فهرست

عنوان صفحه

مقدمه

می دانیم که اگر G یک گروه باشد، آن گاه گروه خارج قسمت مرکزی G، $\frac{G}{Z(G)}$ باگروه خودریختی های داخلی G یکریخت است.

در سال ۱۹۳۸ بئر[۱] به مطالعه گروه هایی پرداخت که با گروه خودریختی های داخلی گروه دیگری یکریخت باشند وبدین ترتیب مساله بررسی گروه هایی که خارج قسمت مرکزی گروه دیگری هستند مطرح گردید. در سال ۱۹۴۰ پ. هال [۲] بیان کرد:

> «این سوال که اگر G خارج قسمت مرکزی گروه دیگری مانند H باشد چه شرایطی را داراست، جالب است اما در حالی که بیان این شرایط آسان است، بحث کردن درباره این که این شرایط کافی نیز هستند کار ساده ای نیست.»

در سال ۱۹٦۴ م. هال[۳] و سینیور[۴] گروهی را که خارج قسمت مرکزی گروه دیگر باشد گروه قابل نامیدند. این پرسش که کدام گروه ها قابل هستند به واسطهٔ نتایج ارتباط دهندهٔ این پرسش با تابعگرهای کوهمولوژیکی معین (بویژه حاصل ضرب تانسوری گروههای غیرآبلی) توجه تازه ای را به خوداختصاص داده است.

هنکن[۵] در سال ۱۹۹٦ و نیکولوا[٦] در سال ۲۰۰۱ به مطالعاتی درباره محدودیت هایی

---

[۱] Baer
[۲] P. Hall
[۳] M. Hall
[۴] Senior
[۵] Heineken
[٦] Nikolva

که قابل بودن بر ساختار گروه اعمال میکند پرداختند. در سال ۲۰۰۳ باکن[۷] و کاپ[۸] ، p—گروههای ۲—مولدهٔ قابل متناهی از ردهٔ پوچ توانی ۲، جایی که pفرد است را طبقه بندی کرد. مجدین[۹] در سال ۲۰۰۶ طبقه بندی ۲—گروه های ۲—مولدهٔ قابل از ردهٔ پوچ توانی ۲ را بیان کرد. در این پایان نامه به بیان و تشریح دو کار اخیر پرداخته ایم .

در فصل اول طبقه بندی ۲—گروههای ۲—مولدهٔ قابل متناهی از ردهٔ پوچ توانی ۲ را بیان می کنیم. در فصل دوم به بیان مطالبی درباره مربع تانسوری گروه های غیر آبلی می پردازیم و سرانجام در فصل سوم با طبقه بندی p—گروههای ۲—مولدهٔ قابل متناهی از ردهٔ پوچ توانی ۲ جایی که p فرد است به کار خودپایان می دهیم .

---

[۷] Bacon
[۸] Kappe
[۹] Magidin

فصل ۱

۲–گروه های ۲–مولدۀ قابل از ردۀ پوچ توانی ۲

در [۹] ۲–گروه های ۲–مولده متناهی غیرآبلی از رده پوچ توانی ۲ طبقه‌بندی شد. در سال ۲۰۰۶ مجدین شرایط لازم و کافی برای این که این گروه ها خارج قسمت مرکزی گروه دیگر ی باشند را بیان کرد. در این فصل به بررسی مقالۀ [۱۰] می پردازیم.

در بخش اول این فصل به بیان چند قضیه و تعریف مقدماتی می‌پردازیم. در بخش دوم طبقه‌بندی ۲–گروه ها ۲– مولده متناهی از رده پوچ توانی ۲ را بیان می‌کنیم.

در بخش سوم به بررسی قابل بودن گروه های خاص[۱] می‌پردازیم.

در بخش چهارم قابل بودن گروه های هم حاصل ضرب[۲] را بررسی می‌کنیم.

در بخش پنجم و ششم، شرایط قابل بودن گروه های عمومی[۳] را بیان می‌کنیم.

۱–۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

نماد گذاری ۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $x, y, z \in G$. جابه جاگر دو عنصر y, x رابه صورت $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ تعریف می کنیم و جابه جاگرها را به صورت چپ چین خواهیم نوشت. به طور مثال $[x, y, z] = [[x, y], z]$. همچنین از نماد x^y برای نمایش $y^{-1}xy$ استفاده می‌کنیم.

---

[۱] exceptional groups
[۲] eoproduct groups
[۳] general groups

تعریف ۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. سری نرمال

$$G = \gamma_{۰}(G) \supseteq \gamma_{۱}(G) \supseteq \gamma_{۲}(G) \supseteq \cdots$$

جایی که $\gamma_i(G) = [G, \gamma_{i-۱}(G)]$ را سری مرکزی پایینی G گویند. اگر عدد k موجود باشد بطوری که $\gamma_k(G) = ۱$ و $\gamma_{k-۱}(G) \neq ۱$ آن‌گاه گوییم G پوچ توان از رده k می‌باشد.

قضیه ۳.۱. اگر G یک گروه پوچ توان از رده k باشد آن‌گاه هر زیرگروه و هر گروه خارج قسمتی از G پوچ توان و از رده کمتر یا مساوی k می‌باشند.

گزاره ۴.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $x, y, z \in G$ و $r, s, n \in Z$. در این صورت:

الف) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$

ب) $[x, y, z] = [x, z][x, y]^z = [x, z][z, [y, x]][x, y]$

پ) $[x^r, y^s] \equiv [x, y]^{rs} [x, y, x]^{s\binom{r}{۲}} [x, y, y]^{r\binom{s}{۲}} (\mathrm{mod}\, \gamma_{۴}(G))$

ت) $(xy)^n \equiv x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{۲}} \ (\mathrm{mod}\, \gamma_{۳}(G))$

جایی که $\binom{m}{۲} = \frac{m(m-۱)}{۲}$ برای هر $m \in \mathbb{N}$ و $\gamma_k(G)$، kامین جمله در سری مرکزی پایینی G است.

تعریف ۵.۱. گروه G را قابل گوییم هرگاه گروهی مانند H موجود باشد به طوری که $G \cong \frac{H}{Z(H)}$. یا به طور معادل G با گروه خودریختیهای داخلی گروهی مانند H یکریخت باشد.

نتیجه ۶.۱. گروههای با مرکز بدیهی قابل‌اند.

قضیه ۷.۱. فرض کنید A یک گروه آبلی با تولید متناهی به صورت زیر باشد

$$A = \mathbb{Z}_{n_۱} \oplus \mathbb{Z}_{n_۲} \oplus \cdots + \mathbb{Z}_{n_k}$$

بطوری که $n_i | n_{i+۱}$ و $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}$ اگر $n = ۰$. آن‌گاه A قابل است اگر و فقط اگر $k \geq ۲$ و $n_{k-۱} = n_k$.

نتیجه ۸.۱. گروههای دوری قابل نیستند.

حال به بررسی قابل بودن گروههای تا مرتبه q می‌پردازیم.

بنابر نتیجه (۸.۱)، گروههای از مرتبه ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۷ قابل نیستند. می‌دانیم گروههای از مرتبه ۴ در حد یکریختی، $\mathbb{Z}_۴$ و $\mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲$ است. بنابر نتیجه (۸.۱)، $\mathbb{Z}_۴$ قابل نمی‌باشد و بنابر قضیه (۷.۱)، $\mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲$ قابل است.

گروههای از مرتبه ۶ در حد یکریختی، $\mathbb{Z}_۶$ و $S_۳$ هستند. بنابر نتیجه (۸.۱)، $\mathbb{Z}_۶$ قابل نیست، و از آنجا که $Z(S_۳) = ۱$، بنابر نتیجه (۶.۱)، $S_۳$ قابل است.

گروههای از مرتبه ۸، عبارتند از:

$$D_۸ \quad , \quad Q_۸ \quad , \quad \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲ \quad , \quad \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۴ \quad , \quad \mathbb{Z}_۸$$

بنابر نتیجه (۸.۱)، $\mathbb{Z}_۸$ قابل نیست. طبق قضیه (۷.۱)، داریم $\mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۴$ قابل نمی‌باشد و $\mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲$ قابل است. از آنجا که $D_۸ \cong \dfrac{D_{۱۶}}{Z(D_{۱۶})}$، لذا $D_۸$ قابل است. حال ثابت می کنیم $Q_۸$ قابل نیست.

فرض کنیم $Q_۸$ قابل باشد. توجه می‌کنیم که زیرگروه تولید شده توسط ۱− و عنصری دلخواه از $Q_۸$ گروهی دوری است یعنی

$$\begin{aligned}\langle -۱, i\rangle &= \langle i\rangle \\ \langle -۱, j\rangle &= \langle j\rangle \\ \langle -۱, k\rangle &= \langle k\rangle \\ \langle -۱, ۱\rangle &= \langle -۱\rangle\end{aligned}$$

حال فرض کنیم G یک گروه باشد و $\phi = Q_۸ \longrightarrow \frac{G}{Z(G)}$ یکریختی باشد و $\phi(-۱) = gZ(G)$ جایی که $g \in G$. بنابراین زیرگروه تولید شده توسط $gZ(G)$ و هر عنصر دیگر از $\frac{G}{Z(G)}$ گروهی دوری است. ثابت می‌کنیم $g \in Z(G)$. فرض کنیم $a \in G$. عنصر $b \in G$ موجود است به طوری که

$$\langle gZ(G), aZ(G)\rangle = \langle bZ(G)\rangle$$

پس $gZ(G) = b^iZ(G)$ و $aZ(G) = b^jZ(G)$ جایی که $i, j \in \mathbb{Z}$. لذا عناصر $u, v \in Z(G)$ موجودند به طوری که $g = b^iu$ و $a = b^jv$ داریم:

$$ga = b^{i+j}uv = b^{j+i}vu = b^jvb^iu = ag$$

بنابراین $g \in Z(G)$ و $gZ(G) = Z(G)$ و بنابر یکریختی ۱ = ۱− که تناقض می‌باشد لذا $Q_۸$ قابل نیست.

گزاره ۹.۱. [۱۱] فرض کنید G یک گروه از رده پوچ توانی ۲ باشد که توسط مجموعه کمین $\{x_۱, \ldots, x_m\}$ تولید شود، جایی که $o(x_i) = ۲^{r_i}$ ($o(x)$ مرتبهٔ عنصر x در گروه G است.) و $۱ \leq r_۱ \leq \ldots \leq r_m$. اگر G قابل باشد، آنگاه $m > ۱$ و $r_m \leq r_{m-۱} + ۱$

تذکر ۱.۱۰. اگر G از رده پوچ توانی k باشد و $x_۱, x_۲, \ldots, x_{k+۱} \in G$، آنگاه $[x_۱, x_۲, \ldots, x_{k+۱}] = ۱$

لم ۱.۱۱. فرض کنید K یک گروه پوچ توان از رده پوچ توانی ۳ باشد. فرض کنید $y_۱, \ldots, y_m \in K$ طوری که $\frac{K}{Z(K)} = \langle y_۱ Z(K), \ldots, y_m Z(K)\rangle$ و $y_i^{۲^{r_i}} \in Z(K)$ و $r_m \leq r_{m-۱} \leq \ldots \leq r_۱ \leq ۱$. اگر برای هر i، $۱ \leq i \leq m-۱$، عدد $۰ \leq \gamma_i < r_{m-۱}$ وجود داشته باشد به طوری که $[y_m, y_i]^{۲^{\gamma_i}}$ با y_i و y_m جا به جا شود، آن‌گاه $y_m^{۲^\alpha} \in Z(K)$ جایی‌که $\alpha = r_{m-۱}$.

اثبات: از آنجا که $\frac{K}{Z(K)} = \langle y_۱ Z(K), \cdots, y_m Z(K)\rangle$، پس $K = \langle y_۱, \cdots, y_m\rangle Z(K)$.
کافی است ثابت کنیم $y_m^{۲^\alpha}$ با مولدهای K جابه جا می‌شود. بنابر خاصیت $Z(K)$، $y_m^{۲^\alpha}$ با عناصر $Z(K)$ جابه جا می‌شود. کافی است ثابت کنیم $y_m^{۲^\alpha}$ با y_i برای $۱ \leq i \leq m-۱$ جابه جا می‌شود.

فرض کنید $۱ \leq i \leq m-۱$.. بنابر فرض عددی مانند γ_i که $۰ \leq \gamma_i < r_{m-۱}$ وجود دارد که

$$[y_m, y_i]^{۲^{\gamma_i}} \in Z(\langle y_i, y_m\rangle)$$

لذا

$$\left[[y_m, y_i]^{۲^{\gamma_i}}, y_i\right] = ۱$$

از آنجا که K از رده پوچ توانی ۳ است پس $\gamma_۴(K) = ۱$. بدین ترتیب گزارهٔ ۱.۲ پ تبدیل به

تساوی می‌شود.

$$\begin{aligned} ۱ &= \left[[y_m, y_i]^{۲^{\gamma_i}}, y_i\right] \\ &= [y_m, y_i, y_i]^{۲^{\gamma_i}} \left[[y_m, y_i], y_i, [y_m, y_i]\right]^{۲^{\gamma_i - ۱}(۲^{\gamma_i} - ۱)} && \text{(طبق گزاره (۴.۱. پ))} \\ &= [y_m, y_i, y_i]^{۲^{\gamma_i}} \left[y_m, y_i, y_i, [y_m, y_i]\right]^{۲^{\gamma_i - ۱}(۲^{\gamma_i} - ۱)} \\ &= [y_m, y_i, y_i]^{۲^{\gamma_i}}.۱ && \text{طبق تذکر (۱۰.۱)} \end{aligned}$$

بنابراین

$$۱ = \left[[y_m, y_i]^{۲^{\gamma_i}}, y_i\right] = [y_m, y_i, y_i]^{۲^{\gamma_i}}$$

به طور مشابه

$$۱ = \left[[y_m, y_i]^{۲^{\gamma_i}}, y_m\right] = [y_m, y_i, y_m]^{۲^{\gamma_i}}$$

طبق فرض داریم $\alpha = r_{m-۱} \gneq \gamma_i$، پس $\gamma_i \leq \alpha - ۱$. بدین ترتیب عددی مانند β هست به طوری که $\alpha - ۱ = \gamma_i + \beta$. داریم:

$$[y_m, y_i, y_i]^{۲^{\alpha - ۱}} = [y_m, y_i, y_i]^{۲^{\gamma_i + \beta}} = \left([y_m, y_i, y_i]^{۲^{\gamma_i}}\right)^{۲^{\beta}} = ۱ \tag{۱}$$

به طور مشابه

$$[y_m, y_i, y_m]^{۲^{\alpha - ۱}} = ۱ \tag{۲}$$

از طرفی طبق فرض داریم $y_i^{۲^{r_i}} \in Z(K)$. فرض کنید $r_{m-۱} - r_i = t \geq ۰$. در این صورت داریم:

$$\left(y_i^{۲^{r_i}}\right)^{۲^t} \in Z(K)$$

لذا

$$y_i^{۲^{r_i+t}} = \left(y_i^{۲^\alpha}\right) \in Z(K)$$

بنابراین

$$[y_m, y_i^{۲^\alpha}] = ۱$$

لذا

$$\begin{aligned} ۱ = [y_m, y_i^{۲^\alpha}] &= [y_m, y_i]^{۲^\alpha}[y_m, y_i, y_i]^{۲^{\alpha-۱}(۲^\alpha-۱)} \\ &= [y_m, y_i]^{۲^\alpha}.۱ \qquad \text{(طبق (۱))} \\ &\Longrightarrow [y_m, y_i]^{۲^\alpha} = ۱ \qquad (۳) \end{aligned}$$

بنابراین $[y_m, y_i]^{۲^\alpha} = ۱$ برای $۱ \leq i \leq m-۱$. از طرفی بنابر (۲.۱.پ)

$$\begin{aligned} [y_m^{۲^\alpha}, y_i] &= [y_m, y_i]^{۲^\alpha}[y_m, y_i, y_m]^{۲^{\alpha-۱}(۲^\alpha-۱)} \\ &= [y_m, y_i]^{۲^\alpha}.۱ \qquad \text{(طبق (۲))} \\ &= ۱ \qquad \text{(طبق (۳))} \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq m-۱$، $y_m^{۲^\alpha}$ با y_i جابه جا می‌شود. ■

قضیه ۱۲.۱. فرض کنید G یک گروه از رده پوچتوانی ۲ باشد که توسط مجموعه کمین $\{x_۱, \ldots, x_m\}$ تولید شود جایی که $o(x_i) = ۲^{r_i}$ و $r_۱ \leq r_۲ \leq \cdots \leq r_m$. اگر $m > ۱$ و $r_m = r_{m-۱} + ۱$ و G قابل باشد، آن‌گاه $i \in \{۱, \ldots, m-۱\}$ وجود دارد به طوری که

$$o([x_m, x_i]) = ۲^{r_{m-۱}}$$

اثبات: فرض کنید $\alpha = r_{m-1}$. فرض کنید K یک گروه باشد به طوری که $G \cong \frac{K}{Z(K)}$ و $\phi : G \longrightarrow \frac{K}{Z(K)}$ یکریختی باشد. فرض کنید y_1 ، ...، y_m عناصری از K باشند به طوری که

$$\phi(x_i) = y_i Z(K)$$

از آنجا که G از ردهٔ ۲ است پس $\gamma_4(G) = 1$. بنابراین گزارهٔ (۴.۱ پ) تبدیل به تساوی می‌شود

$$\begin{aligned} 1 = [x_m, 1] = [x_m, x_i^{2^{r_i}}] &= [x_m, x_i]^{2^{r_i}} [x_m, x_i, x_i]^{\binom{2^{r_i}}{2}} && \text{(طبق ۴.۱ پ)} \\ &= [x_m, x_i]^{2^{r_i}} . 1 && \text{(طبق ۱۰.۱)} \\ &= [x_m, x_i]^{2^{r_i}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$o([x_m, x_i]) | 2^{r_i}$$

اگر $2^\alpha \gneqq 2^{\gamma_i} = o[x_m, x_i]$ برای هر $1 \leq i \leq m$، از آنجا که $G \cong \frac{K}{Z(K)}$ داریم:

$$1 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_m \quad , \quad y_i^{2^{r_i}} \in Z(K) \quad , \quad [y_m, y_i]^{2^{\gamma_i}} \in Z(K)$$

بنابراین طبق لم (۱۱.۱)، $y_m^{2^\alpha} \in Z(K)$، پس $x_m^{2^\alpha} = 1$. اما $o(x_m) = 2^{r_m}$ و لذا $2^{r_m} \leq 2^\alpha = 2^{r_{m-1}}$. بنابراین $r_m \leq r_{m-1}$ که تناقض با فرض قضیه است.

بنابراین حداقل یک $1 \leq i \leq m$ هست به طوری که $o([x_m, x_i]) = 2^\alpha$ و از آنجا که $[x_m, x_m] = 1$ پس $i < m$. بنابراین $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ وجود دارد به طوری که $o([x_m, x_i]) = 2^{r_{m-1}}$. ■

۱–۲ طبقه‌بندی ۲–گروه های ۲–مولده متناهی از رده پوچ توانی ۲

قضیه ۱.۱۳. [۹] فرض کنید G یک ۲–گروه ۲–مولده متناهی از رده پوچتوانی ۲ باشد. در این صورت G دقیقاً با یکی از گروههای زیر یکریخت است:

$$(i) \quad G \cong \langle a, b | a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = [a, b]^{2^\gamma} = [a, b, a] = [a, b, b] = e \rangle$$

جایی که γ, β, α اعداد صحیح مثبت هستند و $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

$$(ii) \quad G \cong \langle a, b | a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = [a, b, a] = [a, b, b] = e, a^{2^{\alpha+\sigma-\gamma}} = [a, b]^{2^\sigma} \rangle$$

جایی که $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ اعداد صحیح هستند که $\beta \geq \gamma > \sigma \geq 0$ و $\alpha + \sigma \geq 2\gamma$ و $\alpha + \beta + \sigma > 3$

$$(iii) \quad G \cong \langle a, b | a^{2^{\gamma+1}} = b^{2^{\gamma+1}} = [a, b]^{2^\gamma} = [a, b, a] = [a, b, b] = e, a^{2^\gamma} = b^{2^\gamma} = [a, b]^{2^{\gamma-1}} \rangle$$

جایی که γ یک عدد صحیح مثبت است.

تذکر ۱.۱۴. اگر G گروهی از رده پوچ توانی ۲ باشد و $x, y \in G$، آن‌گاه

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = xyx^{-1}y^{-1}$$

اثبات: از آنجا که G از رده ۲ است پس $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی و بنابراین $G' \leq Z(G)$. پس $[x, y]$ با

هر عنصر G جابجا می‌شود. داریم:

$$\begin{aligned} x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}xy(yy^{-1}) &= y(x^{-1}y^{-1}xy)y^{-1} \qquad (G' \leq Z(G) \text{ زیرا}) \\ &= yx^{-1}y^{-1}x \\ &= [y^{-1}, x] \\ &= [y^{-1}, x]x.x^{-1} \\ &= x[y^{-1}, x]x^{-1} \\ &= xyx^{-1}y^{-1}xx^{-1} \\ &= xyx^{-1}y^{-1}. \end{aligned}$$

تذکر ۱.۱۵. گروه از نوع (۱.۱۳ (i)) را نوع هم حاصلضرب، گروه از نوع (۱.۱۳ (ii)) را نوع عمومی و گروه از نوع (۱.۱۳ (iii)) را نوع خاص می‌نامیم.

۱—۳ گروههای خاص

قضیه ۱.۱۶. اگر G از نوع خاص باشد، (۱.۱۳ (iii))، آن‌گاه G قابل نیست.

اثبات: برهان خلف: فرض کنید G قابل باشد. فرض کنید K گروهی باشد که $G \cong \frac{K}{Z(K)}$ و $\phi : G \longrightarrow \frac{K}{Z(K)}$ یکریختی باشد. فرض کنید $x, y \in K$ به طوری که $\phi(a) = xZ(K)$ و $\phi(b) = yZ(K)$. از آنجا که $a^{2^{\gamma}} = b^{2^{\gamma}}$ داریم $x^{2^{\gamma}}Z(K) = y^{2^{\gamma}}Z(K)$ و

لذا

$$y^{-۲^\gamma}x^{۲^\gamma} \in Z(K) \tag{۴}$$

داریم:

$$\begin{aligned} x^{۲^\gamma} &= \left(y^{۲^\gamma}y^{-۲^\gamma}\right)x^{۲^\gamma} \\ &= y^{۲^\gamma}\left(y^{-۲^\gamma}x^{۲^\gamma}\right) \\ &= \left(y^{-۲^\gamma}x^{۲^\gamma}\right)y^{۲^\gamma} \quad (\text{طبق ۴}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$x^{۲^\gamma}y^{-۲^\gamma} = y^{-۲^\gamma}x^{۲^\gamma} \tag{۵}$$

لذا

$$x^{۲^\gamma}y^{-۲^\gamma} \in Z(K) \tag{٦}$$

طرفین رابطهٔ (۵) را در $y^{۲^\gamma+۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} yx^{۲^\gamma} = y^{۲^\gamma+۱}(y^{-۲^\gamma}x^{۲^\gamma}) = y^{۲^\gamma+۱}x^{۲^\gamma}y^{-۲^\gamma} &= \left(x^{۲^\gamma}y^{-۲^\gamma}\right)y^{۲^\gamma+۱} \\ &= x^{۲^\gamma}y \end{aligned}$$

بنابراین

$$yx^{۲^\gamma} = x^{۲^\gamma}y$$

پس $x^{۲^\gamma}$ با y جابجا می‌شود و از آن جا که $x^{۲^\gamma}$ با x نیز جابجا می‌شود و $\frac{K}{Z(K)} = \langle xZ(K), yZ(K)\rangle$ پس $K = \langle x, y, Z(K)\rangle$ و لذا $x^{۲^\gamma}$ با مولدهای K جابجا

می‌شود. پس $x^{۲^\gamma} \in Z(K)$ و لذا $x^{۲^\gamma}Z(K) = Z(K)$ و از یکریختی G با $\frac{K}{Z(K)}$ نتیجه می‌شود $a^{۲^\gamma} = e$. اما $o(a) = ۲^{\gamma+۱}$. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است. ■

۱—۴ گروه های هم حاصل ضرب

برای بررسی قابل بودن گروه های هم حاصل ضرب به تعریف حاصل ضرب ۳—پوچ توانی گروه های دوری و چند قضیه در این باره می پردازیم.

تعریف ۱.۱۷. ([۱۲] و [۱۳]) فرض کنید $A_۱$، ... ، A_t گروه های دوری باشند. حاصل ضرب ۳—پوچتوانی از A_iها که با $A_۱ \coprod^{\Re_۳} \cdots \coprod^{\Re_۳} A_t$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از $\frac{F}{\gamma_۴(F)}$، جایی که $F = A_۱ * \cdots * A_t$ حاصل ضرب آزاد A_iها است.

قضیه ۱.۱۸. ([۱۲]). فرض کنید $\langle a\rangle$ و $\langle b\rangle$ گروههای دوری به ترتیب از مرتبه ۲^α و ۲^β باشند جایی که $\alpha \geq \beta \geq ۱$. فرض کنید $G = \langle a\rangle \coprod^{\Re_۳} \langle b\rangle$. در این صورت هر عنصر G به‌طور یکتا به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$a^r b^s [a,b]^t [a^۲,b]^u [a,b^۲]^v \qquad (۷)$$

که در آن r به پیمانهٔ ۲^α، s به پیمانهٔ ۲^β، t به پیمانهٔ $۲^{\beta+۱}$، v به پیمانه $۲^{\beta-۱}$ و اگر $\alpha \neq \beta$، u به پیمانه ۲^β و اگر $\alpha = \beta$، u به پیمانه $۲^{\beta-۱}$ یکتا هستند و جابه جاگرها نیز از مرتبه متناظرند.

قضیه ۱.۱۹. ([۱۱] قضیه های ۱.۵ و ۲.۵) فرض کنید G همچون در قضیه (۱.۱۸) باشد. مرکز G توسط $a^{۲^{\beta+۱}}$ و $[a,b]^۲[a^۲,b]^{-۱}$ و $[a,b]^۲[a,b^۲]^{-۱}$ تولید می‌شود و

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \langle x,y | x^{۲^{\min\{\alpha,\beta+۱\}}} = y^{۲^\beta} = [x,y]^{۲^\beta} = [x,y,x] = [x,y,y] = e\rangle$$

قضیه ۲۰.۱. فرض کنید $\langle a\rangle$ و $\langle b\rangle$ گروه های دوری به ترتیب از مرتبه ۲^{α} و ۲^{β} باشند، جایی که $۱ \geq \beta \geq \alpha$ و $G = \langle a\rangle \coprod^{\mathfrak{N}_۲} \langle b\rangle$. اگر γ یک عدد صحیح باشد که $۱ \leq \gamma \leq \beta$ و M زیرگروه مرکزی از G باشد که توسط $[a,b,a]^{۲^{\gamma}}$ و $[a,b,b]^{۲^{\gamma}}$ تولید شود، آن‌گاه هر عنصر $K = \frac{G}{M}$ به طور یکتا به صورت $k = a^r b^s [a,b]^t [a,b,a]^u [a,b,b]^v$ نوشته می‌شود (بجای aM می‌نویسیم a و الی آخر)، جایی که r به پیمانه ۲^{α} و t, s به پیمانه ۲^{β} و v, u به پیمانه ۲^{γ} یکتا هستند.

اثبات: فرض کنید $g \in G$. بنابر رابطهٔ (۷) داریم:

$$g = a^r b^s [a,b]^{t_۱} [a^{۲}, b]^u [a, b^{۲}]^v$$

که در آن $t_۱, v, u, s, r$ در شرایط قضیهٔ (۱۸.۱) صدق می‌کنند. از طرفی

$$[a^{۲}, b] = [a,b]^{۲} [a,b,a]$$

و

$$[a, b^{۲}] = [a,b]^{۲} [a,b,b]$$

و از آنجا که G از ردهٔ ۳ است داریم:

$$۱ = [a,b,b,[a,b]] = [[a,b,b],[a,b]]$$

بنابراین $[a,b]$ با $[a,b,b]$ جابجا می‌شود. به همین ترتیب $[a,b]$ با $[a,b,a]$ نیز جابجا می‌شود. داریم

$$\begin{aligned} g &= a^r b^s [a,b]^{t_۱} \left([a,b]^{۲u} [a,b,a]^u\right) \left([a,b]^{۲v} [a,b,b]^v\right) \\ &= a^r b^s [a,b]^{t_۱ + ۲u + ۲u} [a,b,a]^u [a,b,b]^v \end{aligned}$$

با قرار دادن $t = t_۱ + ۲u + ۲v$ داریم:

$$g = a^r b^s [a,b]^t [a,b,a]^u [a,b,b]^v \qquad (۸)$$

که بنابر شرایط قضیه (۱۸.۱) r و s به ترتیب به پیمانه ۲^α و ۲^β یکتا هستند. طبق قضیه (۱۸.۱) داریم

$$o([a,b^۲]) = ۲^{\beta-۱}$$

و

$$۱ = ([a,b^۲])^{۲^{\beta-۱}} = ([a,b]^۲[a,b,b])^{۲^{\beta-۱}} = [a,b]^{۲^\beta}[a,b,b]^{۲^{\beta-۱}}$$

بنابراین

$$[a,b,b]^{۲^{\beta-۱}} = ([a,b]^{۲^\beta})^{-۱}$$

طبق قضیهٔ (۱۸.۱) داریم:

$$o([a,b]) = ۲^{\beta+۱}$$

بنابراین

$$[a,b]^{۲^\beta}.[a,b]^{۲^\beta} = [a,b]^{۲.۲^\beta} = [a,b]^{۲^{\beta+۱}} = ۱$$

لذا

$$([a,b])^{۲^\beta})^{-۱} = [a,b]^{۲^\beta}$$

پس داریم:

$$[a,b,b]^{۲^{\beta-۱}}=[a,b]^{۲^{\beta}}$$

از طرفی چون $[a,b,a]^{۲^{\gamma}}\in M$ و $[a,b,b]^{۲^{\gamma}}\in M$، بدیهی است که u و v نیز به پیمانه ۲^{γ} یکتا هستند. حال داریم $[a,b,b]^{۲^{\beta-۱}}\in M$ زیرا $\gamma<\beta$. پس $\gamma\leq\beta-۱$ و بنابراین عدد $m\geq ۰$ هست که $\beta-۱=\gamma+m$. پس

$$[a,b,b]^{۲^{\beta-۱}}=[a,b,b]^{۲^{\gamma+m}}=([a,b,b]^{۲^{\gamma}})^{۲^{m}}\in M$$

پس $[a,b]^{۲^{\beta}}\in M$ و از آنجا که توان کوچکتر از ۲^{β} در M نیست پس t نیز به پیمانه ۲^{β} یکتاست. ■

نتیجه ۲۱.۱. فرض کنید K همچون در قضیهٔ (۲۰.۱) باشد. در این صورت $Z(K)$ توسط $a^{۲^{\beta}}$ و $[a,b]^{۲^{\gamma}}$ و $[a,b,a]$ و $[a,b,b]$ تولید می‌شود. بنابراین

$$\frac{K}{Z(K)}\cong\langle x,y|x^{۲^{\beta}}=y^{۲^{\beta}}=[x,y]^{۲^{\gamma}}=[x,y,x]=[x,y,y]=e\rangle$$

اثبات: در قضیهٔ (۲۰.۱) گفتیم که

$$K=\langle a,b,[a,b].[a,b,a],[a,b,b]\rangle$$

جایی که

$$o(a)=۲^{\alpha},o(b)=o([a,b])=۲^{\beta},o([a,b,a])=o([a,b,b])=۲^{\gamma} \qquad (۹)$$

ابتدا $Z(K)$ را بررسی می‌کنیم. اگر a^{r} عضو $Z(K)$ باشد، آن‌گاه

$$۱=[a^{r},b]=[a,b]^{r}[a,b,a]^{\binom{r}{۲}}$$

از آنجا که $[a,b]$ و $[a,b,a]$ مولد هستند، داریم $[a,b]^r=۱$ و نیز از آنجا که

$$[a,b,a]^{\binom{r}{۲}}=[a,b,a]^{\frac{r(r-۱)}{۲}}$$

طبق (۹) داریم $۲^\beta|r$. بنابراین کمترین توانی که r می‌تواند اختیار کند ۲^β می‌باشد و نیز از آن جا که $\gamma\leq\beta-۱$ با اختیار $r=۲^\beta$ داریم

$$[a,b,a]^{\binom{۲^\beta}{۲}}=۱$$

پس $a^{۲^\beta}$ با b جابه جا می‌شود. حال جابه جایی $a^{۲^\beta}$ را با بقیه مولدها بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\left[[a,b],a^{۲^\beta}\right] &= [a,b,a]^{۲^\beta}[a,b,a,[a,b]]\\ &= [a,b,a]^{۲^\beta}.۱ \qquad (\text{زیرا } G \text{ از رده‌۳ است })\\ &= ۱ \qquad\qquad (\text{زیرا } \gamma\leq\beta-۱),\end{aligned}$$

و

$$\left[[a,b,a],a^{۲^\beta}\right]=[a,b,a,a]^{۲^\beta}=۱ \qquad (\text{زیرا } G \text{ از رده‌۳ است })$$

به طور مشابه $a^{۲^\beta}$ با $[a,b,b]$ نیز جابه جا می‌شود.

پس داریم:

$$a^r\in Z(K)\Longleftrightarrow ۲^\beta|r$$

به روش مشابه اگر b^s در $Z(K)$ باشد، آن‌گاه $۲^\beta|s$ و از آن جا که $o(b)=۲^\beta$ داریم

$$b^s\in Z(K)\Longleftrightarrow b^s=۱$$

اگر $[a,b]^t \in Z(K)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} ۱ = \Big[[a,b]^t, a\Big] &= [a,b,a]^t[a,b,a,[a,b]] \\ &= [a,b,a]^t \qquad (\text{زیرا} G \text{ از رده ۳ است }) \end{aligned}$$

بنابراین طبق (۹)

$$۲^\gamma | t$$

با اختیار $t = ۲^\gamma$ مشاهده می‌کنیم که $[a,b]^t$ با b نیز جابجا می‌شود

$$\Big[[a,b]^{۲^\gamma}, b\Big] = [a,b,b]^{۲^\gamma}[a,b,b,[a,b]] = ۱ \qquad (\text{طبق } (۹))$$

به طور مشابه $[a,b]^{۲^\gamma}$ با $[a,b]$ و $[a,b,a]$ و $[a,b,b]$ نیز جابه جا می‌شود. بنابراین:

$$[a,b]^t \in Z(K) \Longleftrightarrow ۲^\gamma | t$$

از آن جا G از رده ۳ می باشد داریم:

$$\begin{aligned} \Big[[a,b,a], a\Big] &= [a,b,a,a] = ۱, \\ \Big[[a,b,a], b\Big] &= [a,b,a,b] = ۱, \\ \Big[[a,b,a], [a,b]\Big] &= [a,b,a,[a,b]] = ۱, \\ \Big[[a,b,a], [a,b,b]\Big] &= [a,b,a,[a,b,b]] = ۱. \end{aligned}$$

بنابراین $[a,b,a] \in Z(K)$. به طور مشابه $[a,b,b] \in Z(K)$.

لذا

$$Z(K) = \langle a^{۲^\beta}, [a,b]^{۲^\gamma}, [a,b,a], [a,b,b] \rangle \qquad (۱۰)$$