بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

دررشته ریاضی محض- گرایش آنالیز

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عنوان:

عملگرهای ابردوری و عملگر مشتق

استاد راهنما:

پروفسور بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر فریبا ارشاد

نگارش:

اعظم مصباحی

بهمن ماه ۱۳۸۹

تاریخ : ۸۹/۱۱/۴
شماره : ....
پیوست : ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم اعظم مصباحی** دانشجوی رشته **ریاضی گرایش آنالیز**

به شماره دانشجویی **۸۷۰۰۰۱۳۵۷** با عنوان:

" عملگرهای مشتق و ابردوری "

با حضور هیات داوران در روزدوشنبه مورخ **۱۳۸۹/۱۱/۴** ساعت **۸ صبح** در محل ساختمان **غدیر**

دانشگاه پیام نور شیراز برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به

عدد ...۱۸/۵.....به حروف هیجده و نیم............. با درجه...عالی......تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر بهمن یوسفی	راهنما	استاد	پیام نور شیراز	
۲	دکتر فریبا ارشاد	مشاور	استادیار	پیام نور شیراز	
۳	دکتر احمد خاکساری	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	پیام نور شیراز	

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۰
دورنگار : ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۹
صندوق پستی :۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

تقدیم به:

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در سرد ترین روزگار بهترین پشتیبان است .

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند . این مجموعه را به پدر و مادر مهربان و همسر عزیزم تقدیم می کنم .

سپاسگزاری:

و هنگامی که طنین آوای " اقرا باسم ربک الذی خلق " پشت کوه را لرزاند بزرگترین معلم بشر سلام گفت و حال تو این امانت را به دوش می کشی آیا از استواری تو عرق شرم بر پیشانی کوه نمی نشیند . کدامین چشم بد توان خیرگی به حریم مقدس چشمانت را دارد. و حال می خوانم از تو زمزمه صادقانه ای همچون لحن آب ، که همواره جاودان خواهی ماند.

تشکر می کنم از جناب آقای پروفسور بهمن یوسفی که همانند پدری مهربان و معلمی دلسوز همواره روشنگر راهم بودند و همچنین همسر عزیز و فداکارم که سنگ صبور لحظات تلخ و شیرین زندگی ام بوده است.

چکیده

اعظم مصباحی

این پایان نامه به بررسی ویژگیهای عملگرهای ابردوری وعملگر مشتق می پردازد، که شامل ۳ فصل می باشد.
در فصل ۱ تعاریف و قضایایی بیان شده که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می گیرد مانند: عملگر ابردوری ، عملگر آمیخته توپولوژیکی، عملگر ترایایی توپولوژیکی .
فصل ۲ به مطالبی راجع به محک ابردوری ومعرفی دنباله اتصالی و عملگر ابردوری اتصالی اختصاص دارد و شامل ۴ بخش است؛ در بخش اول به بیان محک ابردوری وتعریف دنباله اتصالی می پردازیم. در بخش دوم در رابطه با خاصیت در آمیختگی توپولوژیکی، ثابت می کنیم که در فضای فرشه اگریک عملگر ابردوری، در محک ابردوری برای یک دنباله اتصالی صدق کند، آنگاه به طور توپولوژیکی در آمیخته است. در بخش سوم شرایط معادلی برای محک ابردوری روی نگاشتهای پیوسته در فضاهای توپولوژیک ، ارایه می دهیم وسرانجام در بخش چهارم نشان می دهیم که هر مولفه از طیف یک عملگر به طور ضعیف ابر دوری، دایره واحد را قطع می کند.
فصل ۳ به بررسی توابع ابردوری برای عملگرهای دیفرانسیل می پردازد و شامل ۳ بخش است. بخش اول شامل تاریخچه وبرخی نتایج می باشد و در بخش دوم رابطه بین مسئله درون یابی و ابردوری را مورد بررسی قرار می دهیم.

فهرست مطالب

فصل اول

۱. مقدمه:

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی که در طول پایان نامه با آنها سر و کار داریم می‌پردازیم.

تعریف ۱ .۱:

فرض کنید X یک مجموعه و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد،یعنی $\tau\subseteq P(X)$. τ را توپولوژی در X خوانیم در صورتی که شرایط ذیل را دارا باشد:

۱) $\phi\in\tau$ و $X\in\tau$.

۲)همواره اگر Aو$B\in\tau$ آنگاه $A\bigcap B\in\tau$.

۳)به ازای هر زیر گردایه τ مانند A ، $\bigcup\mathrm{A}\in\tau$.

اعضای τ را مجموعه های باز می نامند.

تعریف ۱ .۲:

فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی باشد. در این صورت هر تابع مانند $d:X\times X\to R$ را که واجد خاصیت های زیر باشد،یک متریک در مجموعه X می گیریم.

۱)به ازای هر xو y از X، $d(x,y)\geq 0$ وتساوی برقرار است اگر وتنها اگر $x=y$.

۲) به ازای هر xو y از X، $d(x,y)=d(y,x)$.

۳) به ازای هر xوyو z از X، $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

معمولا، $d(x,y)$ را فاصله xو y می گویند و اصل موضوع ۳ را نا مساوی مثلث می نامند.

تعریف ۱ .۳:

اگر X یک فضای برداری و d یک متریک روی X باشد، d را یک تبدیل پایا گوییم هرگاه به ازای هر x,y,z در X داشته باشیم:

$$d(x+z,y+z)=d(x,y).$$

تعریف ۱ .۴:

اگر X یک فضای برداری روی میدان F(میدان حقیقی R یا میدان مختلط $\mathbb{C}$) باشد، آنگاه یک نیم نرم به صورت یک تابع $P:X\to[0,\infty)$ تعریف می شود که دارای ویژگی های زیر می باشد:

۱) برای هر $x,y\in X$ داریم:

$$p(x+y) \le p(x)+p(y).$$

۲) برای هر $x \in X$ و هراسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ داریم:

$$p(\alpha\, x) = |\alpha|\, p(x).$$

یک نرم در واقع یک نیم نرم است که علاوه بر دو ویژگی فوق دارای ویژگی زیر نیز باشد:

اگر $p(x)=0$ ، آنگاه $x=0$.

معمولا نرم را با نماد $\|\cdot\|$ نشان می دهند.

تعریف ۱ .۵ :

یک فضای برداری توپولوژیکی (TVS)، یک فضای برداری همراه با یک توپولوژی است به طوری که نسبت به این توپولوژی داشته باشیم:

۱) نگاشتی که از $X \times X \to X$ به صورت،

$$(x, y) \mapsto x+y$$

تعریف می شود، پیوسته باشد.

۲) نگاشتی که از $\mathbb{F} \times X \to X$ به صورت،

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha\, x.$$

تعریف می شود، پیوسته باشد.

فرض کنید X یک فضای برداری و P یک خانواده از نیم نرمها روی X باشد. همچنین فرض کنید T توپولوژی روی X باشد که یک زیر پایه به صورت مجموعه های

$$\{x : p(x-x_0) < \varepsilon\}$$

داشته باشد، جایی که $\varepsilon > 0, x_0 \in X, p \in P$. بنابراین یک زیر مجموعه U از X باز است اگر و تنها اگر برای هر $x_0 \in U$ ، نیم نرمهای $p_1,\dots,p_n \in P$ و اسکالرهای $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n > 0$ موجود باشند به طوری که:

$$\bigcap_{j=1}^{n} \left\{ x \in X : P_j(x-x_0) < \varepsilon_j \right\} \subseteq U$$

تعریف ۱ .۶:

یک فضای موضعاً محدب (LCS)، یک فضای برداری توپولوژیکی (TVS) می باشد که توپولوژی آن به صورت یک خانواده از نیم نرمهای P تعریف می شود به طوری که:

$$\bigcap_{p \in P} \{x : p(x)=0\} = (0)$$

تعریف ۱ .۷:

اگر X یک (LCS) فضای موضعاً محدب باشد، توپولوژی ضعیف روی X که با wk یا $\sigma(X,X^*)$ نشان داده می شود و به صورت خانواده ای از نیم نرم های

$$\left\{P_{x^*} : x^* \in X^*\right\}$$

تعریف می شود، جاییکه

$$P_{x^*}(x) = \left|\left\langle x, x^*\right\rangle\right|$$

همچنین توپولوژی ضعیف- * روی X^* که با wk^* یا $\sigma(X^*,X)$ نمایش داده شده، خانواده ای از نیم نرمهای

$$\left\{P_x : x \in X\right\}$$

می باشد، جاییکه

$$P_x(x^*) = \left|\left\langle x, x^*\right\rangle\right|$$

بنابراین $U \subseteq X$ باز ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر $x_\circ \in U$، اعضای $x_1^*,...,x_n^* \in X^*$ ، $\varepsilon > \circ$ موجود باشند به طوری که:

$$\bigcap_{k=1}^{n}\left\{ x \in X : \left|\left\langle x - x_\circ, x_k^*\right\rangle\right| < \varepsilon \right\} \subseteq U$$

تعریف ۱ .۸:

فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}$ دنباله ای از نقاط X باشد. در این صورت $\{x_n\}$ را یک دنباله کوشی گویند در صورتی که به ازای هر عدد مثبت مانند ε، عددی طبیعی مانند N باشد به طوری که به ازای هر دو عدد طبیعی n و m که $n \geq N$ و $m \geq N$، داشته باشیم: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

فضای متری (X,d) را کامل گویند در صورتی که هر دنباله کوشی در (X,d) همگرا باشد.

تعریف ۱ .۹:

فضای فرشه X، یک (TVS) است که توپولوژی آن به وسیله تبدیل پایای متریک d تعریف می شود، به طوری که (X,d) کامل است.

تعریف ۱ .۱۰:

اگر (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. قرار می دهیم $\rho = \{F : X - F \in \tau, A \subseteq F\}$،

در اینصورت $\bigcap_{F\in\rho} F$ رابستار A می نامیم و آن را با $\overline{A}$ نشان می دهیم.

تعریف ۱ .۱۱:

اگر X یک فضا باشد و $A\subseteq X$. گوییم A در X چگال است هرگاه $\overline{A}=X$.

تعریف ۱ .۱۲ :

فرض کنید $T_n : X \to Y$ یک دنباله از نگاشت های پیوسته بین دو فضای توپولوژیک X و Y باشد، آنگاه $\{T_n\}_{n\geq 1}$ گفته می شود:

الف) جهانی: اگر نقطه $x_\circ \in X$ (که گفته می شود برای $\{T_n\}_{n\geq 1}$ برداری جهانی است) وجود داشته باشد به طوری که مدار $\{T_n x_\circ : n \in \mathbb{N}\}$ در Y ، چگال باشد.

ب) ترایای توپولوژیکی: اگر برای زیر مجموعه های باز و ناتهی $U \subset X$ و $V \subset Y$ ، یک $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد، به طوری که: $T_N(U) \cap V \neq \phi$.

ج) آمیخته توپولوژیکی: اگر برای زیر مجموعه های باز و ناتهی $U \subset X$ و $V \subset Y$ ، یک $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $n \geq N$ ، $T_n(U) \cap V \neq \phi$.

تعریف ۱ .۱۳ :

اگر $T : X \to X$ یک خود نگاشت پیوسته باشد، آنگاه گفته می شود که T جهانی (ترایای توپولوژیکی، آمیخته توپولوژیکی) است، در صورتی که دنباله $\{T^n\}_{n\geq 1}$، جهانی (ترایای توپولوژیکی، آمیخته توپولوژیکی) باشد.

تعریف ۱ .۱۴ :

اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند و T_n (یا T ، اگر با خود نگاشت ها کار می کنیم) خطی باشد، آنگاه به جای جهانی می گوییم ابردوری.

تعریف ۱ .۱۵:

اگر $T_n : X \to X$ یک دنباله از نگاشت های خطی وپیوسته بین دو فضای توپولوژیک Xو Y باشد، قرار می‌دهیم:

$$\mu(\{T_n\}_{n\geq 1}) = \{x \in X : \quad \text{جهانی است } \{T_n\}_{n\geq 1} \text{ برای } x \}$$

و اگر $X = Y$، تعریف می کنیم:

$$\mu(T) = \{x \in X : \quad \text{جهانی است } T \text{ برای } x \} = \mu(\{T^n\}_{n\geq 1})$$

تعریف ۱ .۱۶:

مجموعه تمام توابع خطی پیوسته روی X را با نماد $L(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱ .۱۷ :

فضای X را جدایی پذیر گوییم در صورتی که X زیر مجموعه ای شمارا مانند A داشته باشد به طوری که $\overline{A} = X$ به عبارت دیگر X را جدایی پذیر گوییم در صورتی که X دارای زیر مجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

تعریف ۱ .۱۸:

یک فضای نرم دار، جفت $(X,\|\cdot\|)$ است، هرگاه X یک فضای برداری و $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد.
یک فضای باناخ یک فضای نرم دار است، اگر نسبت به متریک تعریف شده به وسیله نرم، کامل باشد.

تعریف ۱ .۱۹:

به یک زیر فضای خطی از X که لزوما بسته نباشد منیفلد خطی می گوییم.

تعریف ۱ .۲۰:

فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع $q:X\to R$ را تابعک زیر خطی گوییم هرگاه:

۱) به ازای هر x و y از X ، $q(x+y)\leq q(x)+q(y)$.

۲) به ازای هر x عضو X و هر $\alpha\geq 0$ ، $q(\alpha x)=\alpha q(x)$.

تعریف ۱ .۲۱:

مجموعه تمام تابعک های خطی و کراندار رویX را، فضای دوگان X ، گوییم و با نماد X^* نمایش می دهیم.

قضیه ۱ .۲۲: (هان- باناخ)
فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و q یک تابعک زیر خطی روی X باشد. اگر M یک منیفلد خطی درX باشد و $f:M\to\mathbb{R}$ یک تابعک خطی باشد به طوری که به ازای هر x درM ، داشته باشیم $f(x)\leq q(x)$، آنگاه یک تابعک خطی $F:X\to\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\in X$، خواهیم داشت:

$F|M=f$ و $F(x)\leq q(x)$.

اثبات: رجوع شود به مرجع[۳۱].

نتیجه ۱ .۲۳:
اگر X یک فضای نرم دار باشد و M یک زیر فضای خطی بسته از X باشد و $x_\circ\in X\setminus M$ و $d=dist(x_\circ,M)$ ($dist(x_\circ,M)=\inf\{\|x_\circ-x\|;x\in M\}$)، آنگاه f ای درX^* ، وجود دارد به طوری که $f(x_\circ)=۱$ و برای هر x عضو M داریم: $f(x)=\circ$. همچنین $\|f\|=d^{-۱}$.

اثبات: رجوع شود به مرجع[۳۱].

تعریف ۱ .۲۴:
اگر T یک عملگر خطی و کراندار روی فضای باناخ X باشد. آنگاه گوییم T به طور ضعیف ابردوری است، اگر یک $x\in X$ وجود داشته باشد، به طوری که مدار $\{T^n x:n=\circ,۱,...\}$ در X چگال ضعیف باشد.

تعریف ۱ .۲۵:
اگر $T:X\to X$ یک عملگر خطی باشد و$\mathbb{F}$ ، میدان حقیقی$\mathbb{R}$ یا میدان مختلط$\mathbb{C}$ باشد، آنگاه $\sigma(T)$ را برای نمایش طیف عملگرT ، به کار برده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma(T)=\{\alpha\in\mathbb{F}:\ker(T-\alpha)\neq\circ\}$$

تعریف ۱ .۲۶:

یک زیر مجموعه باز، همبند و غیرتهی از $\mathbb{C}$ را یک ناحیه می نامند.

تعریف ۱ .۲۷:

عضو x از فضای X را یک نقطه حدی یا انباشتگی A در X گویند در صورتی که هر مجموعه باز شامل x ، مجموعه $A-\{x\}$ را قطع کند.(x ممکن است در A باشد یا نباشد.)

تعریف ۱ .۲۸:

اگر Ω یک ناحیه باشد و $\Phi(z):=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ یک تابع از نوع زیر نمایی باشد، آنگاه عملگر $\Phi(D): f\in H(\Omega)\mapsto \sum_{n=0}^{\infty}c_n f^{(n)}\in H(\Omega)$ ، یک عملگر خطی پیوسته تعریف می کند و در حقیقت $\Phi(D):=\sum_{n=0}^{\infty}c_n D^n$. این نوع عملگرها را عملگر دیفرانسیل می نامند.

تعریف ۱ .۲۹:

فرض کنید X یک فضا باشد. در این صورت یک جداسازی X یعنی زوج مرتبی مانند $(U$و$V)$ که در آن UوV دو مجموعه باز و غیر تهی X اند به طوری که $X=U\bigcup V$ و $U\bigcap V=\phi$. فضای X را همبند می خوانیم در صورتی که هیچ جداسازی نداشته باشد.

تعریف ۱ .۳۰:

به یک ناحیه Ω، همبند ساده می گوییم، هرگاه متمم آن نسبت به صفحه مختلط گسترش یافته، همبند باشد.

تعریف ۱ .۳۱:

فرض کنید تابع مختلط f در Ω تعریف شده باشد و $z_0\in\Omega$ اگر

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

موجود باشد، آنرا مشتق f می نامیم. اگر $f'(z_0)$ به ازای هر $z_0\in\Omega$ موجود باشد.

در این صورت گوییم f در Ω تحلیلی است و رده ی تمام توابع تحلیلی در Ω را با نماد $H(\Omega)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱ .۳۲:

تابعی که در تمام صفحه، تحلیلی باشد، تابع تام نامیده می شود.

تعریف ۱ .۳۳:

اگر φ یک تابع تام باشد، گوییم φ از نوع نمایی است، اگر ثابت های $A,B \in (0,+\infty)$ وجود داشته باشند، به طوری که برای هر $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$|\varphi(z)| \le A\exp(B|z|).$$

تعریف ۱ .۳۴:

گوییم φ از نوع زیر نمایی است، هرگاه برای $\varepsilon > 0$ داده شده ثابت $A = A(\varepsilon) \in (0,+\infty)$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$|\varphi(z)| \le A\exp(\varepsilon|z|).$$

تعریف ۱ .۳۵:

در محاسبات عددی، درون یابی به روشی گفته می شود برای یافتن مقدار تابع درون یک ناحیه، وقتی که مقدار تابع در تعدادی از نقاط گسسته معلوم باشد.

قضیه ۱ .۳۶ : (قضیه درون یابی وایراشتراس)

فرض کنید Ω یک مجموعه باز در S^2(کره ریمان، اجتماع $\mathbb{R}^2$و $\{\infty\}$) باشد به طوری که $\Omega \ne S^2$. همچنین فرض کنید $A \subset \Omega$ و A نقطه حدی در Ω نداشته باشد. به هر $\alpha \in A$، عدد صحیح مثبتی مانند $m(\alpha)$ را مربوط می کنیم، در این صورت تابعی مانند $f \in H(\Omega)$وجود دارد که همه صفرهایش در A هستند و f در هر $\alpha \in A$ ، صفری از مرتبه $m(\alpha)$ دارد.

اثبات: به مرجع [۲۵] رجوع شود.

تعریف ۱ .۳۷:

فرض کنید X یک فضا باشد $A \subset X$ در این صورت A را یک مجموعه G_δ می نامیم در صورتی که بتوان A را به صورت اشتراک گردایه ای شمارا، از مجموعه های باز X نوشت.

تعریف ۱ .۳۸:

اگر $A \subset X$، گوییم A، درون تهی است، اگر A شامل هیچ مجموعه باز در X، بجز مجموعه تهی نباشد. حال فضای X را فضای بئر گوییم، اگر برای هر مجموعه شمارا مانند $\{A_n\}$ از مجموعه های بسته در X، که هر کدام از آنها در X، درون تهی هستند، $\bigcup_n A_n$ نیز در X، درون تهی باشد.

تعریف ۱ .۳۹:

یک زیر مجموعه A از فضای توپولوژیکی بئر X را مانده گوییم. هرگاه شامل یک زیر مجموعه چگال به فرم G_δ باشد.

تعریف ۱ .۴۰:

اگر فضای X دارای یک پایه ی شمارا باشد، گوییم فضای X ، در اصل دوم شمارایی صدق می کند یا شمارای دوم می باشد.

تعریف ۱ .۴۱:

فرض کنیم X مجموعه ای باشد و$A \subseteq X$. گردایه Γ از زیرمجموعه هایX رایک پوشش برایA (یا یک پوشش A)خوانیم در صورتی که:

$$A \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$$

به بیان دیگر گوییم Γ، مجموعه A را می پوشاند. هرگاه زیر گردایه ای از Γ نیز A را بپوشاند، آن را یک زیر پوشش A می نامیم.

فضای X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز X دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.

تعریف ۱ .۴۲:

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $(Y و d)$ یک فضای متری باشد گوییم دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت همگرا به f است در صورتی که به ازای هر عدد مثبت مانند ε، عددی طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq N$ و به ازای هر x از X، $d\left(f_n(x) و f(x)\right) < \varepsilon$.

تعریف ۱ .۴۳:

فضای فرشه $H(\mathbb{C})$ ، مجموعه تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{C}$ است. اگر K زیر مجموعه فشرده ای از $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه:

$$P_k(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

توپولوژی تعریف شده توسط خانواده نیم نرم های

$\{P_k :$ زیر مجموعه فشرده $\mathbb{C}$ است $K\}$

روی $H(\mathbb{C})$ می باشد، که توپولوژی همگرایی یکنواخت نامیده می شود.

تعریف ۱ .۴۴:

به اشتراک تمام زیر فضاهای خطی بسته X که شامل A باشد، گسترش خطی بسته A گفته می شود که با نماد $span(A)$ نمایش داده می شود.

قضیه ۱ .۴۵:

اگر K فشرده باشد و $\mathbb{C}\setminus K$ همبند باشد و اگر f در یک همسایگی از K یک تابع تحلیلی باشد، در این صورت یک دنباله از چند جمله ای ها مانند $\{P_n\}$ وجود دارد به طوری که $P_n(z) \to f(z)$ به طور یکنواخت بر K .

تعریف ۱ .۴۶:

اگر X یک فضای برداری باشد تابع $P: X \to X$ را عملگر تصویر در X گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ ، داشته باشیم : $P^2(x) = P(x)$.

قضیه ۱ .۴۷:(همگرایی وایراشتراس)

اگر تابع f، یک تابع پیوسته بر مجموعه فشرده K باشد آنگاه یک دنباله از چند جمله ای ها مانند $\{P_n\}$ وجود دارد به طوری که $P_n(z) \to f(z)$ به طور یکنواخت بر K .

فصل دوم