دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

تریدهای لاتین همگن

نگارش:

فرگل داروئی

استاد راهنما: **دکتر سید محسن نجفیان**

مهر ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که همواره مشوقم بودند.

قدردانی و تشکر

خداوند متعال را شاکرم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا نمود و مرا از لطف بی‌نهایت خویش بهره‌مند کرد و چه دشوار است تشکر از عزیزانی که اندیشیدن و معرفت را به من آموختند.

از تلاش پدر و مادر بزرگوارم که با ایجاد فضای مناسب و با حمایت‌های خود مرا در رسیدن به این هدف یاری نمودند تشکر ویژه می‌نمایم که همه داشته‌هایم را مرهون و مدیون آن دو بزرگوارم.

سپاس بی‌نهایت خود را نثار استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سید محسن نجفیان می‌نمایم که با علم و صبر و حوصله فراوان، راهنمایم شد تااین پایان‌نامه را به پایان برسانم. همچنین از داوران گرامی سرکار خانم دکتر مژگان امامی و جناب آقای دکتر منوچهر ذاکر که قبول زحمت فرموده و پایان‌نامه این حقیر را مطالعه نمودند، سپاسگزارم.

در نهایت مراتب سپاس و قدردانی خود را به تمام اساتیدی که افتخار شاگردی در محضرشان را داشته‌ام، ابراز می‌دارم.

چکیده

فرض کنیم T یک مربع لاتین جزئی و زیر مجموعهٔ مربع لاتین L باشد. T یک ترید لاتین است هرگاه مربع لاتین جزئی T' با شرط $T \cap T' = \varnothing$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $(L \setminus T) \cup T'$ یک مربع لاتین می‌باشد. T' را زوج مجزای T گوییم. یک ترید لاتین k- همگن گفته می‌شود هرگاه در هر سطر و در هر ستون آن دقیقاً k عنصر وجود داشته باشد و هر عنصر در این ترید لاتین دقیقاً k بار ظاهر شود. تعداد عناصر موجود در یک ترید لاتین را حجم ترید لاتین گوییم.

در این پایان نامه ثابت می‌کنیم تریدهای لاتین k- همگن از حجم km برای هر $۳ \leq k \leq ۸$ و $m \geq k$ وجود دارند، نیز وجود همهٔ تریدهای لاتین k- همگن از حجم km، جز شاید برای تعداد متناهی m، برای هر $k \geq ۳$ و $m \geq k$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین با استفاده از بسته بندی‌های شش ضلعی حاصل شده از دوایر، تریدهای لاتین ۳- همگن را می‌سازیم. به‌علاوه تریدهای لاتین ۴- همگن را مورد بررسی قرار داده و آن‌ها را با استفاده از بسته بندی‌های مستطیلی حاصل شده از دوایر تولید می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

مربع لاتین، دوترید لاتین، ترید لاتین همگن

فهرست مندرجات

مقدمه

مربع‌های لاتین یکی از مفاهیم بنیادی و پایه در ریاضیات ترکیبی هستند. سابقهٔ طرح این موضوع به چند قرن پیش برمی‌گردد. به‌ویژه بحث مربع‌های لاتین متعامد در سال ۱۷۸۲ توسط اویلر[۱] مطرح شده و از آن تاریخ به بعد همواره یکی از موضوعات تحقیق و پژوهش دانشمندان علوم ریاضی بوده و با بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضیات پیوند خورده است. مثلاً رابطه‌ای قوی بین نظریهٔ گراف و مربع‌های لاتین ایجاد شده و این دو مفهوم در حل بسیاری از مسائل با یکدیگر تلفیق گشته‌اند.

تریدها یکی از مباحث اساسی مرتبط با طرح‌های بلوکی هستند که در چهار دههٔ اخیر مطرح گردیده و به‌وسیله آن‌ها موضوعات مختلفی مانند تعیین تعداد بلوک‌های مشترک بین دو طرح بلوکی با پارامترهای یکسان، ساختن طرح‌های بلوکی جدید از روی یک طرح بلوکی مفروض و بررسی مسائل وجودی مربوط به طرح‌های بلوکی مورد پژوهش قرار گرفته‌اند. مانند طرح‌های بلوکی، ایدهٔ تریدها برای مربع‌های لاتین نیز تعریف و با عنوان دو ترید لاتین موضوع بسیاری از تحقیقات پژوهشگران بوده است. هم‌چنین به‌صورت طبیعی و منطقی نظریهٔ تریدها به آرایه‌های متعامد (به عنوان مفهومی جامع تر از مربع‌های لاتین) پیوند می‌خورد و از این برخورد مفهوم t-(v,k) تریدهای لاتین حاصل می‌شود.

ایدهٔ ترید لاتین نخستین بار در سال ۱۹۷۹ توسط کوران[۲] و ون ریس[۳] برای مربع‌های لاتین مطرح گردید. سپس این مفهوم با نام‌های مختلف دیگر مانند "exchangeable partial groupoids" توسط دراپل[۴] و کپکا[۵] [۱۱]، "disjoint and mutually balanced (DMB) partial Latin squares" توسط فو و فو[۶] [۱۲]،

[۱] $Euler$
[۲] $Curran$
[۳] $Van\ Rees$
[۴] $Drapal$
[۵] $Kepka$
[۶] $Fu\ and\ Fu$

"critical partial Latin squares" (CPLS) توسط کیدول[7] [۱۴]، "Latin interchange" توسط دانوان[8] و غیره [۹]، ترید لاتین "Latin trade" توسط آدامز[9] و غیره[۱] و اخیراً به‌عنوان دوترید لاتین "Latin bitrade" توسط دراپل و غیره [۱۰]، [۱۵] و [۱۳] مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است. دوتریدهای لاتین ارتباط تنگاتنگی با رنگ آمیزی گراف‌ها پیدا می‌کنند و به دسته‌های خاصی تقسیم می‌شوند که یکی از انواع آن‌ها دو ترید لاتین k- همگن است. همانند تریدهای طرح‌های بلوکی، تریدهای لاتین در بررسی برخی مسائل مربع‌های لاتین مانند مجموعه‌های بحرانی، اشتراک و تولید مربع‌های لاتین و غیره نقش به‌سزائی داشته و لذا پژوهش‌های زیادی در این‌مورد انجام گرفته است.

در این پایان نامه به معرفی تریدهای لاتین همگن پرداخته و نتایجی در مورد وجود و روش‌هایی را برای ساخت تریدهای لاتین ۳- همگن، ۴- همگن و k- همگن ارائه می‌دهیم. در فصل اول برخی نتایج مهم در مورد مربع‌های لاتین آورده شده است. در فصل دوم نشان می‌دهیم تریدهای لاتین ۳- همگن از حجم $3m$ به‌طوری‌که $m \geq 3$، وجود دارند و نیز با استفاده از بسته بندی‌های شش ضلعی حاصل شده از دوایر، تریدهای لاتین ۳- همگن را می‌سازیم. در فصل سوم تریدهای لاتین ۴- همگن را مورد بررسی قرار داده و آن‌ها را با استفاده از بسته بندی‌های مستطیلی حاصل شده از دوایر تولید می‌کنیم. در نهایت در فصل چهارم ثابت می‌کنیم تریدهای لاتین k- همگن از حجم km برای هر $3 \leq k \leq 8$ و $m \geq k$ وجود دارند و هم‌چنین نشان می‌دهیم برای هر $k \geq 3$ و $m \geq k$ همهٔ تریدهای لاتین k- همگن از حجم km، جز شاید برای تعداد متناهی m وجود دارند.

---

[7] $Keedwell$

[8] $Donovan$

[9] $Adams$

فصل ۱

تعاریف وقضایای مقدماتی

مفهوم مربع لاتین از قدمت طولانی در آنالیز ترکیبی برخوردار است. در فصل اول پس از ارائه تعاریف مورد نیاز و بیان قضیهٔ برایتون – کاپراسمیت – هافمن که در سال ۱۹۷۶ اثبات شده است به معرفی تریدهای لاتین خواهیم پرداخت. این مباحث عمدتاً از مراجع [۲] و [۳] و [۸] گردآوری شده است.

۱.۱ مربع‌های لاتین

تعریف ۱.۱.۱ یک **مربع لاتین** L از مرتبهٔ n یک آرایهٔ $n \times n$ از مجموعهٔ $N = N(n) = \{۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ است به‌طوری‌که هرعنصر از N دقیقاً یک‌بار در هر سطر و دقیقاً یک‌بار در هر ستون ظاهرمی‌شود.

هر مربع لاتین را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از ۳- تایی‌های مرتب، به‌شکل زیر نمایش داد:

$$L = \{(i, j\ ;\ k) \mid \text{عنصر } k \text{ ام در جایگاه } (i,j) \text{ قرار دارد}\}.$$

در این‌صورت

- اگر $(i, j\ ;\ k) \in L$ و $(i, j\ ;\ k') \in L$ آنگاه $k = k'$،
- اگر $(i, j\ ;\ k) \in L$ و $(i, j'\ ;\ k) \in L$ آنگاه $j = j'$،

• اگر $(i,j\ ;\ k)\in L$ و $(i',j\ ;\ k)\in L$ آنگاه $i=i'$.

واضح است که برای هر n، حداقل یک مربع لاتین از مرتبهٔ n وجود دارد.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ دو آرایهٔ $n\times n$ باشند، الحاق A و B را با (A,B) نشان داده که یک آرایهٔ $n\times n$ است و عنصر واقع در جایگاه (i,j) ام این آرایه، زوج مرتب (a_{ij},b_{ij}) می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱ دو مربع لاتین $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ را **متعامد** گوییم هرگاه در زوج‌های مرتب (a_{ij},b_{ij}) در (A,B) تکرار وجود نداشته باشد. در این صورت A را **زوج متعامد** B گوییم و بالعکس.

مثال ۴.۱.۱ A و B دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ می‌باشند.

$$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۲&۳\\\hline ۲&۳&۱\\\hline ۳&۱&۲\\\hline\end{array}\qquad B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline ۱&۳&۲\\\hline\end{array}\qquad (A,B)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline (۱,۲)&(۲,۱)&(۳,۳)\\\hline (۲,۳)&(۳,۲)&(۱,۱)\\\hline (۳,۱)&(۱,۳)&(۲,۲)\\\hline\end{array}$$

تعریف ۵.۱.۱ یک **مربع لاتین جزئی** P از مرتبهٔ n یک آرایهٔ $n\times n$ از عناصر مجموعهٔ N است به‌طوری‌که هر عنصر N حداکثر یک‌بار در هر سطر و حداکثر یک‌بار در هر ستون ظاهر می‌شود. بنابراین برخی از جایگاه‌های آرایهٔ P ممکن است خالی باشند. در حالت خاص اگر P جایگاه خالی نداشته باشد آنگاه P یک مربع لاتین خواهد بود.

تعریف ۶.۱.۱ در یک مربع لاتین جزئی P مجموعهٔ $S_P=\{(i,j)\mid (i,j\ ;\ k)\in P\}$ را **شکل** P و $|S_P|$ را **حجم** P گوییم.

مثال ۷.۱.۱ دو مربع لاتین جزئی از مرتبه ۵ و از حجم ۱۹.

۲	۱	۵	۰	۰
۱	۳	۰	۵	۰
۴	۵	۲	۰	۳
۳	۰	۴	۱	۵
۵	۲	۱	۳	۴

۵	۲	۱	۰	۰
۳	۵	۰	۱	۰
۲	۳	۴	۰	۵
۱	۰	۵	۳	۴
۴	۱	۲	۵	۳

تعریف ۸.۱.۱ یک **قطر پراکنده** در یک مربع لاتین از مرتبهٔ n، یک مجموعهٔ n عضوی از درایه‌های مربع لاتین است به‌طوری‌که هیچ دو عضوی از این n عضو در یک سطر و یا یک ستون یکسان قرار ندارند.

قضیه ۹.۱.۱ مربع لاتین A از مرتبهٔ n دارای زوج متعامد B است اگر و تنها اگر A دارای n قطر پراکنده باشد.

برهان : فرض کنیم A دارای n قطر پراکنده باشد. B را به‌شکل زیر می‌سازیم:

در جایگاه‌های قطر پراکنده i ام $n \leq i \leq ۱$ در A، در آرایهٔ B مقدار i را قرار می‌دهیم. چون هیچ دو عضوی از این n عضو قطر پراکنده i ام در یک سطر و یا یک ستون یکسان قرار ندارند پس در B در هیچ سطر و ستونی عنصر تکراری نخواهیم داشت، لذا B یک مربع لاتین خواهد بود. در نتیجه زوج مرتب‌های دو به‌دو متمایز $(۱, i), (۲, i), \ldots, (n, i)$ در هر مرحله ظاهر می‌شوند. بنابراین B زوج متعامد A خواهد شد.

فرض کنیم B زوج متعامد A باشد. در مربع (A, B) زوج‌هایی با درایهٔ دوم یکسان مثلاً i $(۱ \leq i \leq n)$ را در نظر می‌گیریم. چون درایهٔ دوم همهٔ این زوج‌ها مساوی هستند و این درایه‌ها از B آمده‌اند و مربع لاتین B در هیچ سطر وستونی تکرار ندارد، پس این جایگاه‌ها در هیچ سطر وستونی تکرار نشده‌اند. از طرفی تمام دوتایی‌های شامل i در این جایگاه‌ها در (A, B) ظاهر شده‌اند، $(\{(۱, i), (۲, i), \ldots, (n, i)\})$ پس این جایگاه‌ها در A تمام اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را شامل شده و هیچ دو جایگاهی هم در سطر و ستون تکرار نشده است، لذا یک قطر پراکنده به‌دست می‌آید. چون i دلخواه انتخاب شد پس A دارای n قطر پراکنده می‌باشد. □

تعریف ۱۰.۱.۱ مجموعهٔ تمام مربع‌های لاتین دو به‌دو عمود بر هم از مرتبهٔ n را با $MOLS(n)$[۱] و تعداد آن‌ها را با N_n نمایش می‌دهیم.

[۱] *Mutually Orthogonal Latin Squares*

قضیه ۱۱.۱.۱ برای هر عدد صحیح مثبت n حداکثر $(n-۱)$ مربع لاتین دو به‌دو عمود بر هم از مرتبهٔ n وجود دارد.

برهان : بدون این‌که از کلیت مسأله کاسته شود، فرض می‌کنیم سطر اول همهٔ مربع‌های لاتین دو به‌دو متعامد داده شده به‌ترتیب $۱,۲,۳,\dots,n$ باشد. زیرا در غیر این‌صورت برای هر کدام می‌توان با یک جایگشت سطر اول را به این‌صورت در آورد. حال اگر درایهٔ $a_{۲۱}$ را در نظر بگیریم این درایه در تمام مربع‌ها مخالف ۱ بوده و در هر مربع متفاوت است. پس حداکثر امکان برای مقدار $a_{۲۱}$ بیشتر از $(n-۱)$ نیست. پس حداکثر $(n-۱)$ مربع وجود دارد. $\square$

قضیه ۱۲.۱.۱ برای هر n فرد، $N_n \geq ۲$ می‌باشد.

برهان : دو آرایهٔ $n \times n$، $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij} \equiv j+(i-۱) \pmod{n}, \qquad b_{ij} \equiv j-(i-۱) \pmod{n}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم A و B مربع لاتین هستند. برای این منظور کافی است نشان دهیم در هر سطر و ستون A عنصر تکراری وجود ندارد. فرض کنیم چنین نباشد و در سطر i ام A در دو ستون متمایز r و s عنصر تکراری داشته باشیم در این‌صورت

$$a_{ir}=a_{is} \Rightarrow r+(i-۱) \equiv s+(i-۱) \pmod{n} \Rightarrow r \equiv s \pmod{n} \Rightarrow r=s$$

که این تناقض با متمایز بودن دو ستون r و s دارد.

نیز فرض کنیم در ستون j ام A در دو سطر متمایز p و q عنصر تکراری داشته باشیم، آنگاه

$$a_{pj}=a_{qj} \Rightarrow j+p-۱ \equiv j+q-۱ \pmod{n} \Rightarrow p \equiv q \pmod{n} \Rightarrow p=q$$

که تناقض با متمایز بودن دو سطر p و q دارد. در نتیجه A یک مربع لاتین می‌باشد. به همین ترتیب B نیز یک مربع لاتین است. حال ثابت می‌کنیم A و B بر هم عمود هستند. برای این منظور باید نشان دهیم (A,B) زوج تکراری ندارد. فرض کنیم چنین نباشد و در (A,B) داشته باشیم

$$(a_{ir},b_{ir})=(a_{js},b_{js}) \Rightarrow \begin{cases} a_{ir}=a_{js} \Rightarrow r+i-۱ \equiv s+j-۱ \pmod{n} \\ b_{ir}=b_{js} \Rightarrow r-i+۱ \equiv s-j+۱ \pmod{n} \end{cases}$$

باجمع دو رابطهٔ فوق و از آنجایی که n فرد است داریم

$$۲r \equiv ۲s \pmod{n} \Rightarrow r \equiv s \pmod{n} \Rightarrow r = s$$

و از تفاضل دو رابطهٔ فوق و فرد بودن n، داریم

$$۲i \equiv ۲j \pmod{n} \Rightarrow i \equiv j \pmod{n} \Rightarrow i = j$$

که با متمایز بودن دو سطر i و j و دو ستون r و s تناقض دارد. لذا برای n فرد حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد. □

حدس اویلر. اویلر در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای هر عدد به‌صورت $n = ۴k + ۲$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. در واقع اویلر حالت $n = ۶$ را بررسی کرد و چون به نتیجه نرسید این حدس را بیان نمود.

برای $n = ۶$ اویلر مسأله را به‌صورت زیر عنوان کرد:

فرض کنید ٦ گردان مختلف نظامی داریم که هر گردان دارای ٦ افسر از درجات مختلف است (کلاً ٦ نوع درجهٔ افسری وجود دارد). حال آیا می‌توان در یک رژه نظامی این ٣٦ افسر را در ٦ ردیف و ٦ ستون چنان قرار داد که در هر ستون و در هر ردیف از هر گردان و از هر درجه یک افسر وجود داشته باشد؟

این مسأله به‌نام مسأله **افسران اویلر** معروف است. این مسأله تا سال ۱۹۰۰ لاینحل بود ولی در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری[۲] که در الجزایر خدمت می‌کرد آن را با بررسی تمام حالت‌های مختلف به‌طور سیستماتیک مطالعه کرد و ثابت نمود که ادعای اویلر برای $n = ۶$ درست است.

برای $n = ۱۰$ و اعداد بزرگتر تا سال ۱۹۵۹ کسی جواب این مسأله را نمی‌دانست ولی در این سال یک ریاضی‌دان آمریکایی به‌نام پارکر[۳] برای $n = ۱۰$ و دو ریاضی‌دان هندی به‌نام‌های بوس[۴] و شریخاند[۵] برای $n = ۲۲$ و تعداد زیادی از اعداد دیگر حدس اویلر را رد کردند. این سه نفر با هم در سال ۱۹٦۰ ثابت کردند که حدس اویلر به جز حالت $n = ۶$، هیچ وقت درست نیست. یعنی:

قضیه ۱۳.۱.۱ برای هر عدد، $n \neq ۱, ۲, ۶$ حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

[۲] $Tarry$
[۳] $Parker$
[۴] $Bose$
[۵] $Shrikhande$

۲.۱ قضیهٔ برایتون — کاپراسمیت — هافمن

تعریف ۱.۲.۱ یک مربع لاتین را **خود متعامد** گوییم هرگاه خود و ترانهاده‌اش بر هم عمود باشند. یک مربع لاتین خود متعامد از مرتبهٔ n را با $SOLS(n)$[۶] نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۱ مربع لاتین زیر یک $SOLS(۴)$ می‌باشد.

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲

مثال ۳.۲.۱ مربع لاتین زیر یک $SOLS(۱۴)$ می‌باشد.

۰	۸	۳	۱۲	۹	۲	۵	۱۰	۶	۱۱	۱	۴	∞	۷
∞	۱	۹	۴	۰	۱۰	۳	۶	۱۱	۷	۱۲	۲	۵	۸
۶	∞	۲	۱۰	۵	۱	۱۱	۴	۷	۱۲	۸	۰	۳	۹
۴	۷	∞	۳	۱۱	۶	۲	۱۲	۵	۸	۰	۹	۱	۱۰
۲	۵	۸	∞	۴	۱۲	۷	۳	۰	۶	۹	۱	۱۰	۱۱
۱۱	۳	۶	۹	∞	۵	۰	۸	۴	۱	۷	۱۰	۲	۱۲
۳	۱۲	۴	۷	۱۰	∞	۶	۱	۹	۵	۲	۸	۱۱	۰
۱۲	۴	۰	۵	۸	۱۱	∞	۷	۲	۱۰	۶	۳	۹	۱
۱۰	۰	۵	۱	۶	۹	۱۲	∞	۸	۳	۱۱	۷	۴	۲
۵	۱۱	۱	۶	۲	۷	۱۰	۰	∞	۹	۴	۱۲	۸	۳
۹	۶	۱۲	۲	۷	۳	۸	۱۱	۱	∞	۱۰	۵	۰	۴
۱	۱۰	۷	۰	۳	۸	۴	۹	۱۲	۲	∞	۱۱	۶	۵
۷	۲	۱۱	۸	۱	۴	۹	۵	۱۰	۰	۳	∞	۱۲	۶
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	∞

برای ساختن $SOLS(۱۴)$ ابتدا از سطر و ستون آخر چشم پوشی می‌کنیم و به‌وسیلهٔ گردش دوری بر روی سطر

[۶] *Self Orthogonal Latin Squares*

اول به پیمانهٔ ۱۳ و در نظر گرفتن $\infty = 1 + \infty$ مربع لاتین از مرتبهٔ ۱۳ را تولید می‌کنیم. سپس سطر و ستون آخر مربع لاتین از مرتبهٔ ۱۴ را از روی مربع حاصل شده کامل می‌کنیم.

مثال ۴.۲.۱ مربع لاتین زیر یک $SOLS(10)$ می‌باشد.

۰	۲	۸	۶	∞	۷	۱	۵	۴	۳
۵	۱	۳	۰	۷	∞	۸	۲	۶	۴
۷	۶	۲	۴	۱	۸	∞	۰	۳	۵
۴	۸	۷	۳	۵	۲	۰	∞	۱	۶
۲	۵	۰	۸	۴	۶	۳	۱	∞	۷
∞	۳	۶	۱	۰	۵	۷	۴	۲	۸
۳	∞	۴	۷	۲	۱	۶	۸	۵	۰
۶	۴	∞	۵	۸	۳	۲	۷	۰	۱
۱	۷	۵	∞	۶	۰	۴	۳	۸	۲
۸	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	∞

$SOLS(10)$ نیز مشابه $SOLS(14)$ حاصل می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱ یک مربع لاتین $A = (a_{ij})$ از مرتبهٔ n با عناصری در Z_n را **دوری** گوییم اگر

$$\forall\, i, j \quad a_{i+1, j+1} \equiv a_{i,j} + 1 \pmod{n}.$$

دو قضیهٔ ۶.۲.۱ و ۸.۲.۱ منسوب به مندلسون[۷] است که در سال **۱۹۷۱** ثابت شده‌اند.

قضیه ۶.۲.۱ یک $SOLS(n)$ دوری وجود دارد هرگاه $(n, 6) = 1$ باشد.

برهان : آرایهٔ مربعی $A = (a_{ij})$ از مرتبهٔ n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij} \equiv 2i - j \pmod{n}, \qquad 1 \leq a_{ij} \leq n$$

ابتدا ثابت می‌کنیم A یک مربع لاتین است

$$a_{ij} = a_{ik} \Rightarrow 2i - j \equiv 2i - k \pmod{n} \Rightarrow j \equiv k \pmod{n} \Rightarrow j = k$$

[۷] $Mendelsohn$

چون $(n,۶) = ۱$ پس n یک عدد فرد است، در نتیجه

$$a_{ij} = a_{kj} \Rightarrow ۲i - j \equiv ۲k - j \pmod{n} \Rightarrow ۲i \equiv ۲k \pmod{n} \Rightarrow i = k$$

بنابراین A در هیچ سطر وستونی تکرار ندارد. لذا یک مربع لاتین خواهد بود.

از طرفی A دوری نیز می‌باشد، زیرا طبق تعریف ۵.۲.۱

$$a_{i+۱,j+۱} \equiv ۲(i+۱) - (j+۱) = ۲i - j + ۱ \equiv a_{i,j} + ۱ \pmod{n}.$$

حال ثابت می‌کنیم A و A' به‌طوری‌که $A' = (a'_{ij} = a_{ji})$ متعامد هستند. برای این منظور کافی است نشان دهیم در (A, A') زوج تکراری وجود ندارد. فرض کنیم داشته باشیم

$$(a_{ij}, a'_{ij}) = (a_{kl}, a'_{kl}) \Rightarrow a_{ij} = a_{kl},\ a'_{ij} = a'_{kl} \Rightarrow a_{ij} = a_{kl},\ a_{ji} = a_{lk}$$

در این‌صورت

$$۲i - j \equiv ۲k - l \pmod{n} \tag{۱}$$

$$۲j - i \equiv ۲l - k \pmod{n} \tag{۲}$$

با جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم $i + j \equiv k + l \pmod{n}$ و در نتیجه

$$۲(k + l - j) - j \equiv ۲k - l \pmod{n} \Rightarrow ۳l \equiv ۳j \pmod{n}$$

اما چون $(n,۳) = ۱$ پس $l \equiv j \pmod{n}$ بنابراین $l = j$ و $i = k$ خواهد بود. □

مثال ۷.۲.۱ مطابق قضیهٔ ۶.۲.۱، $SOLS(۵)$ و $SOLS(۷)$ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند.

۱	۵	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۵	۴
۵	۴	۳	۲	۱
۲	۱	۵	۴	۳
۴	۳	۲	۱	۵

۱	۷	۶	۵	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۷	۶	۵	۴
۵	۴	۳	۲	۱	۷	۶
۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۲	۱	۷	۶	۵	۴	۳
۴	۳	۲	۱	۷	۶	۵
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۷

قضیه ۸.۲.۱ اگر n توانی از یک عدد اول باشد و $n \neq ۲$ یا ۳، آنگاه یک $SOLS(n)$ وجود دارد.

برهان : یک $SOLS(n)$ با عناصری از $GF(n)$ (میدان گالوا) به عنوان درایه‌هایش، به‌صورت زیر می‌سازیم. فرض کنیم $GF(n) = \{c_۱ = ۰, c_۲, \dots, c_n\}$ و $\lambda \in GF(n)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\lambda \neq ۰,\ \lambda \neq ۱,\ ۲\lambda \neq ۱$ باشد. آنگاه آرایهٔ $n \times n$، $A = (a_{ij})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij} = \lambda c_i + (۱ - \lambda) c_j$$

ابتدا ثابت می‌کنیم A یک مربع لاتین است.

$$a_{ij} = a_{ik} \Rightarrow \lambda c_i + (۱ - \lambda) c_j = \lambda c_i + (۱ - \lambda) c_k \Rightarrow (۱ - \lambda) c_j = (۱ - \lambda) c_k$$

اما از آنجایی که $(۱ - \lambda) \neq ۰$ خواهیم داشت $c_j = c_k$. چون c_j و c_k عناصری از $GF(n)$ هستند پس $j = k$ خواهد بود (عناصر $GF(n)$ دو به‌دو متمایز می‌باشند).

$$a_{ij} = a_{kj} \Rightarrow \lambda c_i + (۱ - \lambda) c_j = \lambda c_k + (۱ - \lambda) c_j \Rightarrow \lambda c_i = \lambda c_k$$

اما چون $\lambda \neq ۰$ خواهیم داشت $c_i = c_k$ پس $i = k$ خواهد بود.

حال ثابت می‌کنیم A و A' متعامد هستند. برای این منظور کافی است نشان دهیم در (A, A') زوج تکراری وجود ندارد. فرض کنیم داشته باشیم

$$(a_{ij}, a'_{ij}) = (a_{kl}, a'_{kl}) \Rightarrow a_{ij} = a_{kl},\ a'_{ij} = a'_{kl} \Rightarrow a_{ij} = a_{kl},\ a_{ji} = a_{lk}$$

در این‌صورت

$$\lambda c_i + (۱ - \lambda) c_j = \lambda c_k + (۱ - \lambda) c_l \tag{۳}$$

$$\lambda c_j + (۱ - \lambda) c_i = \lambda c_l + (۱ - \lambda) c_k \tag{۴}$$

با جمع دو رابطهٔ (۳) و (۴) داریم $c_i + c_j = c_k + c_l$ و در نتیجه

$$\lambda (c_k + c_l - c_j) + (۱ - \lambda) c_j = \lambda c_k + (۱ - \lambda) c_l \Rightarrow (۱ - ۲\lambda) c_j = (۱ - ۲\lambda) c_l$$

اما از آنجایی که $۲\lambda \neq ۱$ خواهیم داشت $c_j = c_l$. بنابراین $j = l$ و $i = k$ خواهد شد. □

قضیه اخیر وجود $SOLS(n)$ را برای $n = ۴, ۸, ۱۶, \ldots$ و $n = ۹, ۲۷, ۸۱, \ldots$ ثابت می‌کند. توجه داریم که برای این مقادیر n نمی‌توان از قضیهٔ ۶.۲.۱ استفاده کرد.

قضیه ۹.۲.۱ (برایتون — کاپراسمیت — هافمن[۸] ۱۹۷۶) اگر $n \neq ۲, ۳$ یا ۶ یک $SOLS(n)$ وجود دارد.

اثبات این قضیه به‌طور کامل در [۲, ۳] آورده شده است. در این‌جا روند اثبات را توضیح داده و از اثبات برخی از قضایا صرف نظر می‌شود. قبل از اثبات این قضیه، کافی است نشان دهیم که چگونه $SOLS$ به نوع مشخصی از مسابقات دوگانهٔ ترکیبی مربوط است.

تعریف ۱۰.۲.۱ یک $SAMDRR(n)$[۹] مسابقاتی است شامل n جفت زن و شوهر به‌طوری‌که هر مسابقه شامل دو بازیکن از جنس مخالف است که در مقابل دو بازیکن از جنس مخالف دیگر بازی می‌کنند. این مسابقات به‌گونه‌ای است که هر دو بازیکن از جنس مشابه فقط یک‌بار مقابل یکدیگر بازی می‌کنند و هر بازیکن با هر عضو از جنس مخالف (به غیر از همسرش) دقیقاً یک‌بار به عنوان شریک و یک‌بار به عنوان رقیب بازی می‌کند.

مثال ۱۱.۲.۱ یک $SAMDRR(۴)$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{array}{ll} H_۱W_۳ \vee H_۲W_۴ & H_۳W_۱ \vee H_۴W_۲ \\ H_۱W_۴ \vee H_۳W_۲ & H_۴W_۱ \vee H_۲W_۳ \\ H_۱W_۲ \vee H_۴W_۳ & H_۲W_۱ \vee H_۳W_۴ \end{array}$$

قبل از نشان دادن ارتباط بین $SOLS(n)$ و $SAMDRR(n)$ به بیان یک ویژگی از $SOLS$ می‌پردازیم.

لم ۱۲.۲.۱ اگر A یک $SOLS$ باشد، قطر اصلی آن یک قطر پراکنده است.

[۸] $Brayton - Coppersmith - Hoffman$

[۹] $spouse - avoiding\ mixed\ doubles\ round\ robin\ tournament\ for\ n\ couples$

برهان : از آنجایی‌که $A=(a_{ij})$ و زوج متعامد $A'=(a'_{ij}=a_{ji})$ درایه‌های روی قطر اصلی یکسانی دارند، اگر در روی قطر اصلی A داشته باشیم $a_{ii}=a_{jj}=k$، آنگاه زوج (k,k) دو بار در (A,A') ظاهر می‌شود که این با متعامد بودن A و A' در تناقض است. □

قضیه ۱۳.۲.۱ یک $SAMDRR(n)$ وجود دارد اگر و تنها اگر یک $SOLS(n)$ وجود داشته باشد.

برهان : فرض کنیم یک $SAMDRR(n)$ وجود داشته باشد و نیز جفت همسر (H_i,W_i)، $1\leq i\leq n$ را در نظر می‌گیریم. آرایهٔ $n\times n$، $A=(a_{ij})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$a_{ii}=i$ و $a_{ij}=l$ به‌طوری‌که W_l زوج H_i است وقتی‌که H_i با H_j، $(i\neq j)$ بازی می‌کند. چون هیچ‌یک از زوج‌ها مطابق تعریف ۱۰.۲.۱ تکراری نیستند، A یک مربع لاتین خواهد بود. برای اثبات این‌که A و A' متعامد هستند، فرض کنیم

$$(a_{ij},a_{ji})=(a_{IJ},a_{JI})\Rightarrow a_{ij}=a_{IJ},\ a_{ji}=a_{JI}$$

اگر $a_{ij}=l$ و $a_{ji}=m$ باشد در این‌صورت مسابقهٔ $H_iW_l\vee H_jW_m$ و هم‌چنین مسابقهٔ $H_IW_l\vee H_JW_m$ را داریم. اما W_l و W_m فقط یک‌بار مقابل یکدیگر بازی می‌کنند، بنابراین $i=I$ و $j=J$ و در نتیجه A یک $SOLS(n)$ می‌باشد.

حال فرض کنیم یک $SOLS(n)$ داده شده باشد. عناصر این $SOLS(n)$ را می‌توان بنا به لم ۱۲.۲.۱ به‌صورت، به ازای هر i، $a_{ii}=i$ برچسب‌گذاری کرد (اگر در A به ازای i ای $a_{ii}=j\neq i$ باشد با اعمال یک جایگشت و تبدیل j به i در A می‌توان برچسب‌گذاری مناسب را ایجاد کرد). نیز اگر $a_{ij}=l$ و $a_{ji}=m$ باشد، جورسازی $H_iW_l\vee H_jW_m$ را در نظر می‌گیریم. به این ترتیب یک $SAMDRR(n)$ حاصل می‌شود. □

مثال ۱۴.۲.۱ با استفاده از $SOLS(۴)$ واقع در مثال ۲.۲.۱ و اعمال برچسب‌گذاری، به ازای هر i، $a_{ii}=i$، $SOLS(۴)$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳
۲	۳	۱	۴
۴	۱	۳	۲