دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

بررسی رنگ آمیزی بی دور گراف ها

نگارش:
شهرزاد دانش پژوه

استاد راهنما:
دکتر فاطمه سادات موسوی

اسفند ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از خانواده مهربانم به ویژه پدر و مادر عزیز و همسر مهربانم که با لطف بی‌دریغ و حمایت‌های بیشائبه‌شان مرا یاری نمودند سپاس‌گزاری کنم.

هم‌چنین لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، سرکار خانم دکتر فاطمه سادات موسوی، که قطعاً بدون کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

در خاتمه از جناب آقای دکتر ذاکر و آقای دکتر نجفیان که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود این رساله شدند، کمال امتنان را دارم.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها سه

فهرست جدول‌ها هفت

پیش‌گفتار نه

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱
۱.۱ مفاهیم اولیه ۱
۲.۱ رنگ‌آمیزی بی‌دور گراف‌ها ۳

۲ عدد رنگی بی‌دور ۵
۱.۲ کران‌های پایین برای $\chi_a(G)$ ۵
۲.۲ گراف‌های رنگ‌پذیر بی‌دور ماکزیمال ۹
۳.۲ ارتباط $\chi_a(G)$ با پارامترهای $\delta(G)$ و $\chi(G)$ ۱۱

۳ رنگ‌آمیزی بی‌دور حاصل‌ضرب گراف‌ها ۱۳
۱.۳ شبکه‌ها ۱۴
۲.۳ حاصل‌ضرب درخت‌ها ۱۶
۳.۳ $P_m\Box C_n$ ۲۰
۱.۳.۳ رنگ‌آمیزی تطابقی ۲۰
۲.۳.۳ $P_m\Box C_n$ $(n \neq ۴)$ ۲۳
۳.۳.۳ $P_m\Box C_۴$ ۲۹
۴.۳ $P_۲\Box C_m$ ۳۰
۱.۴.۳ $P_۲\Box C_m$ $(m = ۲k + ۱)$ ۳۰
۲.۴.۳ $P_۲\Box C_m$ $(m \neq ۴, m = ۲k)$ ۳۰
۳.۴.۳ $P_۲\Box C_۴$ ۳۲
۵.۳ $C_m\Box C_n$ ۳۳

۱.۵.۳ $C_m\Box C_n$ $(m \neq ۳, n \neq ۳)$ ۳۳
۲.۵.۳ $C_۳\Box C_۳$ ۳۶

۴ رنگ‌آمیزی بی‌دور گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۳، ۴، ۵، ۶ و بزرگتر از ۷ ۳۹
۱.۴ گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۳ ۴۱
۲.۴ گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۴ ۴۵
۳.۴ گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۵ ۵۶
۱.۳.۴ نتیجه‌ی اخیر ۸۱
۴.۴ گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۶ ۸۲
۱.۴.۴ نتیجه‌ی اخیر ۸۳
۵.۴ گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی Δ ۸۳

۵ نتایج دیگر از عدد رنگی بی‌دور گراف‌ها ۸۸
۱.۵ مشتق گراف ۸۸
۲.۵ گراف‌های همینگ ۸۹
۱.۲.۵ کران‌های اصلی ۹۰
۳.۵ هم‌گراف‌ها ۹۱
۴.۵ $M(K_{۱,n})$ ۹۳
۵.۵ $T(K_{۱,n})$ ۹۴
۶.۵ گراف‌های مرکزی ۹۵
۱.۶.۵ $C(D_۳^m)$ ۹۵
۲.۶.۵ $C(S_n)$ ۹۶
۳.۶.۵ $C(K_{۱,n})$ ۹۶
۷.۵ گراف کرن ۹۷
۸.۵ گراف‌های یکتا رنگ‌پذیر ۹۸

پیوست (الف) ۹۹

مراجع ۱۲۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۳۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۳۳

فهرست شکل‌ها

۱.۱ یک رنگ‌آمیزی بی‌دور از گراف ۴

۱.۳ مسیر پلکانی نقاط ۱۵
۲.۳ چهار سطر آخر ماتریس رنگی $P_m\Box C_۴$ ۲۷
۳.۳ $P_۲\Box C_m$ $(m = ۲k + ۱)$ ۳۱
۴.۳ $P_۲\Box C_m$ $(m \neq ۴, m = ۲k)$ ۳۱
۵.۳ تمام ۳- رنگ‌آمیزی‌های متمایز از $P_۲\Box C_۴$ صرفنظر از یکریختی ۳۲
۶.۳ یک ۴- رنگ‌آمیزی بی‌دور از $P_۲\Box C_۴$ ۳۳

۱.۴ نمایش رأس آزاد و یکتا ۴۰
۲.۴ حالت ۱ ۰ ۱ در اثبات لم (۲.۱.۴) ۴۲
۳.۴ حالت ۱ ۰ ۲ در اثبات لم (۲.۱.۴) ۴۳
۴.۴ حالت ۲ ۰ ۱ در اثبات لم (۲.۱.۴) ۴۳
۵.۴ حالت ۲ ۰ ۲ در اثبات لم (۲.۱.۴) ۴۴
۶.۴ حالت ۲ ۰ ۳ در اثبات لم (۲.۱.۴) ۴۵
۷.۴ حالت ۱ در اثبات لم ۲.۲.۴ ۴۶
۸.۴ حالت ۲ در اثبات لم ۲.۲.۴ ۴۷
۹.۴ حالت ۱ در اثبات لم ۳.۲.۴ ۴۸
۱۰.۴ حالت ۲ در اثبات لم ۳.۲.۴ ۴۸
۱۱.۴ حالت ۳ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۲.۴ ۴۹
۱۲.۴ حالت ۳ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۲.۴ ۵۰
۱۳.۴ حالت ۱ در اثبات لم ۴.۲.۴ ۵۰
۱۴.۴ حالت ۲ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۲.۴ ۵۱
۱۵.۴ حالت ۲ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۲.۴ ۵۲
۱۶.۴ حالت ۳ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۲.۴ ۵۳
۱۷.۴ حالت ۳ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۲.۴ ۵۳

۱۸.۴ حالت ۴ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۲.۴ . . . . ۵۴
۱۹.۴ حالت ۴ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۲.۴ . . . . ۵۵
۲۰.۴ حالت ۵ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۲.۴ . . . . ۵۵
۲۱.۴ حالت ۵ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۲.۴ . . . . ۵۶
۲۲.۴ حالت ۱ در اثبات لم ۲.۳.۴ . . . . ۵۸
۲۳.۴ حالت ۲ در اثبات لم ۲.۳.۴ . . . . ۵۸
۲۴.۴ حالت ۳ ۰ ۱ در اثبات لم ۲.۳.۴ . . . . ۵۹
۲۵.۴ حالت ۳ ۰ ۲ در اثبات لم ۲.۳.۴ . . . . ۵۹
۲۶.۴ حالت ۳ ۰ ۳ در اثبات لم ۲.۳.۴ . . . . ۶۰
۲۷.۴ حالت ۱ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۰
۲۸.۴ حالت ۲ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۱
۲۹.۴ حالت ۳ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۲
۳۰.۴ حالت ۳ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۲
۳۱.۴ حالت ۴ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۳
۳۲.۴ حالت ۴ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۴
۳۳.۴ حالت ۵ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۵
۳۴.۴ حالت ۵ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۳.۴ . . . . ۶۵
۳۵.۴ حالت ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۶۶
۳۶.۴ حالت ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۶۶
۳۷.۴ حالت ۳ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۶۷
۳۸.۴ حالت ۳ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۶۸
۳۹.۴ حالت ۴ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۶۸
۴۰.۴ حالت ۴ ۰ ۲ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۶۹
۴۱.۴ حالت ۴ ۰ ۲ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۰
۴۲.۴ حالت ۴ ۰ ۲ ۰ ۳ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۱
۴۳.۴ حالت ۴ ۰ ۲ ۰ ۴ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۱
۴۴.۴ حالت ۴ ۰ ۲ ۰ ۵ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۲
۴۵.۴ حالت ۵ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۳
۴۶.۴ حالت ۵ ۰ ۲ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۴
۴۷.۴ حالت ۶ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۵
۴۸.۴ حالت ۶ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۶
۴۹.۴ حالت ۶ ۰ ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ . . . . ۷۶

۵۰.۴ حالت ۶ ۰ ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۷۷
۵۱.۴ حالت ۶ ۰ ۳ ۰ ۲ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۷۸
۵۲.۴ حالت ۶ ۰ ۳ ۰ ۲ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۷۹
۵۳.۴ حالت ۶ ۰ ۳ ۰ ۲ ۰ ۳ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۷۹
۵۴.۴ حالت ۷ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۸۰
۵۵.۴ حالت ۷ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۸۱
۵۶.۴ حالت ۷ ۰ ۲ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۸۱
۵۷.۴ حالت ۷ ۰ ۲ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۳.۴ ۸۲

۱.۵ $\bigoplus_{i=۱}^{۳} G_i = G_۱ \bigoplus G_۲ \bigoplus G_۳$ ۹۲
۲.۵ $M(K_{۱,n})$ ۹۴
۳.۵ $T(K_{۱,n})$ ۹۵
۴.۵ $C(D_۳^۴)$ ۹۶
۵.۵ $C(S_۵)$ ۹۶
۶.۵ $C(K_{۱,۴})$ ۹۷
۷.۵ $C(S_n^\circ)$ ۹۷
۸ حالت ۱ در اثبات لم ۲.۴.۴ ۹۹
۹ حالت ۲ در اثبات لم ۲.۴.۴ ۱۰۰
۱۰ حالت ۳ در اثبات لم ۲.۴.۴ ۱۰۰
۱۱ حالت ۱ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۱
۱۲ حالت ۲ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۲
۱۳ حالت ۳ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۲
۱۴ حالت ۴ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۳
۱۵ حالت ۴ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۳
۱۶ حالت ۵ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۴
۱۷ حالت ۱ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۴
۱۸ حالت ۲ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۵
۱۹ حالت ۳ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۶
۲۰ حالت ۴ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۶
۲۱ حالت ۴ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۷
۲۲ حالت ۵ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۸
۲۳ حالت ۵ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۸
۲۴ حالت ۶ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۴.۴ ۱۰۹

۲۵ حالت ۶ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۴.۴ . . . . ۱۰۹
۲۶ حالت ۶ ۰ ۳ در اثبات لم ۳.۴.۴ . . . . ۱۱۰
۲۷ حالت ۷ ۰ ۱ در اثبات لم ۳.۴.۴ . . . . ۱۱۱
۲۸ حالت ۷ ۰ ۲ در اثبات لم ۳.۴.۴ . . . . ۱۱۲
۲۹ حالت ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۲
۳۰ حالت ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۳
۳۱ حالت ۳ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۳
۳۲ حالت ۴ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۴
۳۳ حالت ۴ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۵
۳۴ حالت ۵ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۶
۳۵ حالت ۵ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۶
۳۶ حالت ۵ ۰ ۳ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۷
۳۷ حالت ۶ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۸
۳۸ حالت ۶ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۱۹
۳۹ حالت ۷ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۰
۴۰ حالت ۷ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۱
۴۱ حالت ۸ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۲
۴۲ حالت ۸ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۲
۴۳ حالت ۹ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۳
۴۴ حالت ۹ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۴
۴۵ حالت ۱۰ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۵
۴۶ حالت ۱۰ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۶
۴۷ حالت ۱۱ ۰ ۱ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۶
۴۸ حالت ۱۱ ۰ ۲ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۷
۴۹ حالت ۱۱ ۰ ۳ در اثبات لم ۴.۴.۴ . . . . ۱۲۸

فهرست جدول‌ها

۱.۳ مقایسه‌ی مقادیر واقعی $\chi_a(Q_d)$ با کران‌های به‌دست آمده در قضیه‌ی (۳.۱.۳) ۱۷
۲.۳ چهار حالت ممکن ۲۱
۳.۳ موقعیت رأس استاندارد ۲۳
۴.۳ $m = ۵, n = ۹$ ۲۵
۵.۳ رنگ‌آمیزی سطر و ستون اول ماتریس رنگی $P_m\Box C_n$ که (به‌پیمانه‌ی ۳) ۱ $n \equiv$ . . . ۲۵
۶.۳ رنگ‌آمیزی تطابقی $P_m\Box C_n$ که (به‌پیمانه‌ی ۳) ۱ $n \equiv$ ۲۶
۷.۳ نمایش موقعیت‌های استاندارد با x در رنگ‌آمیزی تطابقی $P_m\Box C_n$ که (به‌پیمانه‌ی $n \equiv$ ۳) ۱ . . . . ۲۶
۸.۳ $m = ۵, n = ۱۰$ ۲۷
۹.۳ دورهای ۲- رنگی در شکل ۲.۳ . . . . ۲۸
۱۰.۳ رنگ‌آمیزی سطر و ستون اول ماتریس رنگی $P_m\Box C_n$(به‌پیمانه‌ی ۳) ۲ $n \equiv$ ۲۸
۱۱.۳ رنگ‌آمیزی تطابقی $P_m\Box C_n$ (به پیمانه‌ی ۳) ۲ $n \equiv$ ۲۸
۱۲.۳ نمایش موقعیت‌های استاندارد با x در رنگ‌آمیزی تطابقی $P_m\Box C_n$ (به پیمانه‌ی ۳) ۲ $n \equiv$ ۲۹
۱۳.۳ $m = ۵, n = ۸$ ۲۹
۱۴.۳ ماتریس‌های رنگی استاندارد $C_۳\Box C_۳$ ۳۷
۱۵.۳ دورهای ۲- رنگی در هر یک از حالت‌های جدول ۱۴.۳ . . . . ۳۷
۱۶.۳ مراحل ۵- رنگ‌آمیزی بی‌دور $C_۳\Box C_۳$ ۳۸

چکیده

یک k- **رنگ‌آمیزی بی‌دور** از گراف G، یک k- رنگ‌آمیزی مجاز از G است به‌طوری‌که هر زیرگراف القایی G روی دو کلاس رنگی دلخواه از G، یک جنگل است. **عدد رنگی بی‌دور** یک گراف G، که با $\chi_a(G)$ نمایش داده می‌شود، مینیمم kای است به‌طوری که G یک k- رنگ‌آمیزی بی‌دور داشته باشد. این پایان‌نامه، مروری بر پژوهش‌های انجام شده در رنگ‌آمیزی بی‌دور است. در ابتدا عدد رنگی بی‌دور گراف‌هایی از جمله گراف‌های حاصل‌ضربی شامل شبکه‌ها، حاصل‌ضرب درخت‌ها، استوانه‌ها و چنبره‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. سپس رنگ‌آمیزی بی‌دور گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۳، ۴، ۵، ۶ و بزرگتر از ۷ را مورد بررسی قرار داده و در انتها خلاصه‌ای از نتایج دیگر به‌دست آمده در این راستا را خواهیم داشت.

واژه‌های کلیدی: *رنگ‌آمیزی بی‌دور، عدد رنگی بی‌دور، شبکه، استوانه، چنبره.*

پیش‌گفتار

مسئله‌ی رنگ‌آمیزی یکی از مسائل مهم در نظریه‌ی گراف است که در دو دهه‌ی اخیر بسیار به آن پرداخته شده است. یکی از انواع رنگ‌آمیزی گراف‌ها، رنگ‌آمیزی بی‌دور است که با توجه به کاربرد آن در شاخه‌ی کدگذاری و شبکه‌های مخابراتی مورد توجه قرار گرفته است. ابتدا یک تعریف جامع از رنگ‌آمیزی بی‌دور ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۰.۰. *یک k- **رنگ‌آمیزی بی‌دور** از گراف G، یک k- رنگ‌آمیزی مجاز از G است به‌طوری که هر زیرگراف القایی G روی دو کلاس رنگی دلخواه از G، شامل دور نباشد.* ***عدد رنگی بی‌دور*** *گراف G، که با $\chi_a(G)$ نمایش داده می‌شود، مینیمم kای است به‌طوری که G یک k- رنگ‌آمیزی بی‌دور داشته باشد.*

مفهوم رنگ‌آمیزی بی‌دور اولین بار به‌وسیله‌ی گرانبوم [۱] [۳] در سال ۱۹۷۳ بر روی گراف‌های مسطح معرفی شد. او حدس زد که هر گراف مسطح با استفاده ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی بی‌دور می‌شود [۳]. بعدها در سال ۱۹۷۹ این حدس به‌وسیله‌ی بورودین [۲] ثابت شد [۱۶]. هم‌چنین گرانبوم حدس زد که برای هر گراف G رابطه‌ی $\chi_a(G) \leq \Delta(G) + 1$ برقرار است و حدس خود را برای $\Delta = 3$ ثابت کرد [۳].

در این پایان‌نامه مطالعات انجام شده و مقالات به‌دست آمده درباره‌ی عدد رنگی بی‌دور گراف‌های نامسطح را جمع آوری و مورد بررسی قرار داده‌ایم و به‌صورت اجمالی برهان برخی از این نتایج را بیان می‌کنیم.

در فصل ۱ تلاش کرده‌ایم تمام تعاریف و قضیه‌های مورد نیاز در فصل‌های بعد را گردآوری و به‌صورت دقیق و جامع ارائه دهیم.

در فصل ۲ کران‌های به‌دست‌آمده برای عدد رنگی بی‌دور گراف‌ها را گردآوری کرده‌ایم. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که حدس گرانبوم برای گراف‌های رنگ‌پذیر بی‌دور ماکزیمال برقرار است.

[۱] $Grünbaum$
[۲] $Borodin$

در فصل ۳ رنگ‌آمیزی بی‌دور شبکه‌ها [۷]، حاصل‌ضرب درخت‌ها [۱۸]، استوانه‌ها و چنبره‌ها [۱۷] را بررسی کرده و نتایج به‌دست آمده مربوط به عدد رنگی بی‌دور آن‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

در فصل ۴ به‌صورت دقیق‌تر مقالات مرتبط با عدد رنگی بی‌دور گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۳ [۲۰]، ۴ [۱۲]، ۵ [۱۳]، ۶ [۱۴] و بزرگتر از ۷ [۲۱] را باز کرده و به شرح و تفصیل اثبات قضیه‌های مربوطه می‌پردازیم.

در فصل ۵ مروری بر دیگر کارهای انجام شده در زمینه‌ی رنگ‌آمیزی بی‌دور گراف‌ها از جمله مشتق یک گراف [۵]، گراف‌های همینگ [۱۹]، هم‌گراف‌ها [۱] و ... خواهیم داشت.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف پایه در خصوص گراف و به‌ویژه تعریف‌های مورد نیاز در فصل‌های بعد در خصوص رنگ‌آمیزی بی‌دور را ارائه می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این رساله منظور ما از یک گراف، گراف ساده است. مجموعه رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. درجه‌ی رأس دلخواه v در G را با $d_G(v)$، ماکزیمم و مینیمم درجه‌ی رأس‌های G را به‌ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم. P_m نمایشگر مسیری ساده بر روی m رأس است. مسیری که ابتدا و انتهای آن یکی باشد دور نامیده می‌شود و با نماد C_m نمایش داده می‌شود. یک گراف کامل گرافی است که در آن هر جفت از رأس‌ها یک یال را تشکیل می‌دهند. عدد خوشه‌ای گراف G، که با $\omega(G)$ نمایش داده می‌شود، بیشترین تعداد رأس‌های دوبه‌دو مجاور در G است.

یک زیرگراف از گراف G، یک گراف مانند H است به‌طوری‌که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و به‌صورت $H \subseteq G$ نمایش داده می‌شود. یک زیرگراف القایی H از G یک زیرگراف ماکزیمال از G با مجموعه‌ی رأسی $V(H)$ است.

تباهیدگی[۱] G به‌صورت

$$d(G) = max_{H\subseteq G}\delta(H)$$

تعریف می‌شود. گرافی با تباهیدگی حداکثر d را d- **تباهیده** [۲] می‌نامیم.

یک **افراز رأسی**[۳] از گراف G مجموعه‌ی $\{G_۱, G_۲, \ldots, G_k\}$ از زیرگراف‌های القایی G است، به‌طوری‌که $V(G) = \bigcup_{i=۱}^{k} V(G_i)$ و به‌ازای هر $۱ \leq i < j \leq k$، $V(G_i) \cap V(G_j) = \varnothing$. یک **افراز یالی**[۴] از G مجموعه‌ی $\{G_۱, G_۲, \ldots, G_k\}$ از زیرگراف‌های G است، به‌طوری‌که $E(G) = \bigcup_{i=۱}^{k} E(G_i)$ و به‌ازای هر $۱ \leq i < j \leq k$، $E(G_i) \cap E(G_j) = \varnothing$. **درختانه**[۵]، مینیمم kای است به‌طوری‌که G یک افراز رأسی $\{G_۱, G_۲, \ldots, G_k\}$ دارد که در آن هر G_i یک جنگل است و با نماد $a(G)$ نمایش داده می‌شود.

یک **برش رأسی** از گراف G زیرمجموعه‌ای از V مانند V' است به‌طوری‌که $G - V'$ ناهمبند باشد. یک برش رأسی با k عضو را یک k- برش رأسی می‌نامیم. **عدد همبندی** G، $\kappa(G)$ را کوچکترین kای تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که به ازای آن G یک k- برش رأسی داشته باشد.

گراف G **بازه‌ای** نامیده می‌شود اگر رأس‌های G بتوانند در تناظر با بازه‌های روی خط اصلی گذاشته شوند، به‌طوری‌که دو رأس باهم مجاورند هرگاه بازه‌های متناظر اشتراک ناتهی داشته باشند. یک **بازه بندی** از گراف $G(V, E)$ یک گراف بازه‌ای $G^+(V, E^+)$ است به‌طوری‌که $E \subseteq E^+$.

گراف G، یک **گراف وتری** است اگر شامل هیچ دور القایی بر روی چهار رأس یا بیشتر نباشد. یک **مثلث بندی** از گراف $G(V, E)$ یک گراف وتری $G^+(V, E^+)$ با مجموعه رأسی G است به‌طوری‌که $E \subseteq E^+$.

حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ که با $G_۱ \Box G_۲$ نمایش داده می‌شود، گراف $G(V, E)$ با مجموعه‌ی رأسی $V_۱ \times V_۲$ است که در آن دو رأس $(u_۱, u_۲)$ و $(v_۱, v_۲)$ باهم مجاور هستند اگر و تنها اگر $u_۱ = v_۱$ و $u_۲v_۲ \in E_۲$ یا $u_۲ = v_۲$ و $u_۱v_۱ \in E_۱$.

---

[۱] *degeneracy*

[۲] d-*degenerate*

[۳] *vertex partition*

[۴] *edge partition*

[۵] *arboricity*

حاصل‌ضرب دکارتی دو مسیر $P_m\square P_n$ یک **شبکه**، حاصل‌ضرب دکارتی یک مسیر و یک دور $P_m\square C_n$ یک **استوانه** و حاصل‌ضرب دکارتی دو دور $C_m\square C_n$ یک **چنبره** نامیده می‌شود.

یک **شبکه‌ی** d**- بعدی** $(d\in\mathbb{N})$ حاصل‌ضرب دکارتی مسیرهای $P_1, P_2, \ldots, P_d$ با طول‌های $n_1, n_2, \ldots, n_d$ است که با $G_d(n_1, n_2, \ldots, n_d)$ نشان داده می‌شود. لذا داریم:

$$\begin{aligned} V(G_d(n_1,n_2,\ldots,n_d)) &= \{1,\ldots,n_1\}\times\{1,\ldots,n_2\}\times\cdots\times\{1,\ldots,n_d\} \\ E(G_d(n_1,n_2,\ldots,n_d)) &= \{uv|u=(u_1,u_2,\ldots,u_d), v=(v_1,v_2,\ldots,v_d), \exists i_0 \\ &\qquad \forall i\neq i_0 \ \ u_i=v_i, |u_{i_0}-v_{i_0}|=1\}. \end{aligned}$$

دراین‌صورت، برای یک شبکه‌ی d- بعدی $G_d(n_1, n_2, \ldots, n_d)$ داریم:

$$\begin{aligned} |V(G_d(n_1,n_2,\ldots,n_d))| &= n_1\times n_2\times\ldots\times n_d \\ |E(G_d(n_1,n_2,\ldots,n_d))| &= n_1\times n_2\times\cdots\times n_d\times(d-\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{n_i}). \end{aligned}$$

برای گراف حاصل‌ضربی $G=G_1\square G_2\square\cdots\square G_d$، اگر هر یک از فاکتورهای G_i به‌صورت P_2 باشد، آن‌گاه G یک **ابرمکعب** d**- بعدی** نامیده می‌شود و با نماد Q_d نمایش داده می‌شود.

۲.۱ رنگ‌آمیزی بی‌دور گراف‌ها

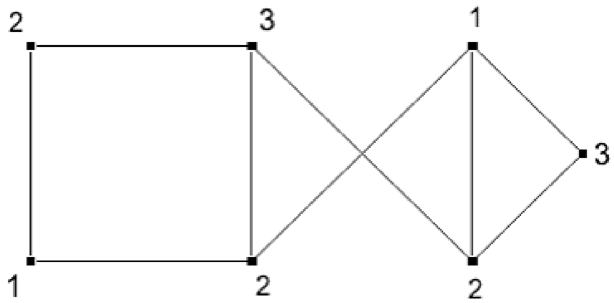
یک k**- رنگ‌آمیزی رأسی** از گراف G یک تخصیص از k رنگ **۱، ۲، ۳**، $\ldots, k$ به رأس‌های G است. یک k**- رنگ‌آمیزی مجاز** از گراف G، یک k- رنگ‌آمیزی رأسی از G است به‌طوری‌که در آن هر دو رأس مجاور رنگ‌های متمایز دریافت کنند. **عدد رنگی** G که با نماد $\chi(G)$ نمایش داده می شود مینیمم kای است به‌طوری‌که G یک k- رنگ‌آمیزی مجاز داشته باشد. گراف G را k**- رنگ‌پذیر** می‌نامیم هرگاه $\chi(G)\leq k$.

تعریف ۱.۲.۱. *یک k- **رنگ‌آمیزی بی‌دور**[1] از گراف G یک k- رنگ آمیزی مجاز از G است، به‌طوری‌که هر زیرگراف القایی G روی هر دو کلاس رنگی G شامل دور نباشد.*

[1] *acyclic coloring*

به ازای هر جفت از رنگهای a و b، فرض کنیم $C_{a,b}$ نمایشگر مجموعه‌ی تمام رأس‌های رنگ شده با رنگ a یا b باشد. بودن یک رنگ‌آمیزی بی‌دور بدین معنی است که $C_{a,b}$ شامل یک جنگل از جفت‌های رنگی a و b است. کلاس‌های $C_{a,b}$، **کلاس‌های رنگی بی‌دور** نامیده می‌شوند.

عدد رنگی بی‌دور G که با نماد $\chi_a(G)$ نمایش داده می شود مینیمم kای است به‌طوری‌که G یک k-رنگ‌آمیزی بی‌دور داشته باشد. یک **رنگ‌آمیزی جزئی بی‌دور** اختصاصی از رنگ‌ها به زیرمجموعه‌ای از رأس‌های G است به‌طوری‌که رأس‌های رنگ شده گرافی با رنگ‌آمیزی بی‌دور را القاء کنند. مثالی از یک رنگ‌آمیزی بی‌دور از گراف در شکل ۱.۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱.۱: یک رنگ‌آمیزی بی‌دور از گراف

فصل ۲

عدد رنگی بی‌دور

در بحث رنگ‌آمیزی گراف‌ها هدف مینیمم سازی تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای یک رنگ‌آمیزی از آن گراف است. بنابراین یکی از گزینه‌های مهم در یک رنگ‌آمیزی بی‌دور که به آن بسیار توجه شده است، عدد رنگی بی‌دور است. در بخش اول این فصل به معرفی کران‌های پایین ارائه شده برای عدد رنگی بی‌دور یک گراف دلخواه می‌پردازیم. در بخش دوم مروری بر گراف‌های k- رنگ‌پذیر بی‌دور ماکزیمال خواهیم داشت و در بخش آخر به ارتباط عدد رنگی بی‌دور یک گراف با مینیمم درجه و عدد رنگی آن خواهیم پرداخت. در این فصل از منابع [۱۷، ۷، ۲۲] استفاده شده است.

۱.۲ کران‌های پایین برای $\chi_a(G)$

قضیه ۱.۱.۲. [۱۷] *برای هر گراف G داریم:*

$$\chi_a(G) > \frac{|E(G)|}{|V(G)|} + 1.$$

برهان. فرض کنیم G گرافی با n رأس و m یال و φ یک k- رنگ‌آمیزی بی‌دور از گراف G باشد. کلاس‌های رنگی φ را با $C_1, C_2, \dots, C_k$ نمایش می‌دهیم، که $|C_i| = n_i$. دراین‌صورت این کلاس‌ها افرازی از مجموعه‌ی رأس‌های G خواهند بود، بنابراین:

$$n = |V(G)| = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

از آن‌جا که G شامل هیچ دور ۲- رنگی نیست، هر زیرگراف القایی G روی دو کلاس رنگی C_i و C_j یک جنگل $T_{i,j}$ است. به‌وضوح $|E(T_{i,j})| \leq n_i + n_j - 1$.

درنتیجه،

$$\begin{aligned} m &= \sum_{1\le i<j\le k} |E(T_{i,j})| \\ &\le \sum_{1\le i<j\le k} (n_i+n_j-1) \\ &= (k-1)\sum_{i=1}^{k} n_i - \binom{k}{2} = (k-1)n - \binom{k}{2}. \end{aligned}$$

آن‌گاه $m \le (k-1)n - \binom{k}{2}$. بنابراین:

$$k \ge \frac{m}{n} + \frac{\binom{k}{2}}{n} + 1.$$

از آن‌جا که $\frac{\binom{k}{2}}{n} > 0$، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} k &> \frac{m}{n} + 1 \\ \Rightarrow \chi_a(G) &> \frac{m}{n} + 1. \end{aligned}$$

■

نتیجه ۲.۱.۲. [۱۷] *برای حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌های $G_1, \dots, G_d$ داریم:*

$$\chi_a(G_1\square\cdots\square G_d) > \sum_{i=1}^{d} \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} + 1.$$

برهان. فرض کنیم $G = G_1\square G_2\square\cdots\square G_d$ و $V(G_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$، رأس $(u_1, v_2, \dots, v_d) \in V(G)$ با رأس $(u_j, v_2, \dots, v_d)$ مجاور است اگر و تنها اگر u_1 و u_j در G_1 باهم مجاور باشند.

بنابراین تعداد رأس‌های G که با $(u_1, v_2, \dots, v_d)$ مجاور هستند برابر با $d_{G_1}(u_1)|V(G_2)|\cdots|V(G_d)|$ است. درنتیجه تعداد یالهای G، که یک سر آن‌ها رأس $(u_i, v_2, \dots, v_d)$، $1 \le i \le n$ است، برابر با

$$\frac{1}{2}(d_{G_1}(u_1) + \cdots + d_{G_1}(u_n))|V(G_2)|\cdots|V(G_d)| = |E(G_1)||V(G_2)|\cdots|V(G_d)|$$

است. با ادامه‌ی این روند بر روی رأس‌های گراف‌های دیگر $G_۲, G_۳, \ldots, G_d$، تعداد یال‌های G به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|E(G)| = (\prod_{j=۱}^{d} |V(G_j)|) \sum_{i=۱}^{d} \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}.$$

با استفاده از قضیه‌ی (۱.۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \chi_a(G) > \frac{|E(G)|}{|V(G)|} + ۱ \quad &= \quad \frac{(\prod_{j=۱}^{d} |V(G_j)|) \sum_{i=۱}^{d} \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}}{(\prod_{j=۱}^{d} |V(G_j)|)} + ۱ \\ &= \quad \sum_{i=۱}^{d} \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} + ۱. \end{aligned}$$

و بنابراین حکم برقرار است. ■

حال به روش دیگر کران پایینی برای $\chi_a(G)$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۱.۲. [۷] *برای هر گراف G با n رأس، m یال و $\Delta = ۴n(n-۱) - ۸m + ۱$ داریم:*

$$\chi_a(G) \geq \frac{۲n + ۱ - \sqrt{\Delta}}{۲}.$$

برهان. فرض کنیم $\chi_a(G) = k$ و C_i، $۱ \leq i \leq k$، زیرمجموعه‌ای از رأس‌های G باشد که در یک k-رنگ‌آمیزی بی‌دور از G، رنگ i را دارند. با استفاده از تعریف رنگ‌آمیزی بی‌دور، به‌ازای هر $۱ \leq i < j \leq k$، $G_{i,j}$، زیرگراف القایی G روی G_i و G_j یک جنگل است.

فرض کنیم $e_{i,j} = |E(G_{i,j})|$. به‌وضوح برای هر جفت متمایز $(i_۱, j_۱)$ و $(i_۲, j_۲)$ داریم:

$$E_{i_۱,j_۱} \cap E_{i_۲,j_۲} = \varnothing$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تعداد جفت‌های متمایز از رنگ‌ها برابر با $\frac{k(k-۱)}{۲} = \binom{k}{۲}$ است و برای هر جفت دلخواه (i,j)، $۱ \leq i < j \leq k$ داریم:

$$e_{i,j} \leq |C_i| + |C_j| - ۱. \tag{۱.۲}$$

هم‌چنین واضح است که

$$\sum_{(i,j)} e_{i,j} = m. \tag{۲.۲}$$