوق، نامساوی هولدر می‌باشد که در حالت خاص $p = q = ۲$، نامساوی شوارتز نامیده می‌شود.

هاردی در [۱۸]، نامساوی معروف هاردی را بیان کرده که آن‌را در قضیه‌ی زیر بررسی می‌کنیم.

قضیه ۸.۲.۱ اگر $p > ۱$ و $f(x) \geq ۰$ و $F(x) = \int_۰^x f(t)dt$، آن‌گاه

$$\int_۰^\infty (\frac{F}{x})^p dx \leq (\frac{p}{p-۱})^p \int_۰^\infty f^p dx.$$