بسم الله الرحمن الرحيم

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعـضای هیـئت داوران نـسخهٔ نـهایی پایان نامه خـانم/ آقای علیرضا خلیلی اسبوئی

تحت عنوان: **دربارهٔ مجموع درجات سرشتهای تحویل ناپذیر**

را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه کارشناسی ارشد پیشنهاد می‌کنند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر سید احمد موسوی	استادیار	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مجتبی منیری	استادیار	
۴- استاد ناظر	آقای دکتر محمدرضا درفشه	استاد	
۵- استاد ناظر	آقای دکتر سید محمدباقر کاشانی	دانشیار	

۱۳۷۸ /۴/ ۲۰

شماره:.................
تاریخ:.................
پیوست:.................

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به مرکز نشر دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی است که در سال ۱۳۷۷ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر علی ایرانمنش و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر سید احمد موسوی از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های نشریات دانشگاه تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به مرکز نشر دانشگاه اهدا کند دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب علیرضا خلیلی اسبوئی دانشجوی رشته ریاضی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

دربارهٔ مجموع درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر

نگارش

علیرضا خلیلی‌اسبوئی

استاد راهنما

دکتر علی ایرانمنش

استاد مشاور

دکتر سیداحمد موسوی

زمستان ۱۳۷۷

تقدیم به پدر دلسوزم

که با ایثار وجودش، راه رسیدن به

مدارج علمی را برایم مهیا ساخت

تقدیم به مادر مهربانم

که از ذره‌ذره وجودش در راه رشد علمی

و اخلاقیم مایه گذاشت

تقدیم به همسر عزیزم

که انجام این تحقیق بدون یاری، دلگرمی و

صبوری او امکان نداشت

و

تقدیم به تمام معلمان و اساتیدی که صادقانه شمع راه تعلیم و تربیت هستند.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند بزرگ را که عالم مطلق است و نعمت آموختن را به ما ارزانی داشته است. در به انجام رساندن این تحقیق انسانهای والایی مرا یاری کردند که در اینجا وظیفه خود می دانم تا حد امکان از یکایک این عزیزان قدردانی نمایم.

از استاد گرامی، جناب آقای دکتر علی ایرانمنش که بر من منت گذاشتند و راهنمائی پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را می نمایم. اگر همراهی ایشان نبود انجام این تحقیق میسر نمی شد.

از استاد مشاور بزرگوار جناب آقای دکتر سید احمد موسوی که مشاورت پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و سپاس را دارم.

از مدیر محترم بخش ریاضی جناب آقای دکتر مجتبی منیری به خاطر زحمات فراوانی که برای دانشجویان می کشند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر محمد رضا درفشه و جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی که قبول زحمت فرمودند و داوری پایان نامه را به عهده گرفتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

در پایان از تمامی افرادی که در انجام این پژوهش مرا یاری نمودند سپاسگزارم و موفقیت آنها را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده:

فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_۱, \cdots, \chi_n\}$ مجموعه تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G باشد. قرار می‌دهیم $\tau = \sum_{i=۱}^{n} \chi_i$ و $T(G) = \tau(۱)$ برابر با مجموع تمام درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G است. یکی از مسائل مورد بحث نظریه نمایش گروهها بدست آوردن اطلاعاتی راجع به ساختار گروههای متناهی است. بعنوان مثال براحتی ثابت می‌شود که G یک گروه آبلی است اگر و فقط اگر $|G| = T(G)$. حال فرض کنید H یک زیرگروه غیربدیهی G باشد قرار می‌دهیم:

$$\delta(G, H) = T(G) - T(H)$$

و

$$\delta_{\circ}(G, H) = \delta(G, H) - (a - ۱)$$

که $a = (\tau_H, ۱_H)$.

در این پایان‌نامه ساختمان زوج (G, H) را در سه حالت زیر مشخص کرده‌ایم:

۱ـ اگر $\delta_{\circ}(G, H) = \circ$ آن‌گاه G یک گروه فروبنیوس با هسته H است.

۲ـ اگر $\delta_{\circ}(G, H) = ۱$ آن‌گاه ساختمان زوج (G, H) در قضیه (۳ـ۲ـ۱) مشخص گردیده است.

۳ـ اگر $\delta_{\circ}(G, H) = ۲$ آن‌گاه ساختمان زوج (G, H) در قضیه (۴ـ۱ـ۱) مشخص گردیده است.

مقدمه

تاکنون صد سال از پیدایش نظریهٔ نمایش گروهها می‌گذرد. اولین گامها را در این نظریه، فروبینوس[1]، برونساید[2] و شر[3] برداشتند و بعدها مطالعه در این موضوع بوسیله براور[4] و دیگران ادامه یافت. فروبینوس و برونساید به اهمیت نظریه نمایش در تجزیه و تحلیل ساختمان گروههای متناهی پی‌برده بودند و این نظریه را پایه‌گذاری کردند. در این پایان‌نامه کار اصلی‌مان در راستای همین هدف بوده. مطالب این پایان‌نامه از چهار فصل تشکیل شده است. فصل اول اختصاص به مفاهیم اساسی در زمینه نظریه نمایش گروهها و سرشت گروههای متناهی دارد. بخش اول از فصل اول شامل تعریف نمایش گروهها، نمایش بدیهی، Rـمدول آزاد، نمایشهای جایگشتی و نمایش تحویل‌ناپذیر است. در بخش دوم تعریف سرشت یک گروه را آورده‌ایم و در ادامه تعریف سرشتهای تحویل‌ناپذیر را مطرح و سپس قضایائی که در این زمینه مطرح هستند را بیان کرده‌ایم. در بخش سوم سرشتهای تحدید شده و القاء شده را تعریف کرده‌ایم. در ادامه رابطه معروف تقابل فروبنیوس را آورده‌ایم و همچنین توسیع یک سرشت تعریف شده‌است. در بخش چهارم سرشتهای جایگشتی را مطرح کرده و چندین قضیهٔ مهم راجع به این مفهوم را بیان کرده‌ایم و در بخش پنجم قضیه معروف کلیفورد بیان شده است. در این فصل از مراجع [5]، [9]، [13] و [15] استفاده شده‌است.

چون در ادامه کار ما به تعریف بعضی از گروههای مهم متناهی احتیاج داشتیم در فصل دوم سعی شده است که بعضی از این گروههای مهم متناهی را معرفی کنیم که این فصل شامل دو بخش است که در بخش اول گروه فروبنیوس، گروه پوچتوان، Mـگروه، گروههای سوپر حلپذیر، هال πـگروه، گروههای دووجهی، نیم‌دووجهی و کواترنیون را تعریف نموده و بعضی از قضایای معروف در این زمینه‌ها بیان شده است. در بخش دوم مفهوم اتومورفیسم بدون نقطه ثابت را مطرح کرده و سپس بعضی از قضایای مهم در بارهٔ آن بیان شده است. در فصل دوم از مراجع [5]، [9]، [13]، [15] و [20] استفاده شد. فصل سوم و فصل چهارم پایان‌نامه بازشدهٔ مقاله مرجع [4] است که در این دو فصل از مراجع [2]، [5]، [7]، [8]، [9]، [10]، [11]، [12]، [13]، [14]، [15] و [20] استفاده شد.

1) Frobenius 2) Burnside 3) Schur 4) Brauer

فهرست مطالب

فصل اول

نمایش و سرشت گروهها

در تمامی بحث‌مان منظور از R، $M_n(R)$ و $\mathrm{GL}(n,R)$ به ترتیب حلقه‌های جابجائی یکدار با مشخصه صفر، تمام ماتریسهای $n\times n$ روی حلقه R و ماتریسهای وارونپذیر $n\times n$ روی حلقه R می‌باشد.

۱ـ۱. نمایش گروهها

تعریف ۱ـ۱ـ۱. فرض کنید G یک گروه باشد. یک نمایش ماتریسیِ G عبارتست از همومورفیسم گروهی $\phi : G\to \mathrm{GL}(n,R)$ یعنی به ازای هر $x,y\in G$ داشته باشیم:

$$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$$

تذکر ۱ـ۱ـ۲. از تعریف بالا داریم:

$$\phi(1)=I_n,\quad \phi(g^{-1})=(\phi(g))^{-1},\forall g\in G$$

که ۱ عضو خنثی گروه G است.

مثال ۱ـ۱ـ۳. فرض کنید G یک گروه دلخواه و $n\in\mathbb{N}$ باشد. نگاشت $T:G\to\mathrm{GL}(n,R)$ با ضابطهٔ $T(g)=I_n$ یک نمایش ماتریسیِ گروه G است.

تعریف ۱ـ۱ـ۴. فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد نگاشت $T:G\to\mathrm{GL}(1,R)$ که با ضابطهٔ

$$T(g)=(1),\quad \forall g\in G$$

تعریف می‌شود را نمایش بدیهی روی G می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۱ـ۵. فرض کنید M یک Rـمدول باشد گوئیم M یک Rـمدول آزاد با پایه $\{m_1, \cdots, m_n\}$ است هرگاه هر عضو M را بتوان بصورت منحصر بفردی از ترکیب خطی $r_1m_1 + \cdots + r_nm_n$ نوشت.

تعریف (گروه حلقه) ۱ـ۱ـ۶. فرض کنید G یک گروه متناهی و R یک حلقه باشد مجموعه زیر را در نظر بگیرید

$$\{\sum r_g g | r_g \in R, g \in G\}$$

این مجموعه را با نماد RG نمایش می‌دهیم. RG همراه با دو عمل جمع و ضرب زیر تشکیل یک حلقه می‌دهد که به آن گروه حلقه می‌گوئیم.

$$x, y \in RG, x = \sum_{g \in G} r_g g, \quad y = \sum_{g \in G} r'_g g$$
$$x + y := \sum_{g \in G} (r_g + r'_g) g$$
$$x = \sum_{g \in G} r_g g, \quad y = \sum_{h \in G} r_h g$$
$$x.y := \sum_{g,h \in G} r_{gh} gh \quad (r_{gh} = r_g r_h)$$

گزاره ۱ـ۱ـ۷. RG یک Rـمدول آزاد با پایه G است.

تذکر ۱ـ۱ـ۸. اگر V یک Rـمدول آزاد با پایه n عضوی باشد آنگاه بنابه یکی از قضایای جبرخطی داریم $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(n, R)$ که در آن $\mathrm{GL}(V)$ مجموعه تمام تبدیلات خطی وارونپذیر روی R است.

تعریف ۱ـ۱ـ۹. فرض کنید G یک گروه و V یک Rـمدول باشد، یک نمایش گروه G روی V عبارتست از یک هومومورفیسم $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$.

تذکر ۱ـ۱ـ۱۰. اگر V یک Rـمدول آزاد با بعد متناهی n باشد آنگاه درجه نمایش را n در نظر می‌گیریم. بنابراین نمایش ماتریسیِ گروه G و نمایشِ گروه G یکسان هستند.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۱. فرض کنید T یک نمایش ماتریسی گروه G از درجه n باشد هسته نمایش T را با$\ker T$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\ker T = \{g \in G | T(g) = I\}$$

همچنین اگر داشته باشیم $\ker T = \{۱\}$ در اینصورت T را با وفا می‌نامیم.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۲. مطالعه نمایش‌های گروه G معادل با مطالعه RG ـمدولها است.

اثبات: به [۹] رجوع شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۳. فرض کنید G زیرگروهی از S_n باشد در اینصورت G یک گروه جایگشتی روی $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ است همچنین فرض کنید V یک Rـمدول آزاد با پایه $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ باشد برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $g \in G$ تعریف می‌کنیم $v_i g = v_{(i)g}$ در اینصورت V تبدیل به یک RGـمدول می‌شود نمایش متناظر با V را نمایش جایگشتی می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۴. فرض کنید $T : G \to \mathrm{GL}(V)$ یک نمایش گروه G باشد، گوئیم T تحویل‌پذیر است هرگاه RGـمدول V تحویل‌پذیر باشد همچنین T تحویل‌ناپذیر است هرگاه RGـمدول V تحویل‌ناپذیر باشد.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۵. اگر G یک گروه متناهی از مرتبه n، K یک میدان بطور جبری بسته بطوری که $\mathrm{Char}\ K \nmid |G|$ و تعداد کلاسهای تزویج گروه G برابر با s باشد در اینصورت:

۱ـ تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروه G روی K برابر با s است.

۲ـ اگر $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$ و n_s ابعاد این s نمایش تحویل‌ناپذیر باشند آنگاه $|G| = n_۱^۲ + \cdots + n_s^۲$.

اثبات: به [۹] رجوع شود.

۱ـ۲. سرشت گروهها

تعریف ۱ـ۲ـ۱. فرض کنید $T : G \to \mathrm{GL}(V, K)$ یک نمایش گروه متناهی G باشد که V یک KGـمدول با بعد متناهی است در این‌صورت برای هر $g \in G$ می‌توان بر حسب پایه V، نمایش ماتریسی برای $T(g)$ داشت در اینصورت تابع $\chi : G \to K$ را که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم یک سرشت گروه G می‌نامیم.

$$\chi(g) = \mathrm{trc}T(g), \quad \forall g \in G$$

χ را سرشت پیشنهاد شده توسط V می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۲. گوئیم سرشت χ تحویل‌ناپذیر (یا تحویل‌پذیر) است هرگاه نمایش T تحویل‌ناپذیر (یا تحویل‌پذیر) باشد.

۱ـ۲ـ۳. اگر χ و ϕ دو سرشت گروه متناهی G باشند ضرب زیر را ضرب (داخلی در G) دو سرشت χ و ϕ نامیم.

$$(\chi, \phi)_G = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\phi(g^{-۱})$$

لم ۱ـ۲ـ۴. فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد همچنین فرض کنید χ سرشت G روی $\mathbb{C}$ باشد آن‌گاه $\chi(g)$ مجموعی از ریشه‌های $|G|$ـام واحد است.

اثبات: به [۹] رجوع شود.

تذکر ۱ـ۲ـ۵: اگر χ یک سرشت گروه G روی میدان اعداد مختلط باشد آن‌گاه $\chi(۱)$ را درجه سرشت χ تعریف می‌کنیم که با توجه به لم قبل یک عدد صحیح مثبت است.

قضیه ۱ـ۲ـ۶. هر سرشت دلخواه گروه G، ترکیب خطی از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G با ضرایب غیرمنفی می‌باشد.

اثبات: به [۹] رجوع شود.

تذکر ۱ـ۲ـ۷. فرض کنید χ یک سرشت گروه G باشد آنگاه χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\chi(1) > 0 \quad , \quad (\chi, \chi) = 1$$

همچنین تمام سرشتهای گروه G را با نماد $\mathrm{Char}(G)$ و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه G را بانماد $\mathrm{Irr}(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱ـ۲ـ۸. فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد اگر χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر گروه G باشد آنگاه $\chi(1)||G|$.

اثبات. به [۹] رجوع شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۹. سرشت χ را باوفا گوئیم هرگاه $\ker\chi = \{1\}$ باشد.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۰. اگر $N \lhd G$ و $\hat{\chi}$ یک سرشت گروه G/N باشد آنگاه سرشت گروه G که با ضابطهٔ $\chi(g) := \hat{\chi}(Ng)$ تعریف می‌شود یک سرشت افزایشی از $\hat{\chi}$ برای G می‌نامیم.

قضیه ۱ـ۲ـ۱۱. یک تناظر یک به‌یک بین سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G/N و سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G که هسته آنها حاوی N باشد وجود دارد یعنی:

$$\mathrm{Irr}(G/N) \cong \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) | N \subseteq \ker\chi\}$$

تعریف ۱ـ۲ـ۱۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و χ یک سرشت گروه G باشد، اگر درجه سرشت χ یک باشد یعنی $\chi(1) = 1$ آنگاه χ را یک سرشت خطی نامیم. سرشت بدیهی id نیز یک سرشت خطی