بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش آمار

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

مدلهای چوله نرمال

استاد راهنما :

دکتر وحید امیرزاده

استاد مشاور:

دکتر احد جمالیزاده

مؤلف :

سیدجواد احمدی موسوی

بهمن ماه۱۳۸۹

تقدیم به:

همه آن هایی که می خواهند بیشتر بدانند

تشکر و قدردانی:

در هرسحری با تو همی گویم راز	بردرگه تو همی کنم عرض نیاز
بی منت بندگانت ای بنده نواز	کار من بیچاره سرگشته بساز

الهی؛

ای گشاینده زبانهای مناجات گویان و انس افزای خلوتهای ذاکران و حاضر نفس های راز داران جز از یاد کرد تو ما را همراه نیست و جز از یاد داشت تو ما را زاد نیست وجز از تو به تو دلیل رهنمای نیست.

الهی؛

بر هر صفت که هستم برخواست تو موقوفم به هر نام که مرا خوانند به بندگی تو معروفم تا جان دارم رخت از این کوی بر ندارم.

الهی؛

نه کلید دارم که در بگشایم و نه کرم دارم که بر خود ببخشایم ای یگانه ای که در آفرینش مقدسی، چه شود که در دم بازپسین ، مفلسی را به فریاد رسی.

الهی؛

تو را سپاس می گویم که از زیادت خواه نعمت تو و گردن نهاده عزت توأم و بوسه می زنم بر دستان خداوندگار مهربانی ، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنیم وجود مقدسش را که در این سردترین روزگاران ، بهترین پشتیبان من است.

وظیفه خود می دانم که از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود **جناب آقای دکتر امیرزاده** و استاد مشاور **جناب آقای دکتر احد جمالیزاده**, و داوران محترم **جناب آقای دکتر مددی و جناب آقای دکتر عربپور** تشکر و قدارنی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان ، این مجموعه به انجام نمی رسید.

سیدجواد احمدی موسوی

چکیده:

در این پایان نامه چند توزیع برای داده های غیر نرمال مورد بررسی قرار می دهیم که دارای انعطاف پذیری مطلوبی در مورد چولگی و برجستگی داده ها می باشد.

در فصل اول توزیع اپسیلون چوله نرمال که دارای پارامتر چولگی ε می باشد مورد بررسی قرار می گیرد، خواص اصلی آن از جمله روابط بین میانگین و مد و همچنین گشتاورهای آن از مطالب دیگر این فصل می باشد.

فصل دوم این پایان نامه در مورد حالت کلی تری از توزیع چوله نرمال به نام توزیع چوله نرمال تعمیم یافته می باشد. در این توزیع با دو پارامتر چوله به نام های α و β سروکار داریم. در این فصل علاوه بر خواص توزیع به پارامترهای α و β در مورد چولگی و برجستگی می پردازیم.

فصل سوم کلی ترین شکل توزیع چوله نرمال را ارائه می دهیم و نشان می دهیم که هر خانواده از این توزیع ها را می توان به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی ارائه نمود .

در فصل چهارم به معرفی یک توسیع جدید از توزیع برنبام ساندرز می پردازیم که برپایه خانواده توزیع های چوله نرمال می باشد و خواص متفاوتی از این توزیع به خصوص ماتریس اطلاعات را مورد بررسی قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: آنالیز بیزی؛برآورد حداکثر درستنمایی؛ توزیع چوله نرمال؛ نرمال دو تکه؛ برجستگی ؛ چولگی؛ توزیع طول عمر؛ توزیع متقارن اپسیلون چوله.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل چهارم : توزیع چوله بایربنام ساندرز تعمیم یافته

فصل اول

توزیع اپسیلون چوله نرمال

۱ـ۱. مقدمه

در دهه های اخیر در زمینه دستیابی به مدلهایی که بتوان به وسیله آنها داده های چوله را توصیف کرد، تحقیقات گسترده ای‌صورت گرفته است. دراین فصل یک خانواده از توزیع های چوله نرمال[۱] که از لحاظ ویژگی همان دامنه چولگی و برجستگی در توزیع ارائه شده توسط آزالینی[۲] [۱۱] را دارد ، ارائه می گردد پس از بیان تاریخچه ای از این توزیع ومعرفی آن در بخشی ۱ـ۲ به بررسی خواص توزیع در بخش ۱ـ۳ می پردازیم . بخش ۱ـ۴ مربوط به نمونه گیری از توزیع اپسیلون چوله نرمال می باشــد در بخش ۱ـ۵ به محاسبه برآورد گشتاوری توزیع اپسیلون چوله نرمال می پردازیم، در بخش ۱ـ۶ محاسبه برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای توزیع اپسیلون چوله نرمال مورد بررسی قرار می گیرد. و در نهایت در بخش ۱ـ۷ مبحث مربوط به محاسبات بیزی را مورد بررسی قرار داد و نکات جالبی را در این مورد ارائه می دهیم.

[1] - Skew normal
[2] - Azzalini

۱ـ۲. توزیع اپسیلون چوله نرمال[1]

در کارهای کاربردی اکثراً با داده هایی سروکار داریم که از توزیع نرمال پیروی نمی کنند یکی از توزیعهایی که برای مدل بندی این گونه داده ها مفید می باشد توزیع اپسیلون چوله نرمال است که برای نخستین بار در سال ۱۸۹۷ توسط فچنر[2][۲۶]، لیپزنیگ[3]، انگلمن[4] مورد بررسی قرار گرفت.

در این توزیع پارامتر ε به عنوان پارامتر چولگی به کار رفته است و به این دلیل آن را اپسیلون چوله نرمال می نامند و بانماد $ESN(\theta,\sigma,\varepsilon)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱ـ۱: متغیر تصادفی X دارای توزیع اپسیلون چوله نرمال با پارامتر $\varepsilon,\sigma,\theta$ است اگر تابع چگالی آن به صورت

$$f(x;\theta,\sigma,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\dfrac{(x-\theta)^2}{(1+\varepsilon)^2}\right) & x\le\theta,\\[2ex] \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\dfrac{(x-\theta)^2}{(1-\varepsilon)^2}\right) & x>\theta.\end{cases} \qquad (۱ـ۱)$$

که در آن θ پارامتر مکان و σ پارامتر مقیاس و ε پارامتر شکل می باشد.

حالتی را در نظر بگیرید که در آن $\theta=0$ و $\sigma=1$ باشد، در این صورت $ESN(\theta,\sigma,\varepsilon)$ به $ESN(0,1,\varepsilon)$ تبدیل می شود که به شکل کانونی توزیع معروف است.

و تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$f_0(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\dfrac{-x^2}{2(1+\varepsilon)^2}\right) & x<0,\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\dfrac{-x^2}{2(1-\varepsilon)^2}\right) & x\ge 0.\end{cases} \qquad (۲ـ۱)$$

---

[1] - Epsilon-skew-normal
[2] - Fechner
[3] - Leipzig
[4] - Engleman

قضیه ۱ـ۱ : اگر $X \sim ESN(\circ,\text{۱},\varepsilon)$ باشد، در این صورت $F_{\circ}(x)$ به صورت زیر می باشد:

$$F_{\circ}(x)=\begin{cases}(1+\varepsilon)\Phi\left(\dfrac{x}{1+\varepsilon}\right) & x<\circ,\\ \\ \varepsilon+(1-\varepsilon)\Phi\left(\dfrac{x}{1-\varepsilon}\right) & x\geq \circ.\end{cases} \qquad (\text{۱ـ۳})$$

که در آن $-\text{۱}<\varepsilon<\text{۱}$ می باشد و Φ تابع توزیع نرمال استاندارد می باشد .

اثبات :

$$F_X(x)=p(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

اگر $x>\circ$ ،

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2(1+\varepsilon)^2})dt$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2(1+\varepsilon)^2})dt$$

$$=(\text{۱}+\varepsilon)p(T\leq x) \qquad \text{که}\quad T\sim N(\circ,(\text{۱}+\varepsilon)^{\text{۲}})$$

در این صورت

$$F_X(x)=(1+\varepsilon)\ \Phi(\frac{T-\circ}{(1+\varepsilon)})=(1+\varepsilon)\ \Phi(\frac{x}{1+\varepsilon})$$

اگر $x<\circ$ ،

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}F_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\circ}\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}}\exp(\frac{-x^{\text{۲}}}{\text{۲}(\text{۱}+\varepsilon)^{\text{۲}}}dx$$

$$+\int_{\circ}^{x}\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}}\exp(\frac{-t^{\text{۲}}}{(\text{۱}-\varepsilon)^{\text{۲}}}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\circ}\frac{(\text{۱}+\varepsilon)}{\sqrt{\text{۲}\pi}(\text{۱}+\varepsilon)}\exp(\frac{-x^{\text{۲}}}{\text{۲}(\text{۱}+\varepsilon)^{\text{۲}}})dx$$

$$+\int_{۰}^{x}\frac{(۱-\varepsilon)}{\sqrt{۲\pi}(۱-\varepsilon)}\exp(\frac{-t^{۲}}{(۱-\varepsilon)^{۲}})dt$$

$$=(۱+\varepsilon)\,p(X<۰)+(۱-\varepsilon)\,p(۰<T<x)$$

که $\begin{cases} X \sim N(۰,(۱+\varepsilon)) \\ T \sim N(۰,(۱-\varepsilon)) \end{cases}$ می باشند.

با استفاده از تبدیل نرمال

$$F_X(x)=\varepsilon+(1-\varepsilon)\Phi\,(\frac{x}{1-\varepsilon})$$

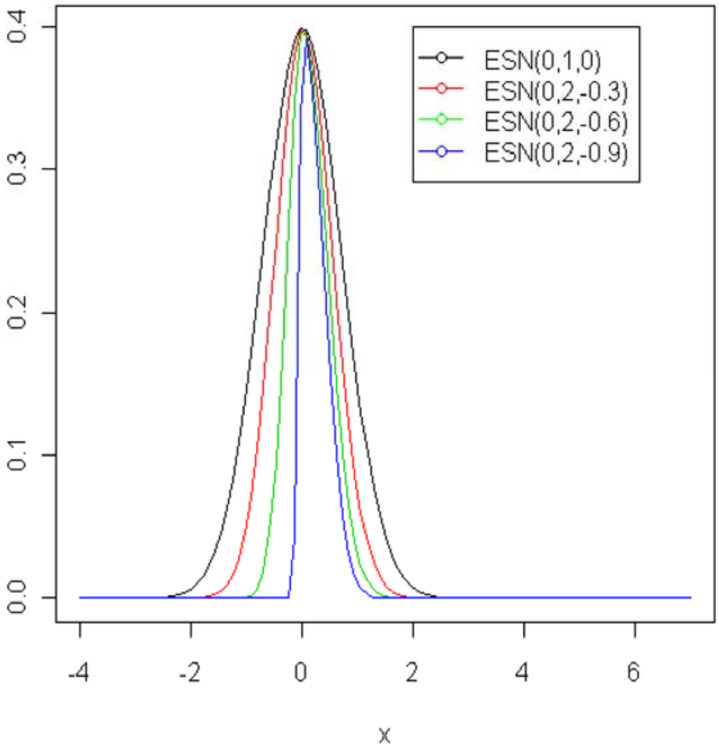
اثبات کامل می شود.

لم ۱ـ۱ : توزیع اپسیلون چوله نرمال هنگامی که $\varepsilon \to \pm۱$ می رود به توزیع نیم نرمال تبدیل می شود.

اثبات بدیهی است.

با توجه به لم (۱ـ۱) توزیع $ESN(۰,۱,\varepsilon)$ به صورت ترکیبی از دو توزیع نرمال می باشد . همچنین هنگامی که $\varepsilon=۰$ باشد این توزیع به توزیع نرمال استاندارد تبدیل می شود.

برای مشخص شدن نقش پارامتر شکل ε در تعیین شکل چگالی ESN نمودارهایی را به ازای مقادیر ε رسم کرده ایم.



شکل ۱ـ۱: تابع چگالی ESN را به ازای مقادیر مختلف ε

همانطور که در شکل ۱-۱ دیده می شود تابع چگالی توزیع ESN یک تابع تک مدی می باشد این تابع با نزدیک شدن ε به صفر به سمت توزیع نرمال میل می کند و در $\varepsilon = ۰$ به توزیع نرمال استاندارد تبدیل می شود.

۱ـ۳. برخی از خواص توزیع (ESN)

۱ـ تابع مولد گشتاور توزیع $ESN(۰,۱,\varepsilon)$ برابر است با

قضیه ۱ـ۲ : اگر $X \sim ESN(۰,۱,\varepsilon)$ باشد ، آنگاه

$$M_X(t) = (۱+\varepsilon)\exp((۱+\varepsilon)^۲\frac{t^۲}{۲})\Phi[-(۱+\varepsilon)t] + (۱-\varepsilon)\exp-(۱+\varepsilon)^۲\frac{t^۲}{۲}$$

$$\times \Phi[(۱-\varepsilon)t]$$

اثبات :

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\circ} e^{tx}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp(\frac{-x^۲}{۲(۱+\varepsilon)^۲})dx$$

$$+\int_{\circ}^{+\infty} e^{tx}\exp(\frac{-x^۲}{۲(۱-\varepsilon)^۲})dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\circ}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp(\frac{-۱}{۲(۱+\varepsilon)^۲})[(x-(۱+\varepsilon)^۲t)^۲-(۱+\varepsilon)^۴t^۲]dx$$

$$+\int_{\circ}^{+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp(\frac{-۱}{۲(۱-\varepsilon)^۲})[(k-(۱-\varepsilon)^۲t)^۲-(۱+\varepsilon)^۴k^۲]dk$$

که در آن

$$K\sim N((۱-\varepsilon)t\ ,\ (۱-\varepsilon)^۲)\quad ,\quad T\sim N((۱+\varepsilon)t\ ,\ (۱+\varepsilon)^۲)$$

در

$$M_X(t)=\exp(\frac{(۱+\varepsilon)t^۲}{۲})\times(۱+\varepsilon)\Phi(-(۱+\varepsilon)t)+\exp(\frac{(۱-\varepsilon)^۲t^۲}{۲})(۱-\varepsilon)\Phi((۱-\varepsilon)t)$$

اگر $\sim ESN(\theta,\sigma,\varepsilon)$ و $M(t)=e^{\theta t}M(\sigma t)$ می باشد.

۲ـ میانگین

$$E(X)=\theta-\frac{۴\sigma\varepsilon}{\sqrt{۲\pi}}$$

۳ـ واریانس

$$\mathrm{var}(X)=\frac{\sigma^۲}{\pi}[(۳\pi-۸)\varepsilon^۲+\pi],$$

۴ـ میانه

$$Q(1/2)=\begin{cases}\theta+\sigma(1+\varepsilon)\Phi^{-1}\left(\dfrac{1}{2(1+\varepsilon)}\right) & \varepsilon<۰,\\ \theta+\sigma(1-\varepsilon)\Phi^{-1}\left(\dfrac{1/2-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) & \varepsilon\geq ۰,\end{cases}$$

۵ ـ ضریب چولگی

$$\sqrt{\beta_۱}=\frac{۲\sqrt{۲\varepsilon}[(۵\pi-۱۶)\varepsilon^۲-\pi]}{[(۳\pi-۸)\varepsilon^۲+\pi]^{۳/۲}},$$

۶ ـ ضریب برجستگی

$$\beta_۲=\frac{(۱۵\pi^۲+۱۶\pi-۱۹۲)\varepsilon^۴+۱۰\pi(۳\pi-۸)\varepsilon^۲+۲\pi^۲}{[(۳\pi-۸)\varepsilon^۲+\pi]^۲}$$

ـ۷ $$-۰.۹۹۵۳\leq\sqrt{\beta_۱}<۰.۹۹۵۳$$

ـ۸ $$۳/۰۰۰۰\leq\beta_۲<۳/۸۶۹۲$$

محاسبه ۲ و ۳ و ۴ به کمک (۱) به راحتی امکان پذیر می باشد و محاسبه ۷ و ۸ به کمک ۵ و ۶ بدیهی است.

با توجه به (۷) و (۸) دامنه توزیع SN ارائه شده توسط آزالینی و ESN یکسان می باشد و این موضوع از قبل قابل پیش بینی بود زیرا خانواده های توزیع نرمال و نیم نرمال دارای حدود یکسان می باشند.

۱ـ٤. نمونه گیری از توزیع ESN

فرض کنید $X_۱,X_۲,\ldots,X_n\overset{iid}{\sim}ESN(\theta,\sigma,\varepsilon)$ برای نمونه های بزرگ $\overline{X}$ تقریباً دارای

توزیع نرمال می باشد. اما برای نمونه های کوچک ضرایب چولگی و برجستگی افزایش می یابد. در این صورت نمی توان گفت که $\overline{X}$ یک برآوردگر مناسب برای پارامتر مکان می باشد.

اگر $X \sim ESN(\theta,\sigma,\varepsilon)$ باشد در این صورت فرض می کنیم

$$y = \frac{(x-\theta)^{۲}}{\sigma^{۲}}$$

در این صورت

$$M_Y(t) = (۱+\varepsilon)[۱-۲(۱+\varepsilon)^{۲}t]^{-۱/۲}/۲ + (۱-\varepsilon)[۱-۲(۱-\varepsilon)^{۲}t]^{-۱/۲}/۲$$

بنابراین توزیع y به صورت مخلوطی از توزیع گاما می باشد حال متغیر تصادفی U را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$U = \sum_{i=۱}^{n} \frac{(X_i-\theta)^{۲}}{\sigma^{۲}}$$

با استفاده از تابع مولد گشتاور

$$M_U(t) = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} \left(\frac{۱+\varepsilon}{۲}\right)^{r} \left(\frac{۱-\varepsilon}{۲}\right)^{n-r}$$

$$\times[۱-۲(۱+\varepsilon)^{۲}t]^{-r/۲}[۱-۲(۱-\varepsilon)^{۲}t]^{-(n-r)/۲}$$

که به صورت توزیع دو جمله ای آمیخته با دو متغیر تصادفی گاما می باشد.

۱ـ۵. برآوردپارامترهای توزیع ESN به روش گشتاوری

فرض کنید که $X_۱, X_۲, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} ESN(\theta,\sigma,\varepsilon)$ در این صورت با توجه به فرمول میانگین و واریانس

$$\theta = E(X) + \frac{۴\varepsilon\sigma}{\sqrt{۲\pi}}$$

$$\sigma^{۲} = \frac{\pi \operatorname{var}(X)}{(۳\pi - ۸)\varepsilon^{۲} + \pi}$$

محاسبه برآورد گشتاوری ε بسیار دشوار است که آن را به صورت عددی محاسبه می کنند فرض می کنیم که ε معلوم باشد

$$\hat{\theta}_{mm} = \overline{X} + ۴\frac{\varepsilon \hat{\sigma}\, m}{\sqrt{۲x}} = \overline{X} + c_{۱}\sqrt{c_{۲}}S^{۲} \qquad (۴\_۱)$$

$$\hat{\sigma}^{۲}_{mm} = \frac{\pi S^{۲}}{(۳\pi - ۸)\varepsilon^{۲} + \pi} = c_{۲}s^{۲} \qquad (۵\_۱)$$

که $\overline{X}$ و $s^{۲}$ به ترتیب میانگین و واریانس نمونه می باشد و

$$c_{۲} = \frac{\pi}{[(۳\pi - ۸)\varepsilon^{۲} + \pi]} \qquad \text{و} \qquad c_{۱} = \frac{۴\varepsilon}{\sqrt{۲\pi}}$$

۱ـ٦. برآوردپارامترهای توزیع ESN به روش حداکثر درستنمایی

برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای توزیع ESN به واسطه ماکزیمم کردن تابع حداکثر درستنمایی نسبت به عدد صحیح k ، $\circ < k < n$ به دست می آید.

لم ۱ـ۲: فرض کنید $x_{(۱)} \leq x_{(۲)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ آمارهای ترتیبی نمونه تصادفی از توزیع $ESN(\theta, \sigma, \varepsilon)$ باشد به طوریکه $x_{(\circ)} = -\infty$ و $x_{(n+۱)} = \infty$ عدد صحیح $k = k(x_{(۱)}, \ldots, x_{(n)})$ وجود دارد بطوریکه تابع حداکثر درستنمایی $l(\hat{\theta}, \hat{\sigma}^{۲}, \hat{\varepsilon})$ به صورت

$$l(\theta, \sigma^2, \varepsilon) = \begin{cases} -\dfrac{n}{\pi}\log 2\pi\sigma^2 - \dfrac{1}{8\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - \theta)^2] & k = \circ, n, \\ -\dfrac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \dfrac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{k}\dfrac{(x_{(i)} - \theta)^2}{(1+\varepsilon)^2} + \sum_{i=k+1}^{k}\dfrac{(x_{(i)} - \theta)^2}{(1+\varepsilon)^2} & 1 \leq k < n\,. \end{cases}$$

اثبات :

$$L(\sigma)=\prod_{i=۱}^{n} f(x_i,\theta,\sigma,\varepsilon)=\begin{cases}\prod_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sigma}\frac{۱}{\sqrt{۲x}}\ \exp(-\frac{(x_{(i)}-\theta)}{(۱+\varepsilon)^{۲}}) & x_{(i)}\geq\theta\\ \\ \prod_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sigma}\frac{۱}{\sqrt{۲x}}\ \exp(-\frac{(x_{(i)}-\theta)}{(۱-\varepsilon)^{۲}}) & x_{(i)}<\theta\end{cases}$$

که درآن $x_{(i)}$ آماره های ترتیبی می باشند حال می توان پس از عمل لگاریتم، $L(\theta)$ را به صورت زیر نوشت :

$$l(\theta)=-\frac{n}{۲}\log ۲\pi\sigma^{۲}-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}}[\sum_{i=۱}^{k}\frac{(x_{(i)}-\theta)^{۲}}{(۱+\varepsilon)^{۲}}+\sum_{i=k+۱}^{n}\frac{(x_{(i)}-\theta)^{۲}}{(۱+\varepsilon)^{۲}}$$

حال با توجه به فرمول بالا زمانی $k=۰$ در این صورت $\varepsilon=-۱$ می باشد در این صورت

$$l(\theta)=-\frac{n}{۲}\log ۲\pi\sigma^{۲}-\frac{۱}{۸\sigma^{۲}}\sum_{i=۱}^{k}(x_{(i)}-\theta)^{۲} \tag{۱ـ۸}$$

حال اگر $k=n$ باشد در این صورت $\varepsilon=۱$ می باشد، پس

$$l(\theta)=-\frac{n}{۲}\log ۲\pi\sigma^{۲}-\frac{۱}{۸}\sum_{i=۱}^{n}(x_{(i)}-\theta)^{۲}$$

بنابراین لم اثبات می شود. □

لم ۱ـ۳ : چنانچه $k=۰$ یا $k=n$ باشددراین صورت برآورد حداکثر درستنمایی $(\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon})$ به صورت زیر می باشد :

$$(\hat{\theta},\hat{\sigma}^{۲},\hat{\varepsilon})=\begin{cases}(x_{(۱)}\ ,\ S_{۰}^{۲},-۱)\\ \\ (x_{(n)}\ ,\ S_{n}^{۲},۱)\end{cases} \tag{۱ـ۹}$$