بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شاهد
گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

فضاهای متریک مخروطی و خواص توپولوژیک آنها

نگارش
کبری پیرنظر

استاد راهنما
دکتر محمّد اکبری تکابنی

استاد مشاور
دکتر رحیم علیزاده

بهمن ۱۳۹۱

تقدیر و تشکر:

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر اکبری، به خاطر زحماتشان در طول مدت تحصیل و به خصوص در تهیه این پایان نامه، تشکر و قدردانی می کنم. همچنین از آقای دکتر علیزاده بخاطر راهنمایی هایشان سپاسگزارم و از خداوند متعال آرزوی سلامتی و موفقیت برای تمامی اساتید عزیز، که در طی این مدت از گفتار و رفتار آنها درسهای ارزشمندی آموختم دارم.

کبری پیرنظر

بهمن ۹۱

چکیده

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی روی فضاهای متریک مخروطی انجام شده است. در این پایان‌نامه خواص توپولوژیکی فضاهای متریک مخروطی و متریک‌پذیری این فضاها بررسی شده و نشان داده‌ایم که فضاهای متریک مخروطی تعمیمی از فضاهای متریک معمولی هستند. همچنین نکاتی در خصوص هم‌ارزی نتایج قضیهٔ نقطه ثابت، بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: فضای متریک مخروطی[۱]، متریک‌پذیری[۲]، مخروط نرمال[۳]، فضای باناخ مرتب[۴]، قضیه نقطهٔ ثابت[۵]

[۱] Cone metric space

[۲] Metrizability

[۳] Normal cone

[۴] Ordered Banach space

[۵] Fixed point theorem

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه فضاهای متریک مخروطی از اواسط قرن بیستم شروع شد. هوانک[۱] ژانک[۲] این فضاها را با نام فضاهای متریک مخروطی معرفی کردند. و خواص توپولوژیک آنها را بررسی کردند. به این شکل که یک فضای باناخ مرتب به جای مجموعه‌ای از اعداد حقیقی بکار برده می‌شود. ایشان همگرایی و کوشی بودن دنباله‌ها را با استفاده از نقاط درونی مخروط تعریف کردند و دیگر محققین برای انواع نگاشت‌های انقباض در فضاهای متریک مخروطی، قضایای نقطه ثابت مشترک را اثبات کردند.

در اغلب موارد نتایج بدست آمده در مورد متر معمولی در مورد متر مخروطی هم برقرار است. در برخی موارد نشان داده شده است که بعضی از این نتایج از روش‌های ساده‌تری بدست می‌آیند، مثلاً نوعی هم‌ارزی بین متر معمولی و متر مخروطی نتیجه می‌شود.

بسیاری از این نتایج قضیهٔ نقطه ثابت نیز با جابجایی متر معمولی با متر مخروطی ثابت می‌شود.

در این پایان‌نامه ابتدا فضاهای متریک مخروطی و انواع مخروط‌ها معرفی شده‌اند و سپس در فصل دوم خواص توپولوژیک مخروطی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل سوّم متریک‌پذیری فضاهای متریک مخروطی مورد بررسی قرار گرفته و سپس قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای فضاهای متریک مخروطی بیان شده و شرایط هم‌ارزی این قضیه با اصل انقباض باناخ و چند قضیهٔ دیگر آورده شده است.

فصل ۱ این پایان‌نامه از [۱۱] و فصل ۲ از [۲، ۳۰] و فصل ۳ از [۱۴، ۲۰، ۳۸] برگرفته شده است.

---

[۱] Huang

[۲] Zhang

فصل ۱

مقدمه‌ای بر فضاهای متریک مخروطی

در سال ۲۰۰۷، هوانگ و ژانگ [۱۰] مفهوم فضاهای متریک مخروطی که قبلاً به عنوان Kـمتریک و Kـفضاهای نرم‌دار در اواسط قرن بیستم در [۱۷–۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۳۳] معرفی شده بود را دوباره معرفی نمودند.

فضای برداری E روی اعداد حقیقی را، فضای توپولوژیک برداری می‌گوئیم اگر

۱. نگاشت $(u,v) \mapsto u+v : E \times E \to E$ پیوسته باشد.

۲. نگاشت $(\alpha,v) \mapsto \alpha v : \mathbb{R} \times E \to E$ پیوسته باشد.

۳. مجموعه‌های تک عضوی بسته باشند.

زیرمجموعهٔ P از E را یک مخروط می‌نامیم اگر

۱. P ناتهی باشد.

۲. برای هر $x,y \in P$ و هر $\alpha,\beta \geq 0$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in P$.

۳. $P \cap (-P) = \{0\}$.

مخروط P روی E رابطه‌ی $\preccurlyeq$ به‌صورت $x \preccurlyeq y$ اگر و تنها اگر $y - x \in P$، القاء می‌نماید.

این رابطه با ساختار جبری E سازگار است یعنی

۱. اگر $x \succcurlyeq ۰$ و $y \succcurlyeq ۰$ آنگاه $x + y \succcurlyeq ۰$.

۲. اگر $x \succcurlyeq ۰$ و $\lambda \geq ۰$ آنگاه $\lambda x \succcurlyeq ۰$.

رابطه "$\preccurlyeq$" که توسط P روی E القاء می‌شود؛ ترتیب جزیی برداری در E نامیده می‌شود و جفت (E, P) یا $(E, \preccurlyeq)$ این فضای مرتب جزیی را نمایش می‌دهد.

مثال ۱.۰.۱. الف. ترتیب معمولی روی $\mathbb{R}$، القاء شده توسط مخروط $\mathbb{R}^+$ می‌باشد.

ب. فرض کنید $E = \mathbb{R}^S$، گردایه همه توابع حقیقی مقدار از S به $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه ترتیب معمولی در E بطور نقطه‌وار تعریف می‌شود:

$f \preccurlyeq g$ در E اگر و تنها اگر $f(x) \leq g(x)$ برای هر $x \in S$.

به‌ویژه، اگر S فضایی توپولوژیک باشد آنگاه ترتیب در فضای همهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی S به همین روش تعریف می‌شود.

پ) مثال دیگری از تعریف نقطه‌وار ترتیب، فضای دنباله‌هاست. فرض کنید W فضای همه دنباله‌های $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی و مخروط آن را P در نظر بگیرید، که شامل همه دنباله‌های $\{\mu_n\}$ باشد که $\mu_n \geq ۰$. زیرفضاهای W که در ذیل معرفی می‌شوند، ترتیب را از W به ارث می‌برند:

m: فضای همه دنباله‌های کراندار.

c: فضای همهٔ دنباله‌های همگرا.

$c_۰$: فضای همهٔ دنباله‌های همگرا به صفر.

l^p: فضای همهٔ دنباله‌ها $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$.

d: فرض کنید (Ω, μ) فضای اندازه و E فضای برداری متشکل از همهٔ توابع اندازه‌پذیر حقیقی مقدار روی Ω باشد. توابعی که μ تقریباً همه جا با هم برابرند، را یکی گرفته شده در نظر می‌گیریم. برای f و g در E تعریف کنید:

$f \leq g$ اگر و تنها اگر $f(x) \leq g(x)$ μـتقریباً همه‌جا.

فضای L^p به عنوان زیرفضایی از فضای فوق مرتب جزیی است.

برای نقاط $x, y \in E$ که $x \leq y$ قرار می‌دهیم $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$.

مجموعهٔ $[x, y]$، فاصلهٔ مرتب نامیده می‌شود.

به وضوح فواصل مرتب، مجموعه‌هایی محدب هستند. زیرمجموعهٔ A در (E, P) کراندار_مرتب نامیده می‌شود اگر فاصلهٔ مرتبی شامل A موجود باشد. مجموعهٔ A در E محدب_مرتب (پُر) است اگر برای هر $a_1, a_2 \in A$ که $a_1 \preccurlyeq a_2$ داشته باشیم $[a_1, a_2] \subseteq A$. مخروط P را توپر می‌نامیم اگر $\text{int } P \neq \emptyset$.

لم ۲.۰.۱ ([۳۹]). فرض کنید (E, P) فضای برداری توپولوژیک مرتب باشد. آنگاه c نقطهٔ درونی P است اگر و تنها اگر $[-c, c]$ همسایگی 0 در E باشد.

بسیاری از فضاها در آنالیز تابعی دارای مخروطی با درون تهی هستند. برای مثال؛ در c_0 دنباله‌هایی که از یک جمله به بعد، همهٔ جملات دنباله صفر است زیرفضایی از c_0 است و بعنوان یک زیرفضا نمی‌تواند درون ناتهی داشته باشد. فضای (E, P)، محدب_مرتب است اگر پایهٔ همسایگی‌های مبداء شامل زیرمجموعه‌هایی محدب_مرتب باشد. در این حالت مخروط P نرمال یا Pـاشباع‌شده، نامیده می شود.

قضیه ۳.۰.۱ ([۳۶]). اگر مخروط P از E نرمال و توپر باشد آنگاه (E, P) فضای نرمدار مرتب است.

بعضی از محققین، تلاش نموده‌اند تا با استفاده از فضای برداری توپولوژیک مرتب به جای فضای باناخ مرتب، مفاهیم را تعمیم دهند، (ببینید [۲۸]).

قضیه قبل بیان می‌کند که این تلاش بیهوده است.

فضای برداری توپولوژیک (محدب-مرتب) وجود دارد که نرمدار نیست، امّا آن فضا دارای یک مخروط غیرنرمال و توپر است. مثال ۲.۴ را در [۱۰] ببینید.

تعریف ۴.۰.۱ ([۸]). مخروط P در فضای باناخ E گفته می‌شود:

۱. نرمال است اگر

$$\inf\{\|x+y\| : x,y\in P, \|x\|=\|y\|=1\}>0$$

۲. شبه-یکنوا است اگر $k>0$ ای موجود باشد که برای هر $x,y\in E$،

$$0\leq x\leq y \Rightarrow \|x\|\leq k\|y\|$$

۳. یکنوا است اگر برای هر $x,y\in E$ داشته باشیم

$$0\leq x\leq y \Rightarrow \|x\|\leq \|y\|$$

یعنی P شبه یکنوا با ثابت $k=1$ باشد.

لم بعد شامل نتایجی روی مخروط‌ها در فضاهای باناخ مرتب است، (۱۹۴۰، ببینید [۲۳]). جالب است که بدانیم اکثر نویسندگان که روی مخروط‌های نرمال بعد از سال ۲۰۰۷ کار می‌کنند از این نتایج استفاده نمی‌کنند.

تعریف ۵.۰.۱. فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی و ρ مخروطی در آن باشد اگر هر دنبالهٔ صعودی کراندار، از بالا همگرا باشد، آنگاه ρ منظم نامیده می‌شود یعنی اگر $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای در ρ و عنصر y در E وجود داشته باشد که $x_۱ \leq x_۲ \leq \ldots \leq y$، آنگاه $x \in E$ موجود باشد که $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = ۰$ به‌طور هم‌ارز مخروط ρ منظم نامیده می‌شود اگر و فقط اگر هر دنبالهٔ نزولی که از پایین کراندار است همگرا باشد.

لم ۶.۰.۱ ([۲۳]). شروط زیر برای مخروط P در فضای باناخ $(E, \|\cdot\|)$ معادل هستند:

۱. P نرمال است.

۲. برای دنباله‌های دلخواه $\{x_n\}$، $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ در E، که برای هر n، $x_n \leq y_n \leq z_n$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$ نتیجه می‌دهد $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

۳. P شبه-یکنوا است.

۴. نرم $\|\cdot\|_۱$ تست میشه روی E وجود دارد که معادل با $\|\cdot\|$ است که P نسبت به $\|\cdot\|_۱$ یکنواست.

اثبات. اثبات این لم را می‌توانید در [۳، ۸، ۹، ۲۷، ۳۴، ۳۹] ببینید. □

ثابت مینیمال k که در تعریف شبه-یکنوا صدق می‌نماید ثابت نرمال P نامیده می‌شود.

مثال ۷.۰.۱ ([۳۶]). فرض کنید $E = C^۱_R[۰, ۱]$ گرادیهٔ همهٔ توابع با مشتق پیوسته روی $[۰, ۱]$ باشد. برای هر $f \in E$؛ قرار می‌دهیم

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

به وضوح $\|\cdot\|$ یک نرم روی E است. قرار دهید $P = \{f \in E : \forall t f(t) \geq ۰\}$.

در این صورت مخروط P غیرنرمال است. زیرا اگر $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$ و $g_n(t) = \frac{۱}{n}$ اختیار کنیم، آنگاه $۰ \leq f_n \leq g_n$ و $\lim_{n\to\infty} g_n = ۰$، اما

$$\|f_n\| = \max_{t\in[۰,۱]} \left|\frac{t^n}{n}\right| + \max_{t\in[۰,۱]} |t^{n-۱}| = \frac{۱}{n} + ۱ > ۱$$

پس $\{f_n\}$ به صفر همگرا نیست. لذا با توجه به لم قبل P غیرنرمال است.

در فضای باناخ E به همراه مخروط توپر P، می‌نویسیم $x \ll y$ اگر و تنها اگر $y - x \in \text{int } P$.

تعریف ۸.۰.۱ ([۸]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $d : X \times X \to P$ تابعی باشد که برای هر $x, y, z \in X$ در خصوصیات زیر صدق نماید.

۱. $d(x, y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$.

۲. $d(x, y) = d(y, x)$.

۳.

$$d(x, y) \preccurlyeq d(x, z) + d(z, y)$$

در این صورت d متر مخروطی روی X و (X, d) فضای متریک مخروطی نامیده می‌شود.

مثال ۹.۰.۱. فرض کنید $E = \mathbb{R}^۲$، $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x \geq ۰, y \geq ۰\}$ و $X = \mathbb{R}$، $d : X \times X \to E$ را با ضابطهٔ

$$d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$$

که $\alpha \geq 0$ عدد ثابتی است، در نظر بگیرید. آنگاه (X,d) فضای متریک مخروطی با مخروط نرمال P است که ثابت نرمال آن $k = 1$ است.

تعریف ۱.۰.۱۰ ([۱۰]). در فضای متریک مخروطی (X,d)، دنباله‌ٔ $\{x_n\}$

۱. دنباله‌ای کشی است اگر برای هر $c \gg 0$، Nای موجود باشد که برای هر $n, m > N$، $d(x_n, x_m) \ll c$.

۲. دنباله‌ای همگرا به x است اگر برای هر $c \gg 0$، Nای موجود باشد که برای هر $n > N$، $d(x_n, x) \ll c$.

فضای متریک مخروطی X کامل است اگر هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

اگر P مخروط توپر نرمالی باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ کشی است اگر و تنها اگر $\|d(x_n, x_m)\| \to 0$. بعلاوه دنبالهٔ $\{x_n\}$ به x همگراست اگر و تنها اگر $\|d(x_n, x)\| \to 0$. ([۱۰] را ببینید).

قضیه ۱.۰.۱۱ ([۱۰]). فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی کامل روی مخروط توپر نرمالی باشد. فرض کنید $T : X \to X$ در یکی از شروط انقباضی زیر صدق نماید:

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda(d(Tx, x) + d(Ty, y))$$

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda(d(Tx, y) + d(Ty, x))$$

برای هر $x, y \in X$ که $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ مقدار ثابتی است. آنگاه T دارای نقطه ثابت یکتایی است و برای هر $x \in X$، دنبالهٔ $\{T^n x\}$ به نقطه‌ای ثابت همگراست.

قضیه ۱.۰.۱۲ ([۱]). فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی روی مخروط توپر

نرمالی باشد. فرض کنید $f, g : X \to X$ در یکی از شروط انقباضی زیر صدق نماید:

$$d(fx, fy) \leq \lambda d(gx, gy) \quad (۱.۱)$$

$$d(fx, fy) \leq \lambda(d(fx, gx) + d(fy, gy)) \quad (۲.۱)$$

$$d(fx, fy) \leq \lambda(d(fx, gy) + d(fy, gx)) \quad (۳.۱)$$

برای (۱.۱)، $\lambda \in [۰, ۱)$ و برای (۲.۱) و (۳.۱) $\lambda \in [۰, \frac{۱}{۲})$ اختیار می‌کنیم. اگر برد g شامل برد f و $g(X)$ زیرفضای کاملی از X باشد آنگاه f و g دارای نقطه ثابت یکتا و منطبق در X هستند. بعلاوه اگر f و g بطور ضعیف سازگار باشند، آنگاه f و g دارای نقطه ثابت مشترک یکتا هستند.

به یاد داریم که $y \in X$ نقطه انطباق نگاشت‌های $g, f : X \to X$ است اگر $x \in X$ موجود باشند که $f(x) = g(x) = y$. در این صورت x را نقطه انطباق می‌نامیم. نگاشت‌های f و g را بطور ضعیف سازگار گوئیم اگر در نقطهٔ انطباق خود جابجا شوند. یعنی $fog(x) = gof(x)$ شود.

تعریف ۱۳.۰.۱. فرض کنید $f, g : X \to X$ توابعی دلخواه باشند. اگر f، g-انقباضی ضعیف است اگر برای هر $x, y \in X$،

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(f(x), g(x)) + \beta d(f(y), g(y)) + \gamma d(g(x), g(y))$$

که $\alpha, \beta, \gamma \in [۰, ۱)$ و $\alpha + \beta + \gamma < ۱$.

قضیه ۱۴.۰.۱ ([۳۷]). فرض کنید (X, d) فضای متریک مخروطی روی مخروط توپر نرمال باشد. فرض کنید برای $f, g : X \to X$ داشته باشیم $f(X) \subset g(X)$. فرض کنید f،

g-انقباضی ضعیف و f و g بطور ضعیف سازگار باشند. اگر $f(X)$ یا $g(X)$ زیرفضای کامل از X باشند آنگاه نگاشت‌های f و g دارای نقطه ثابت مشترک یکتا هستند.

مخروط‌های توپر غیرنرمال

نتایجی که در خصوص فضاهای متریک مخروطی نرمال بیان شده در فضاهای مخروطی غیرنرمال تاکنون اثبات نشده است. چون لم ۶.۰.۱ که در این فضاها برقرار نیست. به عبارتی دیگر متر مخروطی در حالت کلی پیوسته نیست، یعنی اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$ آنگاه لزوماً $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ برقرار نیست.

در فضاهای مخروطی نرمال، خصوصیات زیر در حالت کلی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

(P_1) اگر $u \preccurlyeq v$ و $v \ll w$ آنگاه $u \ll w$.

(P_2) اگر $u \ll v$ و $v \preccurlyeq w$ آنگاه $u \ll w$.

(P_3) اگر $u \ll v$ و $v \ll w$ آنگاه $u \ll w$.

(P_4) اگر $0 \preccurlyeq u \ll c$ برای هر $c \in \operatorname{int} P$ آنگاه $u = 0$.

(P_5) اگر $a \preccurlyeq b + c$ برای هر $c \in \operatorname{int} P$ آنگاه $a \preccurlyeq b$.

(P_6) برای هر $0 \ll c_1$ و $c_2 \in P$، عنصر $0 \ll d$ وجود دارد که $c_1 \ll d$ و $c_2 \ll d$، در واقع $d = 2c_1 + c_2$.

(P_7) برای هر $0 \ll c_1$ و $0 \ll c_2$، عنصر $0 \ll e$ هست که $e \ll c_1$ و $e \ll c_2$. درواقع $e = \frac{1}{N}(c_1 + c_2)$ و N به اندازه کافی بزرگ است.

(P_8) اگر $b_n \ll d(x_n,y) \leq 0$ و $0 \to b_n$ آنگاه $c \ll d(x_n,x)$ که x_nها و x در X واقع‌اند.

(P_9) اگر E فضای باناخ حقیقی به همراه مخروط P باشد و اگر $a \preccurlyeq \lambda a$ که $a \in P$ و $0 \leq \lambda < 1$ آنگاه $a = 0$.

(P_{10}) اگر $c \in \operatorname{int} P$، $0 \preccurlyeq a_n$ و $a_n \to 0$ آنگاه $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر $n > n_0$ خواهیم داشت $a_n \ll c$.

از (P_{10}) نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به $x \in X$ همگراست اگر $d(x_n,x) \to 0$ و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است اگر $d(x_n,x_m) \to 0$. در حالتی که مخروط لزوماً نرمال نیست، فقط بعضی از گزاره‌های لم‌های ۱ و ۴ از [۱۰] برقرار خواهند بود.

لم ۱.۰.۱۵. هر مخروط منظم نرمال است.

اثبات. فرض کنید P یک مخروط منظم غیرنرمال باشد برای هر $n \geq 1$، $t_n, s_n \in P$ را طوری انتخاب کنید که $t_n - s_n \in P$ و $\|s_n\| > n^2\|t_n\|$. برای هر $n \geq 1$، قرار می‌دهیم $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ و $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$ آنگاه برای هر $n \geq 1$، $y_n - x_n \in P$ و y_n و x_n، $\|y_n\| = 1$ و $\|x_n\| > n^2$.

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\|y_n\|$ همگرا و P بسته است لذا وجود دارد $y \in P$ که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$ حال چون

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \frac{1}{3^2}x_3 \leq \ldots \leq y$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x_n$ همگراست زیرا P منظم است. از اینرو $\lim \frac{\|x_n\|}{n^2} = 0$ که یک تناقض است. $\square$

لم ۱.۰.۱۶. مخروط نرمالی با ثابت نرمال $M < 1$ وجود ندارد.

اثبات. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و P مخروط نرمالی با ثابت نرمال $M < ۱$ باشد. عضو غیرصفر a را در P و $۰ < \varepsilon < ۱$ طوری انتخاب کنید که $M < ۱ - \varepsilon$ باشد. آنگاه $x \preccurlyeq (۱-\varepsilon)x$، اما $\|x\| > M\|x\| > (۱-\varepsilon)\|x\|$، و این یک تناقض است. □

قضیه ۱.۰.۱۷ ([۱۰]). فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل روی یک مخروط نرمال توپر باشد و برای هر $x,y \in X$ و ثابت $\lambda \in [۰,۱)$، $T : X \to X$ در شرط انقباضی $d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$ صدق کند، آنگاه T یک نقطه ثابت یکتا در X دارد و برای هر $x \in X$، دنبالهٔ تکراری $\{T^n x\}$ همگرا به نقطه ثابت است.

حال برای قضیهٔ ۱.۰.۱۷، بدون خاصیت نرمال بودن، اثبات زیر را ارایه می‌دهیم.

اثبات. $x_۰ \in X$ اختیار کنید و فرض کنید $x_۱ = Tx_۰$، ... و $x_{n+۱} = Tx_n = T^{n+۱}_{x_n}$. در این صورت داریم

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+۱}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-۱}) \\
&\preccurlyeq kd(x_n, x_{n-۱}) \\
&\preccurlyeq k^۲ d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq k^n d(x_۱, x_۰).
\end{aligned}
$$

بنابراین برای $n > m$، داریم

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\preccurlyeq \sum_{k=m}^{n-۱} d(x_{k+۱}, x_k) \\
&\preccurlyeq (k^{n-۱} + \ldots + k^m) d(x_۱, x_۰) \\
&\preccurlyeq \frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x_۰) \to ۰ (m \to \infty)
\end{aligned}
$$

با توجه به $(P_{۱۰})$ و $(P_۱)$ نتیجه می‌شود که $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است، و چون X کامل است، $x^* \in X$ هست که $x_n \to x^*$. از آنجائیکه T پیوسته است پس $Tx_n \to Tx^*$ و لذا $Tx^* = x^*$. (در اینجا می‌بایست در تعریف پیوستگی دنباله‌ای دقیق باشیم). برای اثبات $Tx^* = x^*$ به طریق زیر می‌توانیم عمل کنیم

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\preccurlyeq d(Tx^*, Tx_{n-۱}) + d(Tx_{n-۱}, x^*) \\ &= d(Tx^*, Tx_{n-۱}) + d(x_n, x^*) \\ &\preccurlyeq kd(x^*, x_{n-۱}) + d(x_n, x^*) \\ &\ll k\frac{c}{۲k} + \frac{c}{۲} = c. \end{aligned}$$

برای $c \in \text{int } P$، عدد طبیعی $n_۰$ هست که برای $n > n_۰$ داریم $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{۲}$ و $d(x^*, x_{n-۱}) \ll \frac{c}{۲k}$.

مهم است که بدانیم، در مخروط توپر غیرنرمال، از $u_n \to ۰$ (در فضای باناخ) نتیجه می‌شود که $u_n \ll c$ برای nهای به اندازه کافی بزرگ که c یک نقطه ثابت در $\text{int } P$ است. در هر حال عکس این مطلب درست نیست، یعنی از $u_n \ll c$ لزوماً نتیجه نمی شود که $u_n \to ۰$. می‌توان مثالی ارائه داد که در حالتی که مخروط توپر غیرنرمال است، یک انقباض دارای نقطهٔ ثابت باشد در حالیکه قضیه باناخ نمی‌تواند در این حالت بکار گرفته شود، چون مخروط غیرنرمال است. به [۵، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۲۹] رجوع کنید. $\square$

مثال ۱.۰.۱۸. فرض کنید $E = C^۱_{\mathbb{R}}[۰,۱]$ با نرم $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ و $P = \{x \in E : x(t) \geq ۰, t \in [۰,۱]\}$ یک مخروط غیرنرمال توپر است. ([۸]

صفحه ۲۲۱). دنباله توابع زیر را در نظر بگیرید

$$x_n(t) = \frac{1 - \sin nt}{n+2} \quad \text{و} \quad y_n(t) = \frac{1 + \sin nt}{n+2}$$

در این صورت $0 \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_n + y_n \to 0$ در فضای باناخ و $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. بنابراین $x_n \nrightarrow 0$ در E. پس با توجه به (P_{10}) و (P_1) داریم $x_n \ll c$ برای nهای به اندازه کافی بزرگ، در حالیکه $\{x_n\}$ در E به صفر همگرا نیست.

تابع $d : P \times P \to E$ را با ضابطهٔ $d(x,y) = x + y$ برای $x \neq y$ و $d(y,x) = 0$ تعریف کنید. این متر مخروطی پیوسته نیست. چون $0 \preccurlyeq x_n \preccurlyeq c$ داریم $d(x_n, 0) \ll c$ اما $d(0,0) = 0 \nrightarrow x_n = d(x_n, x)$ در E.

حال تابع $f : P \to P$ را با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{2}x$ در نظر بگیرید. این مثالی از تابع انقباضی نوع باناخ روی مخروط توپر غیرنرمال در فضای متریک (E, P) است. با توجه به اثبات، f دارای یک نقطهٔ ثابت یکتا در P است، اما قضیه باناخ و روش‌های اثبات از [۱۱] نمی‌توانند بکار گرفته شوند، چون مخروط غیرنرمال است.

فصل ۲

مروری بر خواص توپولوژیکی فضاهای متریک مخروطی

۱.۲ برخی خواص توپولوژیکی

بسیاری از مخروط‌های آشنا نرمالند و ثابت نرمال آنها برابر یک است. در این فصل انواع مخروط‌ها را معین می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای هر $k > ۱$ مخروط‌هایی با ثابت نرمال $M > k$ وجود دارند.

گزاره ۱.۱.۲. برای هر $k > ۱$، یک مخروط نرمال با ثابت $M > k$ وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $k > ۱$ داده شده باشد. فضای برداری حقیقی

$$E = \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}; x \in [۱ - \frac{۱}{k}, ۱]\}$$