بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

انتگرال فازی برای توابع یکنوا و نامساوی نوع چی‌بی‌شف فازی

استاد راهنما:

دکتر بیاض دارابی

استاد مشاور:

دکتر اصغر رحیمی

پـژوهشگر:

سید جمال موسوی قیداری

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به

همسر عزیزم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر بیاض دارابی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر اصغر رحیمی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
از جناب آقای دکتر محمدرضا عظیمی که زحمت داوری این رساله را تقبل فرمودند تشکر می‌کنم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را، و تشکر می‌کنم از همسفر زندگی‌ام، الهام عزیز که زحمات زیادی را متحمل شدند.

سید جمال موسوی قیداری
مهر ۱۳۹۱

نام خانوادگی: موسوی قیداری نام: سید جمال

عنوان پایان‌نامه: انتگرال فازی برای توابع یکنوا و نامساوی نوع چی‌بی‌شف فازی

استاد راهنما: دکتر بیاض دارابی استاد مشاور: دکتر اصغر رحیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۱۰۸

کلیدواژه‌ها: اندازه فازی، انتگرال فازی، انتگرال سوگینو، نامساوی نوع چی‌بی‌شف فازی.

چکیده

پایان نامه حاضر برخی تعاریف و خواص اساسی برای اندازه فازی، توابع اندازه پذیر فازی و انتگرال فازی ارائه می دهد و همچنین خواص اساسی انتگرال سوگینو را مورد بررسی قرار می دهد. برخی کران های بالای مطلوب برای انتگرال سوگینوی توابع یکنوا ارائه شده ونیزدر ادامه یک نامساوی از نوع چی بی شف برای انتگرال سوگینو نشان داده می شود. سپس نتاج قبلی فلورس-فرانیولیک و رومن-فلورس درنامساوی نوع چی بی شف انتگرال های فازی تعمیم داده شده اند و بالاخره به عنوان یک کاربرد، نامساوی استولارسکی فازی بررسی شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه اندازه فازی و انتگرال فازی

۱.۱ مقدمه

به دلیل محدودیت قدرت ادراک انسان از جهان خارج و نیز محدودیت قدرت استدلال جامع و عمیق، وی با عدم قطعیت [۱] و حتمیت مواجه است: عدم حتمیت در رابطه با کفایت اطلاعات و عدم قطعیت در رابطه با جامعیت استنتاجات خود. از آغاز ظهور علوم جدید تا اواخر قرن نوزدهم، عدم حتمیت به عنوان یک پدیده نامطلوب که بایستی از آن اجتناب کرد، مطرح بود. محدودیت‌هایی که داشتیم سبب ظهور تئوری جدید درباره‌ی عدم حتمیت شده که قادر به فایق آمدن بر عدم شفافیت و ابهام در پدیده‌های علمیِ واقعی می‌گردد.

لطفی عسگرزاده [۲] در سال ۱۹۶۵ نظریه جدید عدم حتمیت را که با تئوری احتمالات متمایز بود ابداع نمود. زاده علاقه فراوان به حل مسائل سیستم‌های پیچیده به طریق مدل‌سازی‌های ساده داشت. منطق فازی [۳] در سال ۱۹۶۵ توسط زاده از دانشگاه کالیفرنیا بطور کلی ارائه شد. سپس

[۱] Uncertainty
[۲] Lotfi. A. Zadeh
[۳] Fuzzy Logic

میشو سوگینو [۴] در سال ۱۹۷۲ از انستیتو تکنولوژی توکیو نظرات زاده را با ارائه مفاهیم اندازه فازی و انتگرال فازی در رساله دکتری خود تعقیب کرد. نظریه اندازه‌های فازی و انتگرال‌های فازی بوسیله سوگینو [۱۰] به عنوان ابزاری برای بررسی مسائل غیر قطعی معرفی شد. خواص و کاربردهای انتگرال سوگینو توسط مؤلفان بسیاری مطالعه شده است. ازجمله آنها: رالسکو [۵] و آدامز [۶] [۵] که برد اندازه‌های فازی را از $[0,1]$ به $[0,\infty]$ تعمیم دادند و یک تعریف معادلی ازانتگرال فازی را ارائه دادند و پاپ، [۷] وانگ [۸] و کلیر [۹] نگاه کلی ازقضیه اندازه فازی فراهم نمودند. رومن- فلورس [۱۰] و همکارانش چندین نامساوی انتگرال کلاسیک را به انتگرال فازی تعمیم دادند ([۱، ۷، ۹]).

رومن- فلورس و همکارانش نامساوی های نوع یانگ [۱۱] را برای انتگرال فازی با توجه به توابع پیوسته واکیداً یکنوا ثابت کردند [۷]. در [۱] فلورس- فرانیولیک [۱۲] و رومن- فلورس مبتنی بر نتایج در [۸]، یک نامساوی نوع چی‌بی‌شف برای انتگرال فازی برپایه اندازه لبگ از توابع پیوسته و اکیداً یکنوا فراهم کردند. در [۳] اُیانگ [۱۳] و فانگ [۱۴] نتایج اصلی در [۸] را برای توابع یکنوا تعمیم دادند.

[۴] M. Sugeno
[۵] D. Ralescu
[۶] G. Adams
[۷] E. Pap
[۸] Z. Wang
[۹] G. J. Klir
[۱۰] Roman- Flores
[۱۱] Yong
[۱۲] Flores-Franulic
[۱۳] Y. Oyang
[۱۴] J. Fang

۲.۱ اندازه‌های فازی و اندازه‌های نیم پیوسته فازی

تعریف ۱.۲.۱. اگر X یک مجموعه و $\mathfrak{F}$ یک $\sigma-$ جبر [۱۵] در X باشد، آنگاه زوج $(X,\mathfrak{F})$ را فضای اندازه‌پذیر [۱۶] و اعضای $\mathfrak{F}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. تابع مجموعه‌ای $\mu:\mathfrak{F}\to[0,\infty]$ یک اندازه فازی [۱۷] نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\mu(\emptyset)=0$ (میل کردن به صفر در $\emptyset$[۱۸])،

۲) اگر $E,F\in\mathfrak{B}$ و $E\subseteq F$، آنگاه $\mu(E)\leq\mu(F)$ (خاصیت یکنوایی [۱۹])،

۳) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{F}$ و $E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots\subseteq E_n\subseteq E_{n+1}\subseteq\ldots$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$ (پیوستگی از پایین)،

۴) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{F}$، $E_1\supseteq E_2\supseteq\ldots\supseteq E_n\supseteq E_{n+1}\supseteq\ldots$ و $\mu(E_1)<\infty$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)$ (پیوستگی از بالا).

تعریف ۳.۲.۱. روی $(X,\mathfrak{F})$، μ یک اندازه فازی نیم پیوسته پایینی [۲۰] (یا بالایی [۲۱]) نامیده می‌شود، اگر در شرایط (۱) و (۲) و (۳) (یا شرایط (۱) و (۲) و (۴)) صدق کند.

برای اختصار به هر دوی اندازه‌های فازی نیم پیوستهٔ پایینی و نیم پیوستهٔ بالایی، اندازه‌های فازی

[۱۵] Algebra
[۱۶] Measurable space
[۱۷] Fuzzy measure
[۱۸] Vanishing at $\emptyset$
[۱۹] Monotone
[۲۰] Lower semicontinuous fuzzy
[۲۱] Upper semicontinuous

نیم پیوسته گوئیم.

اگر μ یک اندازه فازی (یا یک اندازه فازی نیم پیوسته) روی یک فضای اندازه‌پذیر $(X,\mathfrak{F})$ باشد، در این صورت سه تایی $(X,\mathfrak{F},\mu)$ را یک فضای اندازه فازی (یا یک فضای اندازه فازی نیم پیوسته) گوئیم.

اندازه فازی (یا اندازه فازی نیم پیوسته) منظم [22] نامیده می‌شود، اگر $\mu(X)=۱$.

مثال ۴.۲.۱. *فرض کنید μ اندازه‌ی دیراک [23] روی $(X,\mathfrak{F})$ باشد، یعنی برای هر $E\in\mathfrak{F}$:*

$$\mu(E)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x_{\circ}\in E; \\ ۰ & \text{اگر} \quad x_{\circ}\notin E; \end{cases}$$

که در آن $x_{\circ}$ یک نقطه ی ثابت در X است.

این تابع مجموعه‌ای، یک اندازه‌ی احتمال است و البته یک اندازه‌ی فازی منظم است.

نتیجه ۵.۲.۱. *عموماً، روی یک نیم حلقه، هر اندازهٔ کلاسیک یک اندازهٔ فازی است.*

در سراسر این پایان‌نامه $X\in\mathfrak{F}$ و فضای اندازه‌پذیر را با $(X,\mathfrak{F})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۶.۲.۱. *فرض کنید $X=\{۱,۲,...,n\}$ و $\mathfrak{F}=\mathcal{P}(X)$ باشد، اگر $\mu(E)=(\frac{|E|}{n})^{۲}$ که در آن $|E|$ تعداد نقاطی است که به E تعلق دارد، در این صورت μ، اندازه‌ی فازی منظم می‌باشد چون داریم $\mu(X)=۱$. همچنین چون فضای X متناهی است، لذا پیوستگی (از بالا و پایین) به طور طبیعی برقرار است.*

[22] Regular
[23] Direct

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ..., n\}$ $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(X)$ باشد، اگر برای هر $E \in \mathfrak{F}$

$$\mu(E) = |E| \sum_{i \in E} ۲^{-i}$$

آنگاه μ اندازه‌ی فازی است.

مثال ۸.۲.۱. فرض کنید $f(x)$ تابعی نامنفی و حقیقی مقدار توسعه یافته باشد که روی $X = (-\infty, \infty)$ تعریف شده است. اگر برای هر $E \in \mathcal{P}(X)$،

$$\mu(E) = \sup_{x \in E} f(x)$$

آنگاه μ در شرایط اندازه‌ی فازی نیم پیوسته‌ی پایینی روی $(X, \mathcal{P}(X))$ می‌باشد. چون:

۱) $\mu(\emptyset) = \sup_{x \in \emptyset} f(x) = ۰$ (طبق قرارداد).

۲) (شرط یکنوایی) اگر فرض کنیم $E \subset F$ که در آن $E, F \in \mathfrak{F}$، در این صورت،

$\sup_{x \in E} f(x) \leq \sup_{x \in F} f(x)$ بنابراین $\mu(E) \leq \mu(F)$.

۳) (شرط پیوستگی از پایین) اگر $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$ و $E_۱ \subseteq E_۲ \subseteq ... \subseteq E_n \subseteq E_{n+۱} \subseteq ...$، آنگاه

$\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$ زیرا

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E_n} f(x) = \sup_{x \in \cup_{n=۱}^{\infty} E_n} f(x) = \mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n).$$

۴) شرط پیوستگی از بالا در اینجا برقرار نیست، چون اگر فرض کنیم $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$ که در آن

$E_n = [n, \infty)$ و $\mu(E_۱) < \infty$ و همچنین $E_۱ \supset E_۲ \supset E_۳ \supset ...$ اما،

$$\mu(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$$

چون از یک طرف داریم،

$$\mu(E_n) = \sup_{x \in E_n} f(x) = \sup_{x \in [n,\infty)} f(x)$$

و از طرف دیگر،

$$\mu(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcap_{n=۱}^{\infty} [n,\infty)) = \mu(\emptyset) = ۰.$$

مثال ۹.۲.۱. فرض کنید $X = (-\infty, \infty)$ و $(X, \mathcal{P}(X))$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اگر $f : X \to [۰, ۱]$ به گونه‌ای تعریف شود که $\inf_{x \in X} f(x) = ۰$، آنگاه تابع مجموعه‌ای μ که با رابطه $\mu(E) = \inf_{x \notin E} f(x)$ به ازای هر $E \in \mathcal{P}(X)$ تعریف می‌شود، یک اندازه فازی نیم پیوسته بالایی و منظم است. چون

۱) $\mu(\emptyset) = \inf_{x \notin \emptyset} f(x) = \inf_{x \in X} f(x) = ۰$،

۲) (شرط یکنوایی) اگر فرض کنیم $E \subseteq F$ در این صورت،

$$\inf_{x \notin E} f(x) \leq \inf_{x \notin F} f(x)$$

بنابراین،

$$\mu(E) \leq \mu(F).$$

۳) (پیوستگی از پایین) اگر $E_n = (-\infty, n]$ آنگاه $E_۱ \subseteq E_۲ \subseteq ... \subseteq E_n \subseteq E_{n+۱} \subseteq ...$ که در آن $\cup_{n=۱}^{\infty} E_n = X$ پس طبق قرارداد داریم،

$$\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n) = \inf_{x \notin \cup_{n=۱}^{\infty} E_n} f(x) = \inf_{x \notin X} f(x) = \inf_{x \in \emptyset} f(x) = ۱$$

ولی چون $(n,\infty) \subset X$ ، لذا داریم،

$$\mu(E_n) = \inf_{x \notin (-\infty, n]} f(x) = \inf_{x \in (n,\infty)} f(x) = 0$$

پس در نتیجه

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

۴) (پیوستگی از بالا) اگر فرض کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$ که در آن $\ldots \supset E_3 \supset E_2 \supset E_1$ و $\mu(E_1) < \infty$ ، آنگاه

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\emptyset) = 0$$

از طرف دیگر طبق فرض داریم:

$$\mu(E_n) = \inf_{x \notin E_n} f(x) = \inf_{x \in X} f(x) = 0$$

بنابراین،

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

۳.۱ توابع اندازه پذیر روی فضاهای اندازه پذیر

فرض کنید $(X,\mathfrak{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر، $\mu : \mathfrak{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ اندازه فازی (یا یک اندازه فازی نیم پیوسته) و $\mathfrak{B}$ میدان بورل روی $(-\infty,\infty)$ باشد. تعریف تابع اندازه پذیر روی یک فضای اندازه فازی $(X,\mathfrak{F},\mu)$ همانند تعریف یک تابع اندازه‌پذیر در نظریه اندازه کلاسیک است.

تعریف ۱.۳.۱. (تابع اندازه‌پذیر) یک تابع با مقدار حقیقی $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$ روی X، $\mathfrak{F}$ - اندازه‌پذیر (یا بطور اختصار اندازه‌پذیر، اگر ابهامی وجود نداشته باشد) است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه بورل $B \in \mathfrak{B}$ داشته باشیم:

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

قضیه ۲.۳.۱. *اگر $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$ یک تابع با مقدار حقیقی باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:*

۱) *f اندازه‌پذیر ($\mathfrak{F}$– اندازه پذیر) است.*

۲) *برای هر* $\alpha \in (-\infty, \infty)$، $\{x | f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{F}$.

۳) *برای هر* $\alpha \in (-\infty, \infty)$، $\{x | f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{F}$.

۴) *برای هر* $\alpha \in (-\infty, \infty)$، $\{x | f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{F}$.

۵) *برای هر* $\alpha \in (-\infty, \infty)$، $\{x | f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{F}$.

برهان. به [۱۱] رجوع شود.

تعریف ۳.۳.۱. اگر μ یک اندازه فازی روی X باشد، تعریف می‌کنیم،

$$\mathfrak{F}^{\mu}(X) = \{f : X \to [0, +\infty] | \text{اندازه پذیر است } - \mu; f\}$$

یعنی مجموعه همه توابع μ–اندازه‌پذیر نامنفی در رابطه با $\mathfrak{F}$ را با $\mathfrak{F}^{\mu}(X)$ نشان می‌دهیم. همه توابعی که خواهیم داشت، متعلق به $\mathfrak{F}^{\mu}(X)$ خواهند بود.

۴.۱ انتگرال فازی

دو مفهوم اصلی این متن یعنی اندازه‌های فازی و انتگرال‌های فازی به وسیله سوگینو برای اولین بار در سال ۱۹۷۴ بیان شده‌اند، که در حل مسائل سیستم‌های پیچیده که در آن‌ها عدم حتمیت وجود داشت، به طریق مدل سازی‌های ساده به کار گرفته شده‌اند.

انتگرال فازی مشابه انتگرال لبگ است، با این تفاوت که جمع و ضرب موجود در تعریف انتگرال لبگ به ترتیب توسط عملگرهای $\sup\,(\vee)$ و $\inf\,(\wedge)$ جایگزین شده‌اند. انتگرال‌های فازی کاربردهای موفقیت آمیزی در زمینه‌هایی مانند طراحی سیستم‌های کنترل فازی، سیستم‌های تصمیم‌گیری، شناسایی نقشه و ... دارند.

یکی از پیچیده‌ترین نوع کنترل کننده‌های فازی که با موفقیت امتحان داده شده و به کار رفته است، کنترل هلیکوپتر بدون سرنشین است.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم f یک تابع اندازه‌پذیر متناهی نامنفی تعریف شده روی X باشد. برای هر $\alpha \in [0,\infty]$، فرض می‌کنیم، $F_\alpha = L_\alpha f = \{x \in X | f(x) \geq \alpha\}$ که $\alpha-$ تراز [۲۴] (یا $\alpha-$ برش [۲۵]) f است. و

$$L_0 f = \overline{\{x \in X | f(x) > 0\}}$$

[۲۴] Level
[۲۵] Cut

که محمل f نام دارد. و همچنین

$$F_{\alpha^+} = \{x \in X | f(x) > \alpha\}$$

که $\alpha-$ تراز اکید (یا $\alpha-$ برش اکید) نامیده می‌شود.

باید توجه داشت که F_α نسبت به α ناصعودی است، به عبارت دیگر، $\alpha \leq \beta \Rightarrow F_\alpha \supset F_\beta$.

نتیجه ۲.۴.۱. *برای تابع یکنوای f حد راست (یا چپ) در a را با $f(a+)$ (یا $f(a-)$) نشان می‌دهیم.*

به عبارت دیگر،

$$f(a+) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(a+\epsilon) \quad (\text{یا} \quad f(a-) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(a-\epsilon))$$

از آنجا که برد توابعی که در این بخش می‌آید $[0, \infty)$ است، قرارداد می‌کنیم که $\inf_{x\in\emptyset} f(x) = \infty$.

لم ۳.۴.۱. *(از خواص F_α).*

۱) *هم F_α و هم F_{α^+} نسبت به α ناصعودی هستند. و $\alpha < \beta$ ایجاب می‌کند که $F_{\alpha^+} \supset F_\beta$.*

۲)

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\alpha^-} F_\beta &= \lim_{\beta\to\alpha^-} F_{\beta^+}\\ &= F_\alpha\\ &\supset F_{\alpha^+}\\ &= \lim_{\beta\to\alpha^+} F_\beta\\ &= \lim_{\beta\to\alpha^+} F_{\beta^+}.\end{aligned}$$

برهان. ۱) چون اگر $\beta > \alpha$، آنگاه $\alpha_+ \le \beta$ و از تعریف ۱.۴.۱ داریم، $F_\beta \subset F_{\alpha^+}$.

۲)

$$\begin{aligned}\bigcap_{\beta<\alpha}\{x|f(x)\ge\beta\} &= \bigcap_{\beta<\alpha}\{x|f(x)>\beta\}\\ &= \{x|f(x)\ge\alpha\}\\ &\supset \{x|f(x)>\alpha\}\\ &= \bigcup_{\beta>\alpha}\{x|f(x)\ge\beta\}\\ &= \bigcup_{\beta>\alpha}\{x|f(x)>\beta\}.\end{aligned}$$

■

تعریف ۴.۴.۱. (انتگرال فازی). فرض کنیم $A\in\mathfrak{F}$ و $f\in\mathfrak{F}_+^\mu(X)$. انتگرال فازی از f روی A نسبت

به اندازه فازی μ را با

$$\fint_A f\mathrm{d}\mu$$

نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\fint_A f\mathrm{d}\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)].$$

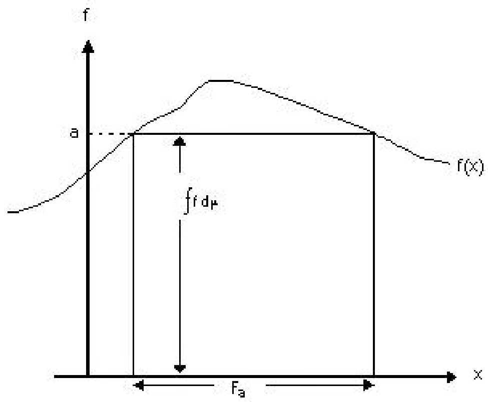
وقتی که $A = X$ باشد، آنگاه انتگرال فازی ممکن است با $\fint f\mathrm{d}\mu$ نشان داده شود.

بعضی مواقع انتگرال فازی را انتگرال سوگینو نیز می‌نامند.

نتیجه ۱.۴.۵. *اگر $X = (-\infty, \infty)$ ، $\mathfrak{F}$ میدان بورل $\mathcal{B}$ ، μ اندازه لبگ و $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ تابع پیوسته تک نمایی*[26] *باشد آنگاه تعبیر هندسی*

$$\fint f\mathrm{d}\mu$$

برابر با طول ضلع بزرگترین مربع مابین نمودار $f(x)$ و محور X هاست.(نمودار (۱.۱))



(نمودار(۱.۱))

[26] Unimodal

قضیه ۶.۴.۱.

$$\begin{aligned}
\int_A f \mathrm{d}\mu &= \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_{\alpha^+})] \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_{\alpha^+})] \\
&= \sup_{E\in\mathfrak{F}(f)} [(\inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A\cap E)] \\
&= \sup_{E\in\mathfrak{F}} [(\inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A\cap E)],
\end{aligned}$$

که $\mathfrak{F}(f)$، σ -جبر تولید شده توسط f است و کوچکترین σ -جبری است که f روی آن اندازه‌پذیر است.

برهان. اثبات در سه قسمت انجام می‌گیرد:

(۱) اگر $\alpha = \infty$ آنگاه $F_\alpha = F_{\alpha^+} = \phi$،

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)]$$

و

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_{\alpha^+})] = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_{\alpha^+})]$$

واضح هستند.