بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض(آنالیز)

پایداری معادلات تابعی روی فضاهای ۲-باناخ

توسط :

جواد سعیدی

استاد راهنما :

دکتر مجید اسحاقی

استاد مشاور:

دکتر محمود بیدخام

اسفند ۱۳۹۱

سپاس گزاری...

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر اسحاقی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر بیدخام که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

جواد سعیدی

اسفند ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر مهربان و همسر عزیزم

چکیده

در این رساله ابتدا قضیه ی پایداری هایرز-اولام معادله تابعی فیبوناچی را بیان می کنیم. سپس چند قضیه ی نگاشت های تقریباً جمعی را روی فضاهای ۲-باناخ و نتایج مرتبط با آن بررسی می نماییم. در ادامه چند قضیه ی همریختی های تقریبی را روی ۲-جبرهای باناخ ناارشمیدسی اثبات می کنیم و در پایان قضیه پایداری معادله تابعی شبه فیبوناچی $f(x) = f(x-۱) + f(x-۵)$ را روی فضاهای ۲-نرم ناارشمیدسی بیان و اثبات می کنیم.

کلمات کلیدی:

معادله تابعی شبه فیبوناچی، پایداری هایرز-اولام، فضای ۲-نرم ناارشمیدسی، جبر ۲-نرم ناارشمیدسی، همریختی حلقه ای، همریختی ینسن، همریختی درجه دوم

فهرست مطالب

مقدّمه

اولام[1] اولین بار در سال ۱۹۴۰ مسئله پایداری معادلات تابعی را به صورت زیر مطرح کرد:
« تحت چه شرایطی می توان یک تابع تقریباً جمعی را به یک تابع جمعی نزدیک کرد »
یک سال بعد مسئله اولام توسط هایرز[2] برای فضاهای باناخ به اثبات رسید. در سال ۱۹۵۰ آوکی[3] قضیه هایرز را برای توابع تقریباً جمعی تعمیم داد و دمیستوکلیس راسیاس[4] در سال ۱۹۷۸ حالت کلی قضیه هایرز را بیان کرد که به پایداری هایرز-اولام-راسیاس معروف شد. به علاوه جان راسیاس با جایگزینی تابع کنترل $\varepsilon(\|x\|^p\|y\|^p)$ به جای تابع کنترل $\varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$ در پایداری هایرز-اولام-راسیاس به مفهوم جدید پایداری اولام-گاورتا-راسیاس دست پیدا کرد و بعدها گاورتا[5] این نتایج را تعمیم داد و او به جای تابع کنترل در قضیه کلی هایرز-اولام-راسیاس تابع کنترل $\phi(x,y)$ را جایگزین کرد.
مقالات و کتب فراوانی در زمینه پایداری معادلات تابعی توسط ریاضیدانان متعددی انجام داده شد. یکی از معادلات تابعی که در زمینه پایداری معادلات تابعی مطرح شده است، معادلات فیبوناچی می باشد که اولین بار توسط جونگ[6] در سال ۲۰۰۹ بررسی شده است. در ادامه کار معادلات متعددی توسط جونگ و بردزک[7] و دیگران مطرح شده اند و هم اکنون نیز محققان زیادی روی این موضوع تحقیق می کنند.
جونگ نخست حل عمومی برای معادله تابعی فیبوناچی $f(x) = f(x-۱) + f(x-۲)$ را ارایه کرد

[1]Ulam

[2]Hyers

[3]Aoki

[4]Rassias

[5]Gavruta

[6]Jung

[7]Brdzek

و سپس پایداری هایرز-اولام آنرا در مجموعه ای از توابع $f:\mathbb{R}\to X$ که X یک فضای باناخ حقیقی است ثابت کرده است که در فصل اول به آن می پردازیم.
دکتر اسحاقی نگاشت تقریباً جمعی، نگاشت تقریباً ینسن و نگاشت تقریباً درجه دوم را روی فضای ۲-باناخ بررسی کرده است که ما در فصل دوم آن را مورد مطالعه قرار می دهیم.
در فصل سوم پایداری هایرز-اولام از همریختی های حلقه ای روی ۲-جبرهای باناخ ناارشمیدسی را بیان می کنیم.
در فصل چهارم به بررسی حل معادله تابعی شبه فیبوناچی $f(x)=f(x-۱)+f(x-۵)$ و اثبات پایداری هایرز-اولام آن که $f:\mathbb{R}\to X$ یک تابع و X یک فضای حقیقی ۲-نرم ناارشمیدسی است خواهیم پرداخت.
در فصل پنجم پایداری هایرز-اولام از همریختی تقریبی درجه دوم روی فضای ۲-باناخ ناارشمیدسی را ثابت می کنیم.

تمام نتایج و قضایای اصلی موجود در فصل های سوم، چهارم و پنجم جدید می باشند و توسط مولف اثبات شده اند.

فصل ۱

پایداری هایرز-اولام معادله تابعی فیبوناچی

در سال ۲۰۰۹ جونگ در مقاله [۴۶] به حل معادله تابعی فیبوناچی $f(x)=f(x-۱)+f(x-۲)$ پرداخته است و پایداری هایرز–اولام آنرا در مجموعه ای از توابع $f:\mathbb{R}\to X$ که X یک فضای باناخ حقیقی است ثابت کرده است که در این فصل به آن می پردازیم.
در سال ۱۹۴۰، اولام در [۴۷] برای نخستین بار مسئله پایداری معادلات تابعی را به صورت زیر مطرح کرد:
فرض کنیم $(G_۱,*)$ یک گروه، $(G_۲,\star,d)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ و $\varepsilon>۰$ باشد. آیا $\delta(\varepsilon)>۰$ موجود است به طوری که به ازای هر $x,y\in G_۱$ وقتی نگاشت $h:G_۱\to G_۲$ در رابطه

$$d\Big(h(x*y),h(x)\star h(y)\Big)<\delta,$$

صدق می کند، آن گاه همریختی $H:G_۱\to G_۲$ موجود است به طوری که برای هر $x\in G_۱$، $d\big(h(x),H(x)\big)<\varepsilon$؟
یک سال بعد هایرز در [۹] در پاسخ به مسئله اولام نگاشت های تقریباً جمعی $f:D_۱\to D_۲$ را در قضیه ای به صورت زیر ارائه کرد:
اگر $D_۱$ و $D_۲$ فضاهای باناخ و f به ازای هر $x,y\in D_۱$ در نامساوی زیر

$$\big\|f(x+y)-f(x)-f(y)\big\|\leq\varepsilon,$$

صدق کند، آن گاه حد

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(۲^n x)}{۲^n}$$

به ازای هر $x\in D_۱$ موجود است و نگاشت جمعی منحصر به فردی مانند $T:D_۱\to D_۲$ وجود دارد به طوری که برای هر $x\in D_۱$،

$$\|f(x)-T(x)\|\leq\varepsilon.$$

در سال ۱۹۵۰، آوکی در [۴۸] قضیه هایرز را برای توابع تقریباً جمعی تعمیم داد و در سال ۱۹۷۸، دمیستوکلیس راسیاس در [۵۱] حالت کلی قضیه هایرز را به صورت زیر بیان کرد:

فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع از فضای نرمدار X به فضای باناخ Y باشد و برای هر $x, y \in X$ در

$$\big\|f(x+y) - f(x) - f(y)\big\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

صدق کند که در آن $\varepsilon > ۰$ و $۰ \leq p < ۱$ اعداد ثابتی هستند. در این صورت برای هر $x \in X$ حد $T(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(۲^n x)}{۲^n}$ وجود دارد و T یک تابع جمعی منحصر بفرد می باشد که برای هر $x \in X$ در

$$\|f(x) - T(x)\| \leq k\varepsilon\|x\|^p$$

صدق می کند و $k = \frac{۲}{۲-۲^p}$. که این مفهوم جدید به پایداری هایرز-اولام-راسیاس معروف است. بعلاوه، جان راسیاس در [۱۷، ۱۶، ۱۸] به جای تابع کنترل در پایداری هایرز-اولام-راسیاس یعنی $\varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$، تابع کنترل $\varepsilon(\|x\|^p\|y\|^p)$ را جایگزین نمود که به پایداری اولام-گاورتا-راسیاس معروف شد. گاورتا در [۳۳] این نتایج را تعمیم داد او به جای تابع کنترل در قضیه کلی هایرز-اولام-راسیاس تابع کنترل $\phi(x, y)$ را جایگزین کرد.
معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y), \tag{۱.۱}$$

به یک تابع دو-جمعی متقارن ارتباط داده می شود [۱۴، ۳۵]، که هر معادله به این شکل را معادله تابعی درجه دوم می نامیم. به خصوص به هر حل از معادله درجه دوم رابطه ی (۱.۱)، یک تابع درجه دوم گفته می شود. مساله پایداری هایرز-اولام برای معادله تابعی درجه دوم توسط اسکوف[۱] در [۱۲] برای تابع درجه دوم $f : D_۱ \to D_۲$ اثبات شد که در آن $D_۱$ یک فضای نرمدار و $D_۲$ یک فضای باناخ است. تابع f بین فضاهای برداری حقیقی، درجه دوم است اگر و فقط اگر یک تابع دو-جمعی متقارن و منحصر به فرد B وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x) = B(x, x)$. تابع دو-جمعی B در ضابطه زیر صدق کند

[۱] Skof

$$B(x,y)=\frac{۱}{۴}[f(x+y)-f(x-y)].$$

چولوا[۲] در [۳۶] نشان داد که قضیه اسکوف، زمانی که $D_۱$ یک گروه آبلی باشد نیز ثابت می شود. چرویک[۳] در [۴۰] پایداری معادلات تابعی هایرز–اولام–راسیاس از نوع درجه دوم را ثابت کرده است. به علاوه گرابیس[۴] در [۲] نتایج ذکر شده در بالا را تعمیم داده است. نظریه ی فضای ۲–نرم خطی که اولین بار در اواسط سال ۱۹۶۰ توسط گهلر[۵] در [۴۲، ۴۱] توسعه داده شد، در حالی که فضاهای ۲–باناخ بعداً توسط گهلر و وایت[۶] در [۴۳، ۵، ۴] مورد مطالعه قرار گرفته است.

در این فصل، برای هر $n \in N$، n امین عدد فیبوناچی را با F_n نمایش می دهیم. همچنین قرار می دهیم $F_۰ := ۰$. از آنجایی که $F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲}$ برای هر $n \geq ۲$ برقرار است، معادله تابعی زیر را تعریف می کنیم

$$f(x)=f(x-۱)+f(x-۲), \qquad (۲.۱)$$

که معادله تابعی فیبوناچی نامیده می شود. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی بوده و $f:\mathbb{R}\to X$ تابعی باشد که در رابطه ی (۲.۱) صدق کند، در این صورت f را یک تابع فیبوناچی می نامیم. ریشه های مثبت و منفی معادله درجه دوم $x^۲ - x - ۱ = ۰$ را به ترتیب با α و β به صورت زیر نمایش می دهیم

$$\alpha = \tfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \text{ و } \beta = \tfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲}.$$

برای هر $x \in \mathbb{R}$، منظور ما از $[x]$ همان جزء صحیح x است.

[۲]Cholewa

[۳]Czerwik

[۴]Grabiec

[۵]Gahler

[۶]White

۱.۱ جواب عمومی معادله فیبوناچی

در این بخش فرض می کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد و جواب عمومی معادله تابعی فیبوناچی را بررسی می کنیم.

قضیه ۱.۱.۱. [۴۶] تابع $f:\mathbb{R}\to X$ یک تابع فیبوناچی است اگر و فقط اگر تابع $g:[-۱,۱)\to X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x)=\begin{cases} F_{[x]+۱}g(x-[x])+F_{[x]}g(x-[x]-۱) & (x\geq ۰),\\ (-۱)^{[x]}[F_{-[x]-۱}g(x-[x])-F_{-[x]}g(x-[x]-۱)] & (x<۰).\end{cases} \tag{۳.۱}$$

اثبات. از آنجایی که $\alpha+\beta=۱$ و $\alpha\beta=-۱$، پس از رابطه ی (۲.۱) برای هر $x\in\mathbb{R}$ نتیجه می شود که

$$\begin{cases} f(x)-\alpha f(x-۱)=\beta[f(x-۱)-\alpha f(x-۲)],\\ f(x)-\beta f(x-۱)=\alpha[f(x-۱)-\beta f(x-۲)].\end{cases} \tag{۴.۱}$$

با استفاده از استقرای ریاضی، برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $n\in\{۰,۱,۲,...\}$ داریم

$$\begin{cases} f(x)-\alpha f(x-۱)=\beta^n[f(x-n)-\alpha f(x-n-۱)],\\ f(x)-\beta f(x-۱)=\alpha^n[f(x-n)-\beta f(x-n-۱)].\end{cases} \tag{۵.۱}$$

اگر $x+n$ را به جای x در تساوی اول رابطه ی (۵.۱) قرار دهیم و حاصل تساوی را بر β^n تقسیم کنیم (به همین ترتیب α^n برای تساوی دوم) و همچنین اگر در نتیجه بدست آمده $-m$ را به جای n قرار دهیم، آنگاه با قرار دادن n به جای m تساوی اول رابطه ی (۵.۱) را بدست می آوریم که $m\in\{۰,-۱,-۲,...\}$. بنابراین برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}$ تساوی رابطه ی (۵.۱) برقرار است. تساوی های اول و دوم از رابطه ی (۵.۱) را به ترتیب در β و α ضرب می کنیم. اگر نتیجه بدست امده از تساوی اول را از تساوی دوم کم

کنیم، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$ داریم

$$f(x) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} f(x-n) + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} f(x-n-1). \tag{6.1}$$

برای هر $x \geq 0$، اگر در رابطه ی (۶.۱) قرار دهیم $n = [x]$، آنگاه با استفاده از فرمول بینتس ([۴۹] قضیه ۵.۶) نتیجه می گیریم که

$$f(x) = F_{[x]+1} f(x-[x]) + F_{[x]} f(x-[x]-1).$$

اگر $x < 0$، آنگاه در رابطه ی (۶.۱) قرار می دهیم $n = [x] = -|[x]|$. از آن جایی که $\alpha\beta = -1$، با استفاده از فرمول بینتس داریم،

$$f(x) = \frac{\alpha^{-|[x]|+1} - \beta^{-|[x]|+1}}{\alpha - \beta} f(x-[x]) + \frac{\alpha^{-|[x]|} - \beta^{-|[x]|}}{\alpha - \beta} f(x-[x]-1)$$

$$= \frac{-1}{(\alpha\beta)^{|[x]|-1}} \frac{\alpha^{|[x]|-1} - \beta^{|[x]|-1}}{\alpha - \beta} f(x-[x]) + \frac{-1}{(\alpha\beta)^{|[x]|}} \frac{\alpha^{|[x]|} - \beta^{|[x]|}}{\alpha - \beta} f(x-[x]-1)$$

$$= (-1)^{[x]} F_{|[x]|-1} f(x-[x]) + (-1)^{[x]+1} F_{|[x]|} f(x-[x]-1)$$

$$= (-1)^{[x]} [F_{-[x]-1} f(x-[x]) + F_{-[x]} f(x-[x]-1)].$$

از آن جایی که $0 \leq x - [x] < 1$ و $-1 \leq x - [x] - 1 < 0$، اگر تابع $g : [-1, 1) \to X$ را به صورت $g := f|_{[-1,1)}$ تعریف کنیم، آنگاه می توانیم ببینیم که f در رابطه ی (۳.۱) صدق می کند. اکنون فرض کنیم f در رابطه ی (۳.۱) صدق کند در این صورت نشان می دهیم که f یک تابع فیبوناچی است. ابتدا فرض می کنیم که $x \geq 2$. از آن جایی که $x > x - 1 > x - 2 \geq 0$ و $x - [x] = [x-1] - (x-1)$، پس از رابطه ی (۳.۱) نتیجه می گیریم که

$$\begin{cases} f(x) = F_{[x]+۱}g(x-[x]) + F_{[x]}g(x-[x]-۱), \\ f(x-۱) = F_{[x]}g(x-[x]) + F_{[x]-۱}g(x-[x]-۱), \\ f(x-۲) = F_{[x]-۱}g(x-[x]) + F_{[x]-۲}g(x-[x]-۱). \end{cases}$$

بنابراین داریم

$$f(x-۱)+f(x-۲) = (F_{[x]}+F_{[x]-۱})g(x-[x])+(F_{[x]-۱}+F_{[x]-۲})g(x-[x]-۱)$$

$$= F_{[x]+۱}g(x-[x])+F_{[x]}g(x-[x]-۱) = f(x).$$

حال فرض می کنیم که $۱ \leq x < ۲$، در این حالت داریم $۰ \leq x-۱ < ۱$ و $-۱ \leq x-۲ < ۰$. از آنجایی که $[x]=۱$، $[x-۱]=۰$ و $[x-۲]=-۱$، در این صورت از رابطه ی (۳.۱) نتیجه می گیریم که

$$\begin{cases} f(x) = F_{۲}g(x-[x]) + F_{۱}g(x-[x]-۱), \\ f(x-۱) = F_{۱}g(x-[x]) + F_{۰}g(x-[x]-۱), \\ f(x-۲) = -[F_{۰}g(x-[x]) - F_{۱}g(x-[x]-۱)]. \end{cases}$$

از طرفی چون $F_{۰}=۰$ و $F_{۱}=F_{۲}=۱$، آنگاه داریم

$$f(x-۱)+f(x-۲) = F_{۲}g(x-[x])+F_{۱}g(x-[x]-۱) = f(x).$$

اگر $۰ \leq x < ۱$ باشد، آنگاه $-۱ \leq x-۱ < ۰$ و $-۲ \leq x-۲ < -۱$. در این حالت چون $[x]=۰$، $[x-۱]=-۱$ و $[x-۲]=-۲$، آنگاه از رابطه ی (۳.۱) نتیجه می گیریم که

$$\begin{cases} f(x) = F_۱ g(x-[x]), \\ f(x-۱) = F_۱ g(x-[x]-۱), \\ f(x-۲) = F_۱ g(x-[x]) - F_۲ g(x-[x]-۱). \end{cases}$$

بنابراین

$$f(x-۱)+f(x-۲) = F_۱ g(x-[x]) = f(x).$$

در پایان فرض می کنیم که $x < ۰$. با توجه به رابطه ی (۳.۱) داریم

$$\begin{cases} f(x) = (-۱)^{[x]}[F_{-[x]-۱} g(x-[x]) - F_{-[x]} g(x-[x]-۱)], \\ f(x-۱) = (-۱)^{[x]-۱}[F_{-[x]} g(x-[x]) - F_{-[x]+۱} g(x-[x]-۱)], \\ f(x-۲) = (-۱)^{[x]-۲}[F_{-[x]+۱} g(x-[x]) - F_{-[x]+۲} g(x-[x]-۱)]. \end{cases}$$

بنابراین تساوی زیر نتیجه می شود

$$f(x-۱)+f(x-۲) = (-۱)^{[x]}[(F_{-[x]+۱}-F_{-[x]})g(x-[x])-(F_{-[x]+۲}-F_{-[x]+۱})g(x-[x]-۱)]$$

$$= (-۱)^{[x]}[F_{-[x]-۱} g(x-[x]) - F_{-[x]} g(x-[x]-۱)] = f(x),$$

و اثبات تمام است. ■

۲.۱ پایداری هایرز-اولام معادله فیبوناچی

همان طور که در بخش قبل بیان شد α ریشه مثبت و β ریشه منفی معادله درجه دوم $x^۲ - x - ۱ = ۰$ می باشند. اکنون به اثبات پایداری هایرز-اولام معادله تابعی فیبوناچی (۲.۱) می پردازیم.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ حقیقی باشد. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > ۰$، $f : \mathbb{R} \to X$ تابعی باشد که در نامساوی زیر صدق کند

$$\|f(x) - f(x-۱) - f(x-۲)\| \le \varepsilon, \qquad (۷.۱)$$

آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ تابع فیبوناچی $G : \mathbb{R} \to X$ وجود دارد که

$$\|f(x) - G(x)\| \leq (1 + \frac{2}{\sqrt{5}})\varepsilon. \tag{۸.۱}$$

اثبات. با استفاده از معادله اول از رابطه ی (۴.۱) و رابطه ی (۷.۱) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|f(x) - \alpha f(x-1) - \beta[f(x-1) - \alpha f(x-2)]\| \leq \varepsilon.$$

اگر در نامساوی قبل $x-k$ را به جای x قرار دهیم، آنگاه داریم

$$\|f(x-k) - \alpha f(x-k-1) - \beta[f(x-k-1) - \alpha f(x-k-2)]\| \leq \varepsilon,$$

و بعلاوه برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{Z}$ داریم

$$\begin{aligned}&\|\beta^k[f(x-k) - \alpha f(x-k-1)] - \beta^{k+1}[f(x-k-1) - \alpha f(x-k-2)]\| \\ &\leq |\beta|^k\varepsilon,\end{aligned} \tag{۹.۱}$$

با استفاده از رابطه ی (۹.۱) برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned}&\|f(x) - \alpha f(x-1) - \beta^n[f(x-n) - \alpha f(x-n-1)]\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\beta^k f(x-k) - \alpha f(x-k-1) - \beta^{k+1}[f(x-k-1) - \alpha f(x-k-2)]\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\beta|^k\varepsilon.\end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

برای هر $x \in \mathbb{R}$، از رابطه ی (۹.۱) نتیجه می گیریم که $\{\beta^n[f(x-n) - \alpha f(x-n-1)]\}$ یک دنباله کشی است (با توجه به این که $|\beta| < 1$). از آن جایی که X کامل است، پس می توانیم تابع $G_1 : \mathbb{R} \to X$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$G_1(x) = lim_{n\to\infty}\beta^n[f(x-n) - \alpha f(x-n-1)].$$

با استفاده از تعریف G_1، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$G_1(x-1)+G_1(x-2) = \beta^{-1}lim_{n\to\infty}\beta^{n+1}[f(x-(n+1))-\alpha f(x-(n+1)-1)]$$

$$+\beta^{-2}lim_{n\to\infty}\beta^{n+2}[f(x-(n+2))-\alpha f(x-(n+2)-1)] = \beta^{-1}G_1(x)+\beta^{-2}G_1(x)$$

$$= G_1(x).$$

بنابراین G_1 یک معادله فیبوناچی است. اگر n به سمت بی نهایت میل کند، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ از رابطه ی (۱۰.۱) نتیجه می گیریم که

$$\|f(x) - \alpha f(x-1) - G_1(x)\| \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}\varepsilon. \tag{11.1}$$

از طرفی با استفاده از معادله دوم رابطه ی (۴.۱) و رابطه ی (۷.۱) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|f(x) - \beta f(x-1) - \alpha[f(x-1) - \beta f(x-2)]\| \leq \varepsilon.$$

مشابه رابطه ی (۹.۱) اگر در نامساوی بالا به جای x، $x+k$ قرار دهیم، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{Z}$ داریم