دانشگاه الزهرا(س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ی فیزیک

عنوان:
بررسی حفره های استخوانی و خواص آماری آن
به عنوان یک پروسه ی تصادفی

استاد راهنما:
دکتر کامران کاویانی

استاد مشاور:
دکتر غلامرضا حسن زاده

دانشجو:
فرزانه کاوه
تیر ۸۷

تقدیم به:

دستان پر مهر پدرم

دامان پر عشق مادرم

مهربان خواهرانم

و یگانه برادرم.

تکیه بر تقوا و دانش در طریقت کافریست   راهرو گر صد هنر دارد توکل بایدش

از زحمات جناب آقای دکتر کامران کاویانی استاد راهنمای عزیزم بسیار سپاسگزارم، از خدای بزرگ سلامتی و شادی برایشان آرزومندم.

از جناب آقای دکتر غلامرضا حسن زاده استاد مشاور عزیزم و کلیه همکارانشان در دانشکده علوم پزشکی تهران به خاطر همکاری های دلسوزانه اشان و یاری هایشان سپاسگزارم، امیدوارم پیوسته شاد و پیروز باشند.

از جناب آقای نیما عابدپور به خاطر یاری های بی دریغ شان بی نهایت سپاسگزارم، امیدوارم در مسیر زندگی همواره شاد و پیروز باشند.

از جناب آقای دکتر محمد بیات به خاطر کمک های شایان شان سپاسگزارم.

از دوستان مهربانم:

نادیا هرم وند، زهرا شیخ عباسی، شیما نظری و مرضیه علوی که در طول این مسیر، حضور پر مهرشان همواره باعث دلگرمی من بود بی نهایت سپاسگزارم، برایشان پیروزی و شادمانی از خدای مهربان آرزومندم.

چکیده

ما با استفاده از روشی نوین به دنبال به دست آوردن معادله ای هستیم که بتواند فرایندهای تصادفی را توصیف کند این معادله به ما این توانایی را می دهد که خواص آماری پدیده های تصادفی را مورد بررسی قرار دهیم و همچنین آنها را باز تولید کنیم.

در راستای این هدف، در ابتدا تابع توزیع فرایند مورد نظر را مورد بررسی قرار می دهیم و همین طور لگاریتم تابع توزیع را گزارش می کنیم سپس خاصیت مارکوف بودن فرایند را با استفاده از معادله ی چپمن کلموگروف مورد بررسی قرار می دهیم و مقیاسی را که در آن، فرایند خاصیت مارکوف از خود نشان می دهد را بدست می آوریم.سپس با محاسبه ی ضرایب کرامرز مویال نشان می دهیم که ضرایب بالاتر از ضریب مرتبه ی دوم در حدود صفر می شوند بنابراین چگالی احتمال همبسته از معادله ی فوکر پلانک پیروی می کند.به این ترتیب معادله ی لانژونی را به دست می آوریم که در حقیقت تولید کننده ی فرایند تصادفی مورد نظر است.

از این رو می توان بدین وسیله فرایند مورد نظر را با همان خواص آماری تولید کرد و همچنین به ماهیت و خواص آماری پروسه پی برد.

در این راستا، ما به عنوان مثال شعاع لاکوناهای موجود در بافت استخوانی اسفنجی و فشرده را به عنوان متغیر تصادفی مورد بررسی قرار می دهیم و با بدست آوردن معادله ی فوکر پلانک و معادله ی لانژون توصیف کننده ی شعاع لاکوناها در مکان،قادریم سطحی با خواص آماری مشابه با بافت استخوانی نمونه امان تولید کنیم.

فهرست مطالب

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

مقدمه

۱-۱) تاریخچه:

حل معادلات دیفرانسیل و همچنین مدل سازی پدیده های طبیعی با استفاده از حل جواب های تعینی[۱] این معادلات یکی از موضوعات جالب مورد مطالعه در اواخر قرن نوزدهم بود.

در آن زمان تصور میکردند که اگر در مورد سیستمی تمامی اطلاعات اولیه ی مربوط به آن را داشته باشیم، قطعا رفتار بعدی سیستم را می توان پیش بینی کرد.اما همان گونه که می دانیم در زندگی روزمره بسیاری از پدیده ها هستند که نمی توان به طور دقیق و قاطع در مورد آینده ی پدیده صحبت کرد، این نوع پدیده ها در گروه فرایندهای تصادفی قرار می گیرند. به عنوان نمونه، بسیاری از رخدادهای طبیعی و غیر طبیعی مانند بورس، ترافیک در شبکه های اینترنتی، زبری سطوح، لرزه های زمینی جزو فرایندهای تصادفی می باشند.

دانشمندان علاقمند به مطالعه بر روی این سیستمها شدند و به دنبال روشی برای بازتولید و توصیف چنین رخدادهایی پرداختند.با استفاده از این روش می توان، از ماهیت و خواص آماری فرایند آگاه شد و می توان فرایند را با همان خاصیت های آماری تولید کرد و همچنین رفتارهای بعدی سیستم را پیش بینی کرد.بنابراین ما به دنبال روشی هستیم که در کل بتوان یک رخداد تصادفی را توسط آن مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.یکی از نمونه های ساده از فرایندهای تصادفی که دارای مفاهیم عمومی فرایند های تصادفی است، حرکت براونی است.

در سال ۱۸۲۷، رابرت براون[۲] برای نخستین بار حالت نامنظم حرکت ذرات معلق در آب را مورد بررسی و مطالعه قرار داد و از این رو این پدیده تحت عنوان حرکت براونی نامگذاری شد که نتیجه این مطالعه و بررسی منجر به این شد که یک قانون کلی برای این نوع حرکت بدست آمد.

تا اینکه آلبرت اینیشتن در سال ۱۹۰۵ مقاله ای را در مورد حرکت براونی منتشر کرد[۱]. همچنین مطالعه و بررسی بر روی اثبات تجربی این تئوری توسط اسمولوچوسکی[۳] انجام شد. پس از این اینیشتن و لانژون[۴]، روشی نو و متفاوتی را برای توصیف حرکت براونی بیان کردند[۲].

---

[۱] Deterministic
[۲] Brown
[۳] Smoluchowski
[۴] Langevin

۲ -۱) حرکت براونی

فرض کنید ذره ای به جرم m و سرعت اولیه ی v_0 وارد محیطی می شود که اصطکاک $-bv$ را احساس کند. این حرکت تعینی خواهد بود چون طبق معادله ی نیوتن خواهیم داشت:

$$m\frac{dv}{dt}=-bv \tag{۱-۱}$$

که جواب آن خواهد بود:

$$v(t)=v_0 e^{\frac{-bt}{m}} \tag{۱-۲}$$

که ذره بعد از زمان مشخصه ی $\sigma\approx\frac{m}{b}$ تقریبا سرعت اولیه اش را از دست خواهد داد(به $\frac{1}{e}$ سرعت اولیه اش خواهد رسید). با کمی دقت درمی یابیم که اثر ذرات و برهم کنشی که ذرات محیط با ذره فرودی خواهد داشت دو اثر متفاوت خواهند گذاشت.

اگر ذرات محیط در دمای $T\neq 0$ قرار گرفته باشند خودشان دارای انرژی جنبشی کاتوره ای خواهند بود که واریانس سرعت ذرات محیط متناسب با دمای T خواهد بود. در ضمن وقتی ذره ی فرودی نزدیک ذرات محیط می شود حتی با فرض کوتاه برد بودن پتانسیل اندرکنش، با یک سرعت اولیه وارد میدان پتانسیل ذره ی میزبان خواهد شد و بنابراین می تواند پراکنده شود.

اگر فاصله ی زمانی نگاه کردن به رفتار ذره ی فرودی را آنقدر زیاد کنیم که ذره حافظه ی خودش را از دست بدهد، یعنی آنقدر با ذرات دیگر به خاطر وجود دما برخورد کند که سرعت اولیه اش در رفتار بعدی اثری نگذارد، می توان معادله ی ساده ای را برای دینامیک ذره ی فرودی نوشت:

$$m\frac{dv}{dt}=-bv+f(t) \tag{۱-۳}$$

جمله ی $-bv$ بخش تعینی معادله ی فوق است که به طور متوسط هنوز ذره نیروی اصطکاک را به خاطر داشتن سرعت غیر صفر احساس می کند. نیروی $f(t)$ ، نیرویی خواهد بود که در زمان درشت شده (زمانی که حافظه ی ذره شرایط اولیه اش را فراموش خواهد کند) به نیرو در لحظه ی درشت شده قبل مربوط نمی باشد. به معادله ی دینامیک (۳-۱) معادله ی لانژون می گوییم که دارای یک بخش تعینی $-bv$ و یک بخش کاتوره ای $f(t)$ خواهد بود.

به چنین معادلاتی، معادلات دیفرانسیلی تصادفی می گوییم.

معادله ی (۳-۱) را به شکل زیر می نویسیم:

$$v^{\circ}+\gamma v=\Gamma(t) \qquad (۱-۴)$$
$$\Gamma(t)=\frac{f(t)}{m}$$

که $\Gamma(t)$ را نیروی لانژونی می نامند که دارای خواص زیر می باشد:

$$\langle\Gamma(t)\rangle=0 \qquad (۱-۵)$$
$$\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle=0$$
$$|t-t'|\geq\tau_0$$

τ_0 بازه ی زمانی یک برخورد است که با فرض کوچک بودن آن در مقایسه با زمان واهلش $\tau=\frac{1}{\gamma}$ سرعت یک ذره کوچک، می توان فرض کرد:

$$\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle=q\delta(t-t') \qquad (۱-۶)$$

با توجه به تصادفی بودن $\Gamma(t)$، سرعت نیز یک کمیت تصادفی است.بنابراین آنچه مورد توجه است، احتمال یافتن سرعت در یک بازه معین خواهد بود که این تابع چگالی به زمان و توزیع اولیه بستگی دارد و می توان معادله ی تحول تابع توزیع (معادله ی فوکر پلانک) را بدست آورد.
معادله ی فوکر پلانک[1] برای یک متغیر به شکل زیر است:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\left[\frac{-\partial}{\partial x}D^{(1)}(x)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{(2)}(x)\right]P(x,t) \qquad (۱-۷)$$

که در آن:
$D^{(1)}(x)$ ضریب جابجایی[2] و $D^{(2)}(x)$ ضریب دیفیوژن[3] است.
تعمیم معادله فوکر-پلانک ، بسط کرامرز مویال می باشد که شامل تعداد نا متناهی جمله است [۳-۴].

---
[1] Fokker-Planck
[2] Drift
[3] Diffusion

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{-\partial}{\partial x})^n \ D^{(n)}(x) P(x,t) \qquad (۱-۸)$$

در یک سیستم تصادفی آنچه دارای اهمیت است ،بررسی احتمال رخداد یک اتفاق است.
به طور کلی فرایند های تصادفی به سه گروه تقسیم می شوند:
دسته نخست فرایند های کاملا تصادفی ،به طوریکه چگالی احتمال شرطی در زمان t کاملا مستقل از سایر زمانها می باشد.

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1};....; x_1, t_1) = P(x_n, t_n) \qquad (۱-۹)$$

بنابراین اطلاعات کامل در مورد فرایند در $P(x_1, t_1)$ وجود دارد.
دسته ی دوم فرایند های مارکوف[۱] هستند که در این نوع فرایند ها احتمال شرطی فقط به یک گام قبلی بستگی دارد[۵].

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1};....; x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \qquad (۱-۱۰)$$

بنابراین در یک فرایند مارکوف اطلاعات کامل در مورد فرایند در $P(x_2, t_2; x_1, t_1)$ وجود دارد.
دسته ی سوم فرایند های عمومی هستند که اطلاعات مورد نیاز در مورد سیستم در تابع توزیع همبسته کل سیستم، $P(x_n, t_n;....;x_1, t_1)$ ، موجود می باشد.
با توجه به اینکه اگر فرایندی مارکوف باشد می توان با استفاده از احتمال وابسته اطلاعات کاملی در مورد آن فرایند بدست آورد در غیر این صورت بدست آوردن اطلاعات کامل مشکل است.بنابراین نخستین کاری که برای بررسی سیستم باید انجام شود این است که مارکوف بودن فرایند مورد نظر مورد بررسی قرار گیرد و در صورت مارکوف بودن مقیاسی را که در آن فرایند خاصیت مارکوف از خود نشان می دهد را بدست می آوریم. بررسی ها نشانگر این است که برای هر سیستمی طول مشخصه ای(طول مارکوفی) وجود دارد که در فواصل بزرگتر از این طول فرایند مورد نظر مارکوف است.
معیاری که برای بررسی خاصیت مارکوف به کار می رود برقراری معادله ی چپمن ـ کلموگروف[۲] می باشد.
این طول مارکوف در بسیاری از موارد حاوی اطلاعات ارزشمندی در مورد سیستم می باشد. ما در این کار از روشی که اخیرا توسط فردریچ[۳] و پینکه[۴] ارایه شده استفاده می کنیم[۹ ـ ۶].
آنها با بررسی تعدادی پدیده ی تصادفی از قبیل تلاطم هیدرودینامیک، معادله ی فوکر ـ پلانکی برای تحول زمانی تابع توزیع احتمال بر حسب مقیاس طولی بدست آوردند. معادله ی فوکر ـ پلانک

---

[۱] Markov
[۲] Chapman - Kolmogrov
[۳] Friedrich
[۴] Peinke

مربوط به فرایند مورد نظر که در واقع معادله ی تحولی است برای تابع توزیع متغیر تصادفی است توسط معادله ی لانژونی به صورت زیر تولید می شود:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D^{(1)}(x,t) + \sqrt{D^{(2)}(x,t)}\,\eta(x) \qquad (1-11)$$

که در آن $\eta(x)$ ، نیروی لانژون ، با توزیع گاوسی می باشد.
بنابراین می توان برای بسیاری از فرایند های تصادفی بدین صورت معادله ی تحولی بدست آورد که این رهیافت قابل کاربرد در بسیاری از مسایل از جمله زلزله، ولگشت[1] در محیط متخلخل[2] ، بازار بورس[3] ، فیزیک سطح و فواصل زمانی ضربان قلب[4] و سیگنال صدای صحبت افراد و ... می باشد.
در این پایان نامه در فصل دوم ابتدا فرایندهای تصادفی را معرفی می کنیم و ابزار ریاضی مورد نیاز برای بررسی این گونه فرایند ها را توضیح می دهیم . در فصل سوم مختصری در رابطه با فیزیولوژی استخوان و تهیه ی لام استخوانی را خواهید دید. در فصل بعد به بررسی خواص آماری استخوان می پردازیم . در ابتدای این فصل به طور مختصر در مورد نحوه ی داده گیری و ابزار آن صحبت می کنیم . در اینجا ، شعاع حفره های موجود در تیغه های استخوانی به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شده است که در واقع با بررسی خاصیت مارکوف بودن شعاع حفره های موجود در تیغه های استخوانی و همین طور با بررسی آماری، معادله ی لانژونی را بدست می آوریم که با استفاده از آن می توان شعاع حفره های موجود در تیغه های استخوانی که همان متغیر تصادفی ما هستند را با خواص آماری مشابه با بافت استخوانی واقعی تولید کرد.
اهمیت این کار در این است که با،باز تولید کردن بافت استخوانی ای شبیه به بافت استخوانی موجود در بدن انسان و با همان ویژگیهای آماری ، ما قادریم چنین بافتی را تولید کنیم که این ویژگی می تواند در ساخت پروتزهای استخوانی کارا باشد.

و سرانجام در فصل آخر در پیوست نمونه هایی از بافت های استخوانی آورده شده است همچنین طریقه اصلاح عکس ها در نرم افزار Photoshop گفته شده است و مختصری در مورد پردازش تصویر در نرم افزار Matlab ارایه شده است و الگوریتم Hoshen – Kopelman در انتها آورده شده است.

[1] Random Walk
[2] Porous media
[3] Stoch - Market
[4] Interbeat

فصل دوم

فرایند های تصادفی

فرایندهای تصادفی

۲-۱) مفاهیم احتمال و فرایندهای تصادفی

درک و شناخت کامل یک سیستم ماکروسکوپیک، هنگامی حاصل می شود که بتوان تمام معادلات میکروسکوپیک سیستم را حل کرد و از آنجایی که در حالت کلی چنین کاری امکان پذیر نمی باشد برای رفع این مشکل از یک توصیف تصادفی استفاده می شود. بدین معنا که سیستم را به وسیله ی متغیرهای ماکروسکوپیکی که به صورت تصادفی افت و خیز می کنند توضیح می دهیم.

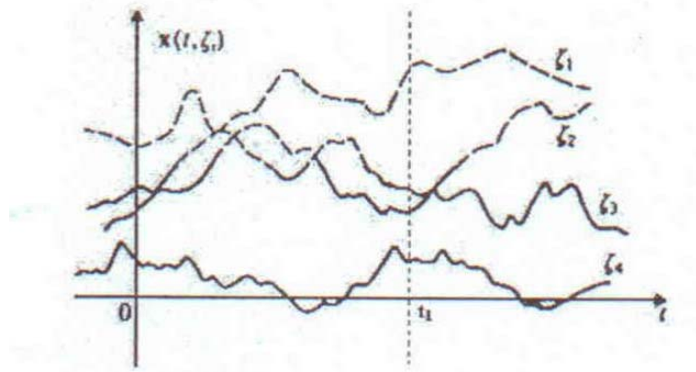
در حالت کلی داده های آماری به دو دسته ی مجزا تقسیم می شوند:

۱) داده های تعینی[۱]: داده هایی هستند که در هر زمان یک رابطه ی صریح ریاضی بین متغیرهای سیستم برقرار است. مانند سیستم جرم و فنر، هنگامی که جرم را از حالت تعادل جابجا می کنیم و آن را رها می کنیم، یک رابطه ی صریح وجود دارد که مکان دقیق جرم را در لحظه های بعد مشخص می کند. از این رو داده های فیزیکی که نشان دهنده ی حرکت جرم هستند تعینی خواهند بود.

۲) داده های غیر تعینی[۲]: داده هایی هستند که در آن مقادیر متغیرهای سیستم معلوم نیست و دارای مقادیر نامعلومی به صورت تصادفی هستند که ممکن است به صورت گسسته یا پیوسته باشند مانند خروجی یک مولد نوفه. مقادیر عددی متغیرهای تصادفی[۳] نامعلومند و نمی توان روی آنها هیچ کنترلی داشت. فرض کنید در یک آزمایش مجموعه ی A شامل همه ی پیشامدهای ممکن در آن آزمایش باشد، اگر هر پیشامد را با ξ_i نشان دهیم، $X(t_i,\xi_i)$ به عنوان اعضای آنسامبل شامل دو متغیر t و ξ خواهد بود (شکل ۲-۱). به هر عضو آنسامبل که در زمان محدودی باشد رکورد نمونه[۴] گویند و در صورتی که در زمان نامحدود باشد تابع نمونه[۵] گفته می شود. $X(t)$ بیانگر فرایند تصادفی[۶] مورد نظر و شامل کل این آنسامبل (فرایند تصادفی) است، بنابراین در هر لحظه رکوردهای مختلف یک فرایند تصادفی، مقادیر متفاوتی دارند. به عنوان مثال مقدار متغیر تصادفی $X(t)$ در لحظه ی t_1 برابر x_1 است[۱۰].

---

[۱] deterministic
[۲] nondeterministic
[۳] Random variable
[۴] sample record
[۵] sample function
[۶] stochastic process



شکل۲-۱ : اعضای آنسامبل یک فرایند تصادفی $X(t)$

در پدیده ها و رخدادهای روزانه، ما بیشتر با فرایندهای تصادفی مواجه هستیم تا با اتفاقات کاملا قابل پیش بینی. و از آنجایی که برای یک فرایند تصادفی نمی توان معادله تعینی مستقیمی به دست آورد، بررسی احتمال وقوع یک رخداد اهمیت دارد و به همین دلیل تئوری احتمال نقش حائز اهمیتی در پیش بینی رخدادها در زمانهای بعدی دارد. در صورتی که در یک آزمایش که چندین بار تکرار شده، پیشامد خاصی تکرار شود و با افزایش دفعات آزمایش، این نسبت به مقدار ثابتی میل کند، معیاری برای پیش بینی شانس رخداد پیشامدها به دست می آید. واضح است که هر چه تعداد آزمایش ها بیشتر باشد، نتیجه قابل اعتمادتر است. هدف نظریه ی احتمال و آمار، پیش بینی و توصیف همین مقادیر ثابت به صورت معیاری کمی برای شانس رخداد پیشامدهاست. به عنوان مثال، اگر سکه ی سالمی را چندین بار پرتاب کنیم، نسبت تعداد این رخداد که شیر بیاید به عدد ۱/۲ میل می کند، بنابراین نظریه ی احتمال در پرتاب یک سکه ی سالم، به احتمال رخداد شیر عدد ۱/۲ را نسبت می دهد.

۲-۲) اصول موضوعه احتمال

در نظریه ی احتمال و یا در هر نظریه ی دیگری، برهان ها در چارچوب روش اصل موضوعی انجام می شوند. در این روش، برخی گزاره های ساده و بدیهی را بدون اثبات پذیرفته که اینها را اصول موضوع می نامیم و سپس براساس آنها مفاهیم و تعاریف دیگر بیان می شود.

به عنوان مثال در نظریه ی احتمال، به هر پیشامد A_i، عددی به نام احتمال رخداد پیشامد، $P(A_i)$، نسبت می دهیم که مجموعه ی تمام پیشامدها را $S=\{A_i\}$ می نامیم که در اصول موضوع زیر صدق می کند:

اصل موضوع ۱: $P(A_i) \ge 0$

اصل موضوع ۲: $P(S) = 1$

اصل موضوع ۳: اگر $A_i (A_1, A_2, A_3, ...)$ دنباله ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، بدین معنا که رخداد هر جفت از این پیشامدها به طور همزمان غیرممکن باشد. احتمال رخداد اجتماع پیشامدها برابر با جمع احتمال رخداد تک تک پیشامدهاست. یعنی:

$$if\ (A_i \cap A_j) = \phi \quad \Rightarrow \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad (۲-۱)$$

۲-۳) تابع توزیع احتمال

X(t)، متغیر تصادفی است که تابع توزیع احتمال[۱] آن، برای یک t معلوم به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_x(x,t) = P\{X(t) \le x\} \qquad \forall x \in \{-\infty ... +\infty\} \qquad (۲-۲)$$

تابع توزیع می تواند میان ۰ و ۱بسته به مقدار x، متغیر باشد.

$$F(+\infty) = P\{X \le +\infty\} = P(X) = 1 \qquad (۲-۳)$$

$$F(-\infty) = P\{X = -\infty\} = 0 \qquad (۲-۴)$$

تعریف بالا را می توان برای n متغیر تعمیم داد. برای توزیع همبسته ی F داریم:

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_n, t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, ...; X(x_n) \le x_n\} \qquad (۲-۵)$$

۲-۴) تابع چگالی احتمال

تابع چگالی احتمال[۲](p.d.f)، در حقیقت مشتق تابع توزیع نسبت به x می باشد:

$$f(x,t) := \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \quad , \quad F(x,t) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi,t) d\xi \qquad (۲-۶)$$

[۱] Probability distribution function
[۲] Probability density function

پس در می یابیم که با داشتن تابع چگالی احتمال می توان به تابع توزیع دست یافت. از آنجایی که $F(+\infty)=1$ است، شرط بهنجارش نتیجه می شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{۲-۷}$$

$$F(x_2,t) - F(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx = P\{x_1 \le X(t) \le x_2\} \tag{۲-۸}$$

و از این رو تابع چگالی احتمال دو متغیره برابر است با:

$$f(x_1,t_1;x_2,t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{۲-۹}$$

که شرط بهنجارش برای این توابع چگالی به صورت زیر است:

$$\int f(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_2 = f(x_1,t_1) \tag{۲-۱۰}$$

$$\int f(x_1,t_1;...;x_n,t_n)dx_n = f(x_1,t_1;...;x_{n-1},t_{n-1}) \tag{۲-۱۱}$$

۲-۵) میانگین، واریانس، خود همبستگی، کواریانس

برای توصیف ویژگیهای آماری یک فرایند تصادفی، باید برای هر x_i , t_i و n ای، تابع توزیع $F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)$ را بدانیم. گرچه اغلب دانستن تعداد معدودی از این میانگین گیریها کفایت می کند. به عنوان مثال دانستن $X(t)$, $X^2(t)$.

میانگین[۱]: مقدار میانگین یا انتظاری متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$E\{X(t)\} = \eta(t) = \langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,t)dx \tag{۲-۱۲}$$

برای داشتن تابع چگالی احتمال، مقدار میانگین به تنهایی کافی نیست بلکه به کمیت دیگری که نشان دهنده ی مقدار پراکندگی از مقدار میانگین باشد، نیاز داریم این کمیت واریانس[۲] نامیده می شود.

[۱] mean
[۲] variance

واریانس: واریانس کمیت X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma_x^2 = \left\langle (X(t) - \left\langle X(t) \right\rangle)^2 \right\rangle = \left\langle X^2(t) \right\rangle - \left\langle X(t) \right\rangle^2 \qquad (۲-۱۳)$$

که ریشه ی واریانس، همانا انحراف معیار متغیر تصادفی X است.

خود همبستگی[۱]: $R(t_1,t_2)$ ، خودهمبستگی مقدار میانگین حاصلضرب متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$R(t_1,t_2) = E\{X(t_1)\ X(t_2)\} = \left\langle X(t_1)\ X(t_2) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1,t_1;x_2,t_2) dx_1 dx_2 \qquad (۲-۱۴)$$

اگر مقدار $R(t_1,t_2)=0$ باشد، متغیرهای $X(t_1)$ و $X(t_2)$ را متعامد می گویند. میانگین توانی $X(t)$، در حقیقت مقدار $R(t_1,t_2)$ است به ازای $t_1=t_2$.

$$R(t,t) = E\{X^2(t)\} = \left\langle X^2(t) \right\rangle \geq 0 \qquad (۲-۱۵)$$

کواریانس[۲]: کواریانس $C(t_1,t_2)$، برای متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} C(t_1,t_2) &= \left\langle \left[X(t_1) - \left\langle X(t_1) \right\rangle\right]\left[X(t_2) - \left\langle X(t_2) \right\rangle\right] \right\rangle \\ &= \left\langle X(t_1) X(t_2) \right\rangle - \left\langle X(t_1) \right\rangle \left\langle X(t_2) \right\rangle \\ &= E\{[X(t_1) - \eta(t_1)][X(t_2) - \eta(t_2)]\} \\ &= R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2) \end{aligned} \qquad (۲-۱۶)$$

کواریانس متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$، به ازای $t_1=t_2=t$، همان واریانس است.

$$C(t,t) = E\{X^2(t)\} - \eta^2(t) = \left\langle X^2(t) \right\rangle - \left\langle X(t) \right\rangle^2 \qquad (۲-۱۷)$$

[۱] auto corrilation
[۲] auto covariance

اگر $X(t_1)$ و $X(t_2)$، دو متغیر مستقل باشند ($P(A\cap B)=P(A)P(B)$). در اینصورت $C(t_1,t_2)=0$ است، عکس این موضوع همواره درست نیست. کواریانس فرایند نرمالیزه شده ی $\frac{X(t)}{\sqrt{C(t,t)}}$، را با $r(t_1,t_2)$ نشان می دهیم که همان ضریب کواریانس[1] است.

$$r(t_1,t_2)=\frac{C(t_1,t_2)}{\sqrt{C(t_1,t_1)C(t_2,t_2)}} \qquad (۲-۱۸)$$

واضح است که $r(t,t)=1$ است، همچنین می توان نشان داد که $|r(t_1,t_2)|\leq 1$ است و اگر $r=\pm 1$ باشد در این صورت $x_1=\pm a x_2+b$ (متغیرهای تصادفی به طور خطی وابسته اند).
دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ را غیرهمبسته می گویند اگر به ازای هر t_1 و t_2 ای مقدار $C(t_1,t_2)=0$ باشد [۱].

۲-۶) نوفه ی سفید

فرایند $\nu(t)$ را نوفه ی سفید[2] می نامیم اگر به ازای $t_i\neq t_j$، $\nu(t_i)$ و $\nu(t_j)$ غیرهمبسته باشند.

$$C(t_i,t_j)=0 \qquad t_i\neq t_j \qquad (۲-۱۹)$$

برای نوفه ی سفید داریم:

$$C(t_1,t_2)=q(t_1)\delta(t_1-t_2)$$

که در آن $q(t)\neq 0$ است.

مقدار میانگین نوفه ی سفید، صفر است.

۲-۷) تابع مشخصه

تابع مشخصه[3] تبدیل فوریه تابع چگالی احتمال است و برای متغیر تصادفی X با مقدار عددی x به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(j\omega x)dx \qquad (۲-۲۰)$$

---

[1] correlation coefficient
[2] White noise
[3] Characteristic function