بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
بخش ریاضی دانشکده علوم

ایده آلهای تحویل‌ناپذیر فازی و اسپکتروم اول فازی

پایان‌نامه تحصیلی
ارائه شده برای اخذ کارشناسی ارشد

استاد راهنما :
دکتر محمد مهدی زاهدی

تهیه و تنظیم :
حسین حاجی‌آبادی

شهریور ۱۳۷۲

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

بسه

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مز بور شناخته نمی‌شود.

دانشجو :

استاد راهنما:

داور ۱ :

داور ۲ :

بسم الله الرحمن الرحیم

خداوند سبحان را بسی شاکرم که به این بنده بی‌مقدارش عنایتی فرمود تا در ظل توجهاتش در راه کسب علم و دانش توانستم در سخت‌ترین شرایط زندگی قدمی مثبت بردارم. باشد که فیض روح‌القدس مددی کند تا آموخته‌هایم را در راه خیر و صلاح جامعهٔ بشریت بکار گیرم.

با توجه به حدیث لم یشکر المخلوق و لم یشکر الخالق وظیفهٔ خود می‌دانم که برترین سپاسها را نثار استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محمد مهدی زاهدی بنمایم که در مدت انجام این پایان‌نامه از تواضع علمی و همواره از مشاورت و راهنمائیهای بی‌شائبهٔ ایشان کمال بهره‌وری را داشته‌ام. و از پدر و مادرم علی‌الخصوص از همسر مهربانم که بار سنگین زندگی همراه با تعلیم و تربیت پنج فرزندم را بعهده گرفته‌اند سپاسگذاری می‌کنم. و از جناب آقایان دکتر یوسف بهرامپور و دکتر نصراله گرامی که زحمت مطالعه و بررسی این رساله را برخود هموار ساخته و در جلسهٔ دفاعیه اینجانب شرکت و راهنمائیهای لازم را مبذول داشته‌اند و همچنین از کلیه اساتید بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان که در ارشاد و تعلیم اینجانب نقش بسزائی داشته‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم در خاتمه از خانمها باقری و مانی که با حوصله و دقت زیاد تایپ کامپیوتری رساله را پذیرفته‌اند کمال امتنان را دارم.

حسین حاجی آبادی
شهریور ۱۳۷۲

خلاصه رساله

لطفی عسکرزاده استاد ایرانی دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵ با چاپ مقالهٔ [۲۹] مفهوم مجموعه‌های فازی (Fuzzy Sets) را بعنوان تابعی از مجموعهٔ جهانی X به فاصلهٔ [0,1] مطرح نموده و نظریهٔ مجموعه‌های فازی را بنا نمود. پس از آن نظریهٔ مجموعه‌های فازی مورد استفاده بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف ریاضی همچون جبر، آنالیز، توپولوژی، کامپیوتر و ... قرار گرفت مفهوم ایده‌آلهای فازی توسط لیو (Liu) در سال ۱۹۸۲ [۱۹] معرفی شد و سپس در زمینهٔ ایده‌آلهای اول فازی افرادی همچون مخرجی (Mukherjee) و سن (Sen) در [۲۳] و سوامی و سوامی در مقالهٔ [۲۷] نتایج مهمی بدست آوردند.

موضوعات این رساله در ۵ فصل تنظیم شده است. در فصل مقدماتی (فصل 0) تعاریف و قضایایی که مورد استفاده فصلهای بعدی قرار می‌گیرند بیان می‌شود. در فصل I که حاصل مقالهٔ [۱۲] است، حلقهٔ هم‌مجموعه‌های فازی معرفی خواهد شد، مفهوم رادیکال پوچ فازی و رادیکال ژاکوبسن فازی یک حلقه که بترتیب با FPR(R) و FJR(R) نشان داده می‌شود بیان خواهد شد و بعلاوه نتایجی در مورد FPR(R) و FJR(R) حاصل می‌شود.

مطالب فصل II که از مقالهٔ [۱۱] اخذ شده است مفهوم ایده‌آلهای تحویل‌ناپذیر فازی مطرح می‌شود. مشخص خواهد شد که ایده‌آلهای تحویل‌ناپذیر فازی حالت توسعه‌یافتهٔ ایده‌آلهای اول فازی می‌باشند بدین معنی که هر ایده‌آل اول فازی ایده‌آل تحویل‌ناپذیر فازی است ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست. نتایجی در مورد تصویر و تصویر معکوس ایده‌آلهای تحویل‌ناپذیر فازی تحت یک هomomorphism بدست خواهد آمد.

در فصل III که از مقالهٔ [۱۵] استخراج شده توپولوژی روی مجموعهٔ ایده‌آلهای اول فازی حلقهٔ R تعریف می‌شود که اسپکتروم اول فازی نامیده می‌شود. ثابت خواهد شد زیر فضاهای خاصی از آن فشرده‌اند و اگر حلقه بولی باشد زیر فضاهای خاصی هاسدورف می‌باشند، و سپس یک هومورفیسم حلقه‌ای در نظر گرفته و بکمک آن یک تابع بین اسپکتروم اول فازی آنها تعریف خواهد شد، که در حالت خاصی این تابع همیومورفیسم می‌شود.

در فصل آخر نتایجی در مورد اسپکتروم اول فازی بدست آورده‌ایم از جمله آنکه این فضا فشرده است و بعلاوه مجموعه‌های باز پایه فشرده می‌باشند. و نشان داده‌ایم در حالتی که R حلقهٔ بولی است این فضا T_1 نیست و سرانجام ثابت کرده‌ایم اگر هومورفیسم حلقه‌ای $f : R \to R'$ یک به یک باشد آنگاه تابعی از اسپکتروم اول فازی X' به X تعریف می‌شود که تصویر این تابع در X چگال است.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل 0 پیشنیازها	۱
فصل I هم‌مجموعه‌های فازی، رادیکال ژاکوبسن فازی، رادیکال پوچ فازی	۷
۱.I هم‌مجموعه‌های فازی، رادیکال ژاکوبسن فازی	۸
۲.I رادیکال پوچ فازی	۱۵
۳.I تصویر ایده‌آل فازی FPR(R) و FJR(R) تحت هومورفیسم	۲۲
فصل II ایده‌آلهای فازی تحویل‌ناپذیر و اولیه	۲۶
۱.II ایده‌آلهای فازی تحویل‌ناپذیر فازی	۲۷
۲.II تصویر و تصویر وارون ایده‌آلهای تحویل‌ناپذیر فازی تحت هومورفیسم	۳۷
۳.II ایده‌آلهای اولیه و تحویل ناپذیر فازی	٤۲
فصل III اسپکتروم اول فازی یک حلقه	٤۹
۱.III توپولوژی روی مجموعهٔ ایده‌آلهای اول فازی یک حلقه	۵۱
۲.III تصویر و تصویر وارون ایده‌آلهای اول فازی تحت هومورفیسم	۷۰
۳.III تحویل‌ناپذیری و مرتبط بودن فضای اسپکتروم اول فازی	۷۵
فصل IV فشردگی فضای اسپکتروم اول فازی	۸۲
۱.IV نتایجی روی فشردگی فضای اسپکتروم اول فازی	۸۳
۲.IV قضیه در مورد چگال بودن فضای اسپکتروم اول فازی	۱۰۲
فهرست مراجع Reference	۱۱۰
واژه‌نامه انگلیسی - فارسی	۱۱٤
واژه‌نامه فارسی - انگلیسی	۱۱۷
فهرست نمادها	۱۲۰

فصل 0

پیشنیازها

در این فصل بعضی از تعاریف و قضایایی را مطالعه می‌کنیم که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.0 - فرض کنید X مجموعهٔ جهانی غیر تهی باشد. به هر تابع مانند $\mu : X \to [0,1]$ یک زیر مجموعهٔ فازی از X گویند.

تعریف ۲.0 - فرض کنید θ,μ دو زیر مجموعهٔ فازی از X باشند. در اینصورت

(i) $\mu \subseteq \theta$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $\mu(x) \leq \theta(x)$،

(ii) $\mu = \theta$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $\mu(x) = \theta(x)$.

تعریف ۳.0 - فرض کنید $\wedge$ مجموعهٔ اندیسگذار بوده، μ، δ و μ_i برای هر $i \in \wedge$، زیر مجموعه‌های فازی از X باشند. در اینصورت زیر مجموعه‌های فازی $\mu \cap \delta$، $\mu \cup \delta$، $\bigcap_{i \in \wedge} \mu_i$ و $\bigcup_{i \in \wedge} \mu_i$، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu \cap \delta(x) = \min \{\mu(x) , \delta(x)\}.$$

$$\mu \cup \delta(x) = \max \{\mu(x) , \delta(x)\}.$$

$$\bigcup_{i \in \wedge} \mu_i(x) = \sup \{\mu_i(x) \mid i \in \wedge\}.$$

$$\bigcap_{i \in \wedge} \mu_i(x) = \inf \{\mu_i(x) \mid i \in \wedge\}.$$

تعریف ۴.0 - فرض کنید μ زیر مجموعهٔ فازی از X و $t \in [0,1]$ باشد. آنگاه به مجموعهٔ

$$\mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$$

زیر مجموعهٔ تراز μ نسبت به t گوئیم. و μ_1 را با μ_* نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\mu_* = \{x \in X \mid \mu(x) = 1\}$$

تعریف ۰.۵- فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. به زیر مجموعهٔ فازی μ از R، ایده‌آل چپ (راست) فازی گویند هرگاه

(i) برای هر $x,y \in R$، $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$،

(ii) برای هر $x,y \in R$، $\mu(xy) \geq \mu(y)$ ($\mu(xy) \geq \mu(x)$).

قرارداد : اگر μ ایده‌آل فازی چپ و همچنین ایده‌آل فازی راست R باشد. در اینصورت به μ ایده‌آل فازی از R گویند. و در اینصورت شرط (ii) به صورت زیر خلاصه می‌شود،

$$\mu(xy) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

قضیهٔ ۰.۶- [قضیهٔ ۱.۲، ۱۲]. زیر مجموعهٔ فازی μ از R ایده‌آل فازی است اگر و تنها اگر برای هر $t \in Im(\mu)$، μ_t ایده‌آل R باشد.

تعریف ۰.۷- فرض کنید A , B دو زیر مجموعهٔ فازی از حلقه R باشند. در اینصورت زیر مجموعه‌های فازی AoB و A + B به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$AoB = \begin{cases} \sup\limits_{x=yz} \{\min(A(y), B(z))\} \\ 0 \quad \text{اگر } x \text{ به صورت ضرب دو عضو نوشته نشود} \end{cases}$$

$$A + B(x) = \sup_{x=y+z} \{\min(A(y), B(z))\}$$

لم ۰.۸- [قضیهٔ II.۱۵.۱، ۳۴]. اگر A و B ایده‌آلهای فازی از R باشند، آنگاه A + B ایده‌آل فازی از R است.

لم ۰.۹- [لم ۱، ۲۳]. فرض کنید A و B ایده‌آلهای فازی از R باشند، در اینصورت

(i) $A \cap B$ ایده‌آل فازی از R است،

$.AoB \subseteq A \cap B$ (ii)

تعریف 0.10- ایده‌آل فازی غیر ثابت μ از R را یک ایده‌آل اول فازی گوئیم، هرگاه برای ایده‌آلهای فازی δ و θ داشته باشیم $\delta o \theta \subseteq \mu$ آنگاه $\delta \subseteq \mu$ یا $\theta \subseteq \mu$.

قضیه 0.11- [قضیهٔ ۱.۲، ۲۷]. ایده‌آل فازی μ از R اول است اگر و تنها اگر عددی مانند $t \in [0,1)$ بقسمی یافت شود که $Im(\mu) = \{1,t\}$، و μ_* ایده‌آل اول از R باشد.

تعریف 0.12- به ایده‌آل فازی μ از R ایده‌آل فازی ماکزیمال گویند اگر و تنها اگر عددی مانند α بقسمی یافت شود که $\alpha \in [0,1)$ و $Im(\mu) = \{1,\alpha\}$، و μ_* ایده‌آل ماکزیمال حلقهٔ R باشد.

تعریف 0.13- فرض کنیم A زیر مجموعهٔ فازی از حلقهٔ R باشد. در اینصورت ایده‌آل فازی تولید شده توسط A را که با $\langle A\rangle$ نمایش داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\langle A\rangle = \cap \{I \mid A \subseteq I, \ \text{است}\ R\ \text{ایده‌آل فازی}\ I\}.$$

گزارهٔ 0.14- [قضیهٔ I.۱۵.۱، ۳۶]. فرض کنید μ ایده‌آل فازی حلقهٔ R و $t_1 < t_2$ باشد. در اینصورت $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ اگر و تنها اگر $x \in R$، موجود نباشند بقسمی که $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.

لم 0.15- هرگاه μ ایده‌آل فازی از R باشد، در اینصورت

(i) برای هر $x \in R$، $\mu(x) \leq \mu(0)$.

(ii) اگر $\mu(x) < \mu(y)$ آنگاه $\mu(x-y) = \mu(y-x) = \mu(x)$.

اثبات: (i) برای هر $x \in R$، بنا به تعریف 0.5 (i) نتیجه می‌شود $\mu(0) = \mu(x-x) \geq \min(\mu(x), \mu(x)) = \mu(x)$. و لذا حکم (i) به اثبات می‌رسد.

(ii) بنا به تعریف 0.5 و رابطهٔ $\mu(x) < \mu(y)$ داریم

$$\mu(x-y) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) = \mu(x) \qquad (1)$$

از طرفی واضح است

$$\mu(x) = \mu\,[(x - y) + y] \geq \min\{\mu(x - y)\,,\,\mu(y)\} \tag{۲}$$

از طرفی از (۲) و اینکه $\mu(x) < \mu(y)$ نتیجه می‌شود که $\mu(x) \geq \min\{\mu(x - y)\,,\,\mu(y)\} = \mu(x - y)$.

پس با رابطهٔ (۱) داریم $\mu(x - y) \geq \mu(x) \geq \mu(x - y)$. و لذا حکم به اثبات می‌رسد.

لم ۱۶.0 - اگر δ ایده‌آل فازی حلقهٔ R و $\delta(x - y) = \delta(0)$، آنگاه

$$\delta(x) = \delta(y)$$

اثبات: بنا به تعریف ۵.0 داریم

$$\delta(x) = \delta\,[(x - y) + y] \geq \min\,(\delta(x - y)\,,\,\delta(y))$$

$= \min\,(\delta(0)\,,\,\delta(y))$ چون $\delta(x - y) = \delta(0)$

$= \delta(y).$ بنا به لم ۱۵.0 (i)

بطریق مشابه ثابت می‌شود $\delta(y) \geq \delta(x)$. پس نتیجه می‌شود $\delta(x) = \delta(y)$.

تعریف ۱۷.0 - فرض کنید S و S' دو مجموعه و $f : S \rightarrow S'$ یک تابع و μ زیر مجموعهٔ فازی از S باشد. آنگاه به μ زیر مجموعهٔ فازی f - پایا (f - invariant) گویند، در صورتیکه $f(x) = f(y)$ نتیجه دهد $\mu(x) = \mu(y)$.

تعریف ۱۸.0 - فرض کنید S و S' دو مجموعه $f : S \rightarrow S'$ یک تابع و μ و η به ترتیب زیر مجموعه‌های فازی از S و S' باشند. آنگاه زیر مجموعه‌های فازی $f(\mu)$ و $f^{-1}(\eta)$، بترتیب از S' و S به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(\mu)(y)=\begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & , \quad f^{-1}(y) \neq \varphi \text{ اگر} \\ & , \quad \forall y \in S' \\ 0 & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$f^{-1}(\eta)(x) = \eta\,(f(x)). \quad , \forall x \in S.$$

لم ۱۹.0 - [لم II.۲.۳.۲، ۳۶]. فرض کنید $f : R \dashrightarrow R'$ هومومورفیسم حلقه‌ای، I ایده‌آل فازی از R و J ایده‌ال فازی از R' باشند. در اینصورت

(i) اگر f بروی باشد، آنگاه $f(I)$ ایده‌آل فازی R' است،

(ii) $f^{-1}(J)$ ایده‌آل فازی از R است،

(iii) اگر I_1 و I_2، دو زیر مجموعهٔ فازی از حلقهٔ R بقسمی که $I_1 \subseteq I_2$، آنگاه $f(I_1) \subseteq f(I_2)$،

(iv) اگر J_1 و J_2، دو ایده‌آل فازی R' باشند بطوری که $J_1 \subseteq J_2$، آنگاه $f^{-1}(J_1) \subseteq f^{-1}(J_2)$،

(v) $f(f^{-1}(J)) \subseteq J$، و اگر f بروی باشد آنگاه تساوی برقرار است،

(vi) $I \subseteq f^{-1}(f(I))$، اگر $x_{\ker f} \subseteq I$ یا I ایده‌آل فازی f - پایا باشد، تساوی برقرار است.

لم ۲۰.0 - فرض کنید $f : R \dashrightarrow R'$ هومومورفیسم حلقه‌ای به روی بوده و μ، δ ایده‌آلهای فازی از R و μ' و δ' ایده‌آلهای فازی از R' باشند. آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.

(i) $f(\mu \cap \delta) \subseteq f(\mu) \cap f(\delta)$،

(ii) $f^{-1}(\mu' \cap \delta') = f^{-1}(\mu') \cap f^{-1}(\delta')$.

اثبات : (i) چون $\mu \cap \delta \subseteq \mu$ و $\mu \cap \delta \subseteq \delta$. در نتیجه بنا به لم ۱۹.0 (iii) داریم

$$f(\mu \cap \delta) \subseteq f(\delta)\ ,\ f(\mu \cap \delta) \subseteq f(\mu)$$

از اینرو نتیجه می گیریم:

$$f(\mu \cap \delta) \subseteq f(\mu) \cap f(\delta).$$

(ii) برای هر $x \in R$ داریم

$$f^{-1}(\mu' \cap \delta')(x) = \mu' \cap \delta' (f(x)) = \min \{\mu'(f(x)) , \delta'(f(x))\}$$

$$= \min \{f^{-1}(\mu')(x) , f^{-1}(\delta')(x)\} = (f^{-1}(\mu') \cap f^{-1}(\delta'))(x) \Longrightarrow f^{-1}(\mu' \cap \delta') = f^{-1}(\mu') \cap f^{-1}(\delta')$$

تعریف 0 .۲۱- اگر S یک مجموعهٔ غیر تهی، $x \in S$ و $\alpha \in (0,1]$ باشد، آنگاه زیر مجموعهٔ فازی μ تعریف شده به صورت:

$$\mu(z) = \begin{cases} \alpha \quad , & z = x \text{ اگر} \\ 0 \quad , & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad , \qquad \forall z \in S$$

نقطهٔ فازی (fuzzy point) گویند، که با x_α نمایش داده می‌شود.

لم 0 .۲۲- فرض کنید μ یک زیر مجموعهٔ فازی از S، $t , s \in Im(\mu)$ و $\mu_t = \mu_s$، آنگاه $t = s$.

اثبات : چون $s , t \in Im(\mu)$، پس اعضاء x_1 و x_2 از S موجودند که $\mu(x_1) = t$ و $\mu(x_2) = s$. حال فرض کنید حکم برقرار نباشد، بنابراین بدون آنکه از کلیت اثبات کاسته شود فرض کنیم $t < s$. در نتیجه $\mu(x_1) < s$. پس با تعریف ۴.0، $x_1 \notin \mu_s$. و چون $\mu_t = \mu_s$، لذا $x_1 \notin \mu_t$ که تناقض دارد با فرض $\mu(x_1) = t$.

فصل I

هم‌مجموعه‌های فازی، رادیکال ژاکوبسن فازی، رادیکال پوچ فازی

مقدمه: ایده‌آلهای فازی برای اولین بار توسط (Liu) در سال ۱۹۸۲ در مقالهٔ [۱۹] تعریف شده است. سپس مخرجی (Mukherjee) و سن (Sen) در سال ۱۹۸۷ در مقالهٔ [۲۳] ایده‌آلهای اول فازی را مطرح نمودند. سوامی (Swamy) و سوامی در [۲۷] نتایج قابل توجهی کسب کرده و بخصوص ایده‌آلهای اول فازی را ضابطه‌مند کردند. و زاهدی در [۳۶] شرایط معادلی برای ایده‌آل اول فازی بودن بدست آورده سپس توسط کومبهجکار (Kumbhojkar) در مقالهٔ [۱۶] ایده‌آلهای اول فازی به صورت دیگر تعریف شد و بر مبنای تعریف جدید، کومار رادیکال پوچ فازی (Fuzzy nil radical) رادیکال ژاکوبسن فازی (fuzzy Jacobson radical) حلقهٔ جابجایی و یکدار R راتعریف نمود که بترتیب آنها را با FPR(R) و FJR(R) نمایش می‌دهیم. و در حالتی که حلقهٔ R بولی باشد نشان می‌دهیم که FPR(R) = FJR(R). پس از آن حلقهٔ هم‌مجموعه‌های فازی $R_\mu = \{\mu^*_x \mid x \in R\}$، که μ ایده‌آل فازی R است را در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم که اگر θ = FJR(R) و μ = FPR(R)، آنگاه حلقه R_θ نیم ساده (Semisimple) و رادیکال پوچ (nil radical) حلقهٔ R_μ صفر است. آنگاه با توجه به مفهوم ایده‌آلهای نیم اول (Semiprime) فازی، که بوسیلهٔ کمار در مقالهٔ [۱۴] مطرح شده ثابت می‌کنیم μ ایده‌آل اول فازی است اگر و تنها اگر به صورت مقطع ایده‌آلهای نیم اول فازی باشد. و در نهایت نشان داده می‌شود تحت همومورفیسم حلقه‌ای بروی $f : R \rightarrow R'$ تصویر ایده‌آل نیم اول (اول یا ماکزیمال) حلقهٔ R، ایده‌آل نیم اول (اول یا ماکزیمال) فازی حلقهٔ R'، است. و بعلاوه ثابت می‌کنیم $f(FPR(R)) \subseteq FPR(R')$ و $f(FJR(R)) \subseteq (FJR(R'))$. درحالت خاص اگر FPR(R)، FJR(R) ایده‌آلهای فازی f - پایا باشند، آنگاه رابطه‌های فوق به تساوی تبدیل می‌شوند.

در این فصل حلقهٔ R و R' جابجایی و یکدار فرض می‌شوند.

I .۱ هم‌مجموعه‌های فازی و رادیکال ژاکوبسن فازی

تعریف I .۱ .۱- به ایده‌آل فازی μ از R ایده‌آل فازی ماکزیمال گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

(i) $\mu(0) = 1$ و $\mu(1) < \mu(0)$

(ii) اگر برای $b \in R$، $\mu(b) < \mu(0)$، آنگاه $r \in R$ بقسمی موجود باشد که $\mu(1-rb) = \mu(0)$.

قضیه I .۱ .۲- ایده‌آل فازی μ از R یک ایده‌آل ماکزیمال فازی است اگر و تنها اگر μ_* یک ایده‌آل ماکزیمال حلقهٔ R باشد.

اثبات : فرض می‌کنیم μ یک ایده‌آل ماکزیمال فازی بوده و ایده‌آل M به طور اکید شامل μ_* باشد. در نتیجه عضوی مانند $x \in M$ موجود است که $x \notin \mu_*$. و لذا $\mu(x) < \mu(0)$. بنا به تعریف ۱.۱.I، $r \in R$ بقسمی وجود دارد که $\mu(1 - rx) = \mu(0)$. از اینرو $(1 - rx) \in \mu_*$. چون $\mu_* \subseteq M$، پس $(1 - rx) \in M$. با توجه به آنکه $x \in M$، بایستی $1 \in M$. یعنی $M = R$. در نتیجه μ_* ایده‌آل ماکزیمال است.

برعکس فرض می‌کنیم μ_* ایده‌آل ماکزیمال حلقهٔ R بوده و $\mu(0) = 1$. ادعا می‌کنیم که

$$\mu(1) < \mu(0) \qquad (۱)$$

زیرا در غیر اینصورت بنا به لم ۱۵.0 (i) $\mu(1) = \mu(0)$. پس برای هر $x \in R$ داریم

$$\mu(x) = \mu(1.x) \geq \max\,(\mu(1)\ ,\ \mu(x)) \geq \mu(1) = \mu(0)$$

از طرفی بنا به لم ۱۵.0 (i) $\mu(x) \leq \mu(0)$. از اینرو برای هر $x \in R$، $\mu(x) = \mu(0) = 1$. در نتیجه $R = \mu_*$. که تناقض است. پس ادعا ثابت است.

فرض می‌کنیم برای $b \in R$، $\mu(b) < \mu(0)$. در نتیجه $b \notin \mu_*$. چون μ_* ایده‌آل ماکزیمال است، بنابراین $R = \langle b\rangle + \mu_*$. در نتیجه برای عضو $1 \in R$، عضوهای $a \in \mu_*$ و $r \in R$ چنان موجود