دانشگاه بناب

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

بازه‌های شمول و غیرشمول برای مقادیر ویژه حقیقی ماتریس‌های حقیقی

استادان راهنما

دکتر حمیدرضا مراثی و دکتر سهراب بزم

پژوهشگر

اکرم جلیلی

مهرماه ۱۳۹۱

به نام آن کرامت بی انتها و عزت بخش بی منتهی

بر سر آنم در ظرف واژه هایی که همچون ابریقی شکسته نتوان حاصل موج باشد، بیکرانگی تموج احساساتم را به محضر عزیزان و بزرگانی تقدیم نمایم. بزرگانی که که در جوار وجودشان، در حلقه صحبت و در پرتو نگاه و سکوتشان از برزخ بلاتکلیفی و آسیمه سری و تردیدهای بی ثمر و نوسان چگونه زیستن و چسان رفتن، رهایی یافتم. راهنمایانی که چونان جرقه ای اعجازگر و بارقه ای انسان ساز در برابرم افقی دگر گشودند و ملکوتی و تولدی دگر.

اساتیدی که در پرتو ریحانگی کاملشان بالیدیم و پیچک وجودم بر ساقه تناور بودنشان نشو و نما یافت و به همت کلام سحرآمیز دانائی شان کاریزها در اعماق درونم جوشیدن گرفت و به سرانگشت عطوفتشان، چشمه های سرد و زلال در پنهانی ترین دهلیزهای روحم سرباز زد.

آنانی که هنر فکر کردنم آموختند. درس شکیبایم دادند و با چشمان هوشیار در زیر این کوتاه سقف آسمان، چگونه دیدنم را. و اما دریغ! که پای قلم، جلال اندیشه و ظرافت خیال را بر ستیغ عظمتشان راهی نیست تا مفسر و ترجمان شوق و الهامی که در سینه ام تنگی می نماید، گردد.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه ای که میان مردم مرا مرتبه می بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

لیکن با این بضاعت قلیل بر خود فرض می دانم به پاس زحمات دیرینه، سپاس بی کرانم را از تلاش های اساتید فرزانه و ارجمندم که در طی سال های تحصیلی بهره مندم نموده اند ابراز دارم. استاد ارجمند جناب آقای دکتر مرائی که با خوشرویی پذیرایم بود و با تواضع و فروتنی مثال زدنی شان راهنمایی های خود را دریغ نورزیدند. استاد فرهیخته جناب آقای دکتر بزم که با تیزبینی و تدقیق علمی کم نظیرشان راه گشایم بودند و از ژرفای دانش، تدبر و تعمق ایشان بهره های فراوان برده ام. استاد ادیب و فرهیخته جناب آقای دکتر حاجی بدلی، که روشن اندیشی و روشن ضمیری ایشان الگویی والا برایم خواهد بود.

از همسر عزیزم، به خاطر یاری و پشتیبانی اینجانب در طول تدوین و تکمیل این پایان نامه تشکر می کنم. از دوست عزیزم خانم هاجر شرقی به خاطر راهنماییها و کمکهای ایشان در تایپ این پایان نامه و از تمامی دوستان عزیزم خانم ها عظیم پور، وفابخش، ثباتی، قهرمانی و بقیه دوستانم به خاطر راهنماییها و تشویق هایشان تشکر مینمایم و برایشان آرزوی توفیق روزافزون را دارم.

تقدیم به:

مادر عزیزم،

شمع فروزانی که شعله‌اش چراغ راهم بود

و

همسرم که وجودش همواره تکیه‌گاه من است

و همچنین استاد بزرگوارم، دکتر بزم

به پاس زحمت‌های بی دریغ شان.

بارپروردگارا

دل مرا روشن و تابناک، قدمهای مرا ثابت و استوار، گردن مرا کشیده و راست، دیدگان مرا بینا و پرنور وبدن مرا سالم و قوی نگاهدار تا این همه را در راه کمک به خلق و بهبود جامعه‌ای که در میان آن زندگی می‌کنم به کار برم.

با خدا باش، پادشاهی کن

بی‌خدا باش، هرچه خواهی کن

اکرم جلیلی
مهرماه ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: جلیلی نام: اکرم

عنوان: بازه‌های شمول و غیرشمول برای مقادیر ویژه حقیقی ماتریس‌های حقیقی

استادان راهنما : دکتر حمیدرضا مراثی و دکتر سهراب بزم

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه بناب

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: مهرماه ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۹۹

کلید واژه‌ها: مقدار ویژه، بازه غیرشمول، بازه شمول، ماتریس تصادفی، بیضی‌های کاسینی.

چکیده

یک ماتریس مربعی حقیقی با مجموع درایه‌های سطری مثبت، $C-$ ماتریس نامیده می‌شود اگر همه درایه‌های غیر قطری آن از پایین توسط میانگین سطری متناظرش کراندار باشند. در این پایان نامه، ابتدا خانواده جدیدی از ماتریس‌های نامنفرد، به نام $MC-$ ماتریس ها، که خانواده $C-$ ماتریس ها را شامل هستند، معرفی می‌شود. سپس با استفاده از ویژگی‌های یک زیر خانواده از $MC-$ ماتریس‌ها، بازه‌های غیرشمول جدیدی برای مقادیر ویژه حقیقیِ ماتریس‌های حقیقی ارائه می‌دهیم که در ادامه این بازه‌ها برای تعیین موقعیت مقادیر ویژه غیر یک ماتریس‌های تصادفی به کار می‌روند. همچنین یک بازه شمول برای قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه ماتریس‌های حقیقی ارائه می‌شود. در انتها کران‌های بالا و پایینی برای مقادیر ویژه ماتریس‌های حقیقی با اعضای غیر قطری نامنفی، به دست می‌آیند و شرایطی کافی ارائه می‌شود که نشان می‌دهند بازه‌های شمول حقیقی به دست آمده در [۷] زیرمجموعه‌هایی از بازه‌های تولید شده به وسیله بیضی‌های کاسینی هستند.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اساسی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به معرفی برخی تعاریف و مفاهیم اساسی از جبر خطی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ابتدا انواع ماتریس‌ها، خواص مختلف آنها و قضایای مربوط به آنها را بیان می‌کنیم. در بخش سوم به بحث در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس مربعی می‌پردازیم. در این بخش چندجمله‌ای مشخصه یک ماتریس مربعی، که ریشه‌های آن مقادیر ویژه ماتریس مربوطه هستند، معرفی می‌شود. همچنین چند قضیه در ارتباط با مقادیر ویژه بیان می‌کنیم و در انتهای بخش تقریبی از مقادیر ویژه ماتریس‌ها با استفاده از قضیه گرشگورین ارایه می‌شود.

۲.۱ ماتریس‌ها و انواع مختلف آن

تعریف ۱.۲.۱. ماتریس $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ قطری گفته می‌شود هر گاه برای $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$ و با $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ نشان داده می‌شود. A بالا مثلثی گفته می‌شود هرگاه برای $i > j$، $a_{ij} = 0$. ماتریس پایین مثلثی به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. ترانهاده ماتریس $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ با A^T نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

همچنین مزدوج A با A^* نشان داده می‌شود وبه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

واضح است اگر A ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد آن‌گاه $A^* = A^T$.

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس $P_{n\times n}$ متعامد گفته می‌شود هرگاه $P^TP = I_n$ و یکانی نامیده می‌شود هرگاه $P^*P = I_n$ که در آن I_n ماتریس همانی از مرتبه n است.

تعریف ۴.۲.۱. ماتریس A متقارن گفته می‌شود هرگاه $A^T = A$ و هرمیتی نامیده می‌شود هرگاه $A^* = A$.

تعریف ۵.۲.۱. ماتریس متقارن و حقیقی A را معین مثبت گوییم هرگاه برای هر بردار غیرصفر X از $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$X^tAX > 0.$$

ماتریس متقارن و حقیقی A را معین نامنفی (یا نیمه معین مثبت) گوییم هرگاه برای هر بردار X از $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$X^tAX \geq 0.$$

قضیه ۶.۲.۱. *اگر A ماتریسی متقارن و معین مثبت (معین نامنفی) باشد آن‌گاه مقادیر ویژه آن همگی مثبت (نامنفی) هستند.*

برهان. فرض کنید λ یک مقدار ویژه دلخواه ماتریس A و X یک بردار ویژه متناظر آن باشد. لذا

$$AX = \lambda X, \quad X \neq 0.$$

درنتیجه

$$X^TAX = \lambda X^TX.$$

با توجه به اینکه $X^TX = \|X\|_2^2$ و X^TAX مثبت (نامنفی) هستند، می‌بایست $\lambda > 0$. $\square$

تعریف ۷.۲.۱. اثر ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ مجموع عناصر قطری آن تعریف می‌شود و با $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. ماتریس A مقدماتی از مرتبه n نامیده می‌شود هرگاه با تعویض جای دو سطر یا دو ستون در I_n به دست آمده باشد.

تعریف ۹.۲.۱. ماتریس P یک ماتریس جایگشت گفته می‌شود هرگاه P حاصل ضربی از ماتریس‌های مقدماتی باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. ماتریس A را قطر غالب اکید سطری گویند هرگاه به ازای هر i داشته باشیم،

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad , j \neq i,$$

و آن را قطر غالب اکید ستونی گویند هرگاه به ازای هر j داشته باشیم،

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad , j \neq i.$$

اگر A قطر غالب اکید سطری و ستونی باشد آن را قطر غالب اکید گویند.

قضیه ۱۱.۲.۱. *اگر A قطر غالب اکید باشد A نامنفرد است.*

برهان. فرض کنید A قطر غالب اکید سطری باشد و داشته باشیم $|A| = 0$ (فرض خلف). بنابراین بردار مخالف صفر X وجود دارد به قسمی که $AX = 0$. فرض کنید $|x_k| = \max_i |x_i|$ در این صورت داریم:

$$\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j = 0.$$

لذا

$$\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j = -a_{kk} x_k.$$

در نتیجه

$$|a_{kk}||x_k| = |\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j|.$$

پس

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||\frac{x_j}{x_k}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

که با قطر غالب اکید سطری بودن A تناقض دارد. بنابراین A نامنفرد است. حال اگر A قطر غالب اکید ستونی باشد در این صورت A^T قطر غالب اکید سطری و نامنفرد است. چون $|A| = |A^T|$ پس A نیز نامنفرد است. □

تعریف ۱۲.۲.۱. ماتریس A را قطر غالب دوگان [۱] می‌نامند هرگاه بازای هر $i \neq j$،

$$|a_{ii}||a_{jj}| \geq (\sum_{k\neq i} |a_{ik}|)(\sum_{k\neq j} |a_{jk}|).$$

و آن را قطر غالب اکید دوگان [۲] می‌نامند هر گاه رابطه به طور اکید برقرار باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید $Q_{k,n}$ که در آن $k, n \in N$ و $1 \leq k \leq n$ مجموعه همه دنباله‌های افزایشی شامل k عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی n باشد. اگر $\alpha \in Q_{k,n}$، مکمل α یعنی $\alpha' \in Q_{n-k,n}$ دنباله افزایشی از $\mathbb{N}\backslash\alpha$ است که دوباره مرتب شده است. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد. برای $l \leq n$ و $k \leq m$ و برای $\alpha \in Q_{k,m}$ و $\beta \in Q_{l,n}$، زیرماتریس $k \times l$ از A که سطرهای آن از دنباله α و ستون‌های آن از دنباله β انتخاب شده است را با $A[\alpha|\beta]$ نشان می‌دهیم. زیرماتریس‌های اصلی A به صورت $A[\alpha] = A[\alpha|\alpha]$ تعریف می‌شوند.
ماتریس ذیل یک زیرماتریس اصلی ماتریس A از مرتبه k است که در آن $(j = 1, 2, \ldots, n)i_j$ نشان‌دهنده سطر (ستون) i_j ام ماتریس A و a_{i_f,i_g} درایه سطر i_f ام متناظر با ستون i_g از ماتریس A است.

$$A_{i_1i_2\ldots i_k} = \begin{bmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \ldots & a_{i_ki_k} \end{bmatrix}, \{i_1, \ldots, i_n\} \in \alpha.$$

$A_{12\ldots k}$زیرماتریس پیشرو A از مرتبه k نامیده می‌شود. دترمینان زیرماتریس‌های پیشرو A ، مینورهای اصلی A نامیده می‌شوند .

تعریف ۱۴.۲.۱. یک ماتریس با مینورهای اصلی مثبت را یک $P-$ماتریس گویند.

---

[۱] Doubly diagonally dominant

[۲] Doubly strictly diagonally dominant

تعریف ۱۵.۲.۱. ماتریس حقیقی A را $Z-$ماتریس گویند هرگاه درایه‌های غیرقطری آن همگی نامثبت باشند یعنی $a_{ij} \leq 0$، برای $i \neq j$.

تعریف ۱۶.۲.۱. ماتریس نامنفی و $n-$ مربعی A $(n \geq 2)$ تحویل‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه قابل تبدیل به ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$$

باشد که در آن B و D زیر ماتریس‌های مربعی از A هستند. در غیر این‌صورت A تحویل‌ناپذیر گفته می‌شود.
بنابه تعریف واضح است که اگر $A[i_1, i_2, \ldots, i_s \mid j_{s+1}, j_{s+2}, \ldots j_n]$ زیرماتریسی از A باشد که درایه‌های آن در نقاط تقاطع سطرهای i_1، i_2، ... و i_s و ستون‌های j_{s+1}، j_{s+2}، ... و j_n از A قرار دارند آن‌گاه A تحویل‌ناپذیر است اگر وتنها اگر جایگشت $(i_1, i_2, \ldots, i_s, j_{s+1}, j_{s+2}, \ldots j_n)$ از $(1, 2, \ldots, n)$ وجود داشته باشد به طوری که،

$$A[i_1, i_2, \ldots, i_s \mid j_{s+1}, j_{s+2}, \ldots j_n] = 0$$

لم ۱۷.۲.۱. *فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. اگر A مثبت باشد یا همه درایه‌های غیرقطری آن غیرصفر باشند آن‌گاه A تحویل‌ناپذیر است.*

برهان. به ازای هر ماتریس جایگشت P، درایه‌های غیرقطری P^TAP همان درایه‌های غیرقطری A هستند با این تفاوت که احتمالا جای آنها تغییر کرده است، لذا P^TAP نمی‌تواند ماتریسی به صورت $\begin{bmatrix} M & N \\ O & Q \end{bmatrix}$ باشد که در آن M و Q زیرماتریس‌هایی مربعی از A هستند. بنابراین A تحویل‌ناپذیر است. □

۳.۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

تعریف ۱.۳.۱. اگر A ماتریس مربعی باشد اسکالر λ یک مقدار ویژه A نامیده می‌شود هرگاه بردار $X \neq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $AX = \lambda X$. مجموعه مقادیر ویژه A با $\sigma(A)$ نشان داده می‌شود و آن را طیف A می‌گویند. بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ قدر مطلق ریشه پرون ماتریس A گفته می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد چندجمله‌ای تکین از درجه n، $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ چندجمله‌ای مشخصه A و معادله $p(\lambda) = 0$ معادله مشخصه A نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۳.۱. *اگر A یک ماتریس نامنفی و $n \times n$ باشد آنگاه A یک مقدار ویژه حقیقی و نامنفی مانند r دارد به طوری که*

$$r \geq |\lambda_i|,$$

که در آن λ_1، λ_2، ...، λ_n مقادیر ویژه A هستند. همچنین یک بردار ویژه نامنفی متناظر با r برای A وجود دارد. r مقدار ویژه ماکسیمال (ریشه پرون) و هر بردار ویژه نامنفی متناظر با آن، بردار ویژه ماکسیمال برای A نامیده می‌شود.
اثبات: به قضیه ۲.۴.۲ از [۱۸] رجوع شود.

قضیه ۴.۳.۱. *اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد گزاره‌های زیر معادلند:*

(i) λ *یک مقدار ویژه A است.*

(ii) $p(\lambda) = 0$.

قضیه ۵.۳.۱. *دترمینان هر ماتریس مربعی حاصلضرب مقادیر ویژه آن است.*

برهان. داریم :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n),$$

که λ_1، ... و λ_n مقادیر ویژه A هستند. به ازای $\lambda = 0$ داریم:

$$p(0) = \det(-A) = (-1)^n \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

از طرفی $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$، لذا

$$(-1)^n \det(A) = (-1)^n \lambda_1 \ldots \lambda_n,$$

در نتیجه

$$\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

□

قضیه ۶.۳.۱. *اگر A حقیقی و متقارن باشد مقادیر ویژه آن همگی حقیقی هستند.*

برهان. فرض کنید λ یک مقدار ویژه دلخواه ماتریس A و X بردار ویژه متناظر آن باشد. لذا

$$AX = \lambda X, \quad X \neq 0.$$

در نتیجه

$$X^T A^T = \bar{\lambda} X^T,$$

و چون A متقارن است پس $A^T = A$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$X^T A = \bar{\lambda} X^T \quad \Rightarrow \quad X^T A X = \bar{\lambda} X^T X,$$
$$X^T (\lambda X) = \bar{\lambda} X^T X \quad \Rightarrow \quad \lambda X^T X = \bar{\lambda} X^T X.$$

پس $\bar{\lambda} = \lambda$ و در نتیجه λ حقیقی است. □

تعریف ۷.۳.۱. اگر λ مقدار ویژه‌ای از A باشد فضای پوچ $\lambda I_n - A$ فضای ویژه A متناظر با λ نامیده می‌شود. بستایی هندسی λ بعد این فضا نامیده می‌شود و با ρ_λ نشان داده می‌شود. همچنین بستایی جبری λ چندگانگی آن به عنوان ریشه چندجمله‌ای مشخصه تعریف می‌شود و با $\alpha(\lambda)$ نشان داده می‌شود.

لم ۸.۳.۱. *اگر $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ دو ماتریس باشند، مقادیر ویژه غیر صفر BC و CB یکسان هستند.*

برهان. اگر $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه BC باشد آن‌گاه داریم:

$$\exists X \neq 0, (BC)X = \lambda X.$$

بنابراین

$$B(CX) = \lambda X.$$

با ضرب C از سمت چپ در طرفین رابطه بالا داریم:

$$CB(CX) = \lambda(CX).$$

چون $X \neq 0$ پس $\lambda X \neq 0$ و طبق رابطه بالا داریم $CX \neq 0$. بنابراین $\lambda \in \sigma(CB)$ و CX یک بردار ویژه متناظر با آن است. □

لم ۹.۳.۱. *اگر $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه A باشد و α یک عدد ثابت باشد، آن‌گاه $\lambda + \alpha$ مقدار ویژه ماتریس $A + \alpha I$ است.*

برهان. فرض کنید λ مقدار ویژه A و X بردار ویژه نظیر آن باشد. در این صورت

$$AX = \lambda X, X \neq 0.$$

با افزودن αX به طرفین رابطه بالا داریم :

$$AX + \alpha X = \lambda X + \alpha X,$$

و با فاکتورگیری از X داریم :

$$(A + \alpha I)X = (\lambda + \alpha)X.$$

لذا $\alpha + \lambda$ مقدار ویژه ماتریس $A + \alpha I$ نظیر بردار ویژه X است. □

لم ۱۰.۳.۱. *اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $u, v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ آن‌گاه*

$$\det(A + \alpha uv^T) = \det(A).(1 + \alpha v^T A^{-1} u).$$

برهان. داریم:

$$\det(A + \alpha uv^T) = \det[A(I + \alpha A^{-1} uv^T)].$$

استفاده از لم ۹.۳.۱ نتیجه می‌دهد:

$$\det(A + \alpha uv^T) = [\det(A)][\det(I + \alpha A^{-1} uv^T)] = [\det(A)].\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(I + \alpha A^{-1} uv^T)$$
$$= [\det(A)].\prod_{i=1}^{n}[1 + \alpha\lambda_i(A^{-1} uv^T)].$$

با فرض $B = A^{-1}u$ و $C = v^T$ و استفاده از لم‌های ۹.۳.۱ و ۸.۳.۱ ، مقادیر ویژه $BC = A^{-1}uv^T$ و $CB = v^T A^{-1} u$ یکی هستند. چون $v^T A^{-1} u$ یک عدد (ماتریس 1×1) است پس تنها مقدار ویژه آن خودش می‌شود، لذا $\prod_{i=1}^{n}$ فقط یک جمله است یعنی $(1 + \alpha v^T A^{-1} u)$. بنابراین:

$$\det(A + \alpha uv^T) = \det(A).\prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha\lambda_i(v^T A^{-1} u)) = [\det(A)].(1 + \alpha v^T A^{-1} u).$$

□

قضیه ۱۱.۳.۱. *مقادیر ویژه A و A^T یکسان هستند ولی در حالت کلی بردارهای ویژه آن‌ها متفاوت می‌باشند.*

برهان. با توجه به تساوی دترمینان یک ماتریس با دترمینان ترانهاده آن داریم:

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)^T = \det(\lambda I - A^T).$$

لذا ماتریس‌های A و A^T دارای چندجمله‌ای مشخصه یکسان هستند و در نتیجه مقادیر ویژه آن‌ها یکسان است. در حالت کلی ارتباطی بین بردارهای ویژه ماتریس‌های A و A^T وجود ندارد. زیرا بردارهای ویژه A جواب دستگاه $(\lambda I - A)X = 0$ و بردارهای ویژه A^T جواب دستگاه $(\lambda I - A^T)X = 0$ می‌باشند و در حالت کلی ارتباطی بین جواب‌های دو دستگاه فوق وجود ندارد. $\square$

قضیه ۱۲.۳.۱. *اگر A یک ماتریس $n \times n$ تحویل‌ناپذیر و نامنفی باشد آن‌گاه بستایی جبری مقدار ویژه ماکسیمال آن یک است.*
اثبات: به قضیه ۳.۴.۲ از [۱۷] رجوع شود.

قضیه ۱۳.۳.۱. *اگر $A = (a_{ik})_{1\leq i,k\leq n}$ و λ مقدار ویژه‌ای از A باشد، آن‌گاه $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ که در آن C_i گوی به مرکز a_{ii} و شعاع $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ است.*

برهان. فرض کنید که λ یک مقدار ویژه دلخواه A و $X \neq 0$ یک بردار ویژه نظیر λ باشد و

$$\|X\|_\infty = \max_j |x_j| = |x_i|.$$

با توجه به اینکه $AX = \lambda X$، برای مولفه i−ام داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \lambda x_i,$$

در نتیجه

$$\lambda x_i - a_{ii}x_i = \sum_{k\neq i} a_{ik}x_k,$$

بنابراین

$$|\lambda - a_{ii}||x_i| = |\sum_{k\neq i} a_{ik}x_k| \leq \sum_{k\neq i} |a_{ik}||x_k|,$$

و لذا

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{k\neq i} |a_{ik}|\frac{|x_k|}{|x_i|} \leq \sum_{k\neq i} |a_{ik}|.$$

پس $\lambda \in C_i$ و در نتیجه $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. $\square$

C_i که در قضیه فوق آمده است قرص گرشگورین متناظر با سطر i–ام ماتریس A ، یا i–امین ناحیه سطری گرشگورین برای ماتریس A، گفته می‌شود. نواحی ستونی گرشگورین متناظر با A به طور مشابه تعریف می‌شود.

فصل ۲

بیشینه‌ای از تعیین موقعیت مقادیر ویژه ماتریس‌های حقیقی

۱.۲ مقدمه

چندین ناحیه شمول در صفحه مختلط برای مقادیر ویژه یک ماتریس در نظر گرفته شده است: قرص‌های گرشگورین [۹]، بیضی‌های کاسینی برائر [۲، ۱۰]، مجموعه‌های لمنیسکات برالدی [۴][1] و مجموعه‌های مینیمال گرشگورین [۷][2] . اخیرا این مجموعه‌ها در [۱] با هم مقایسه شده‌اند و در [۱۶] نواحی شمول دیگری ارایه شده‌اند. به منظور مشخص کردن قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه یک ماتریس حقیقی، روش‌هایی متفاوت با قرص‌های گرشگورین و بیضی‌های کاسینی برائر به ترتیب در [۵، ۶] ارایه شده‌اند. یک ابزار کلیدی در ارایه این روش‌های متفاوت از هم، استفاده از یک رده از ماتریس‌های حقیقی با دترمینان مثبت است که $B-$ماتریس‌ها نامیده می‌شوند.
در [۱۴] ثابت شده است که این ماتریس‌ها دارای دترمینان مثبت هستند و اولین کاربرد آن در تعیین محدوده مقادیر ویژه حقیقی یک ماتریس حقیقی عنوان شده است. در [۵، ۱۷] ویژگی‌های این ماتریس‌ها بررسی شده‌اند و از این ویژگی‌ها برای تعیین محدوده مقادیر ویژه ماتریس‌های حقیقی استفاده شده است. در بخش دوم برخی از این کابردها برای تعیین محدوده مقادیر ویژه حقیقی یک ماتریس حقیقی مطرح می‌گردد.
در این بخش رده $\bar{B}-$ماتریس‌ها و خاصیتی از آن‌ها در قضیه ۳.۲.۲ معرفی می‌شود و در قضیه ۴.۲.۲، این رده از ماتریس‌های نامنفرد برای به دست آوردن نتیجه‌ای برای تعیین محدوده مقادیر ویژه حقیقی یک ماتریس حقیقی، به وسیله مجموعه‌ای از بازه‌ها به نام $\bar{B}-$بازه‌های سطری، به کار می‌روند. این نتیجه دارای طبیعتی شبیه قضیه قرص‌های گرشگورین است. در قضیه ۶.۲.۲ محدوده قسمت حقیقی مقادیر ویژه مختلط ماتریس‌های حقیقی تعیین شده است که قسمت دوم آن برخلاف قسمت دوم قضیه ۴.۲.۲، می‌تواند روی هر ماتریس حقیقی اعمال شود.
در بخش سوم، رده دیگری از ماتریس‌های حقیقی نامنفرد، که $C-$ماتریس‌ها نامیده می‌شوند، معرفی شده‌اند. در قضیه ۴.۳.۲ از این ماتریس‌ها استفاده شده است تا برای ماتریس‌های حقیقی یک بازه باز(که بازه غیرشمول سطری نامیده می‌شود) معرفی شود به طوری که هیچ مقدار ویژه حقیقی این ماتریس‌ها در آن قرار نداشته باشد.
در بخش چهارم، از بازه غیرشمول سطری استفاده شده است تا یک کران بالا برای مقادیر ویژه حقیقی غیر یک از ماتریس‌های تصادفی، بر حسب کوچکترین درایه غیرقطری آن‌ها ارایه شود.
در بخش پنجم، ماتریس‌هایی بررسی شده‌اند که درایه‌های غیرقطری آن‌ها پراکندگی محدود دارند. به

[1] Brualdi lemniskata sets
[2] Minimal Gerschgorin sets

ویژه این نتایج می‌تواند برای ماتریس‌های A که $sJ \leq A \leq 2sJ$ و در آن $s > 0$ و J ماتریسی است که همه درایه‌های آن یک هستند به کار رود. در قضیه ۱.۵.۲ نشان داده شده است که برای چنین ماتریس‌هایی، بازه غیرشمول سطری ناتهی است و بازه‌های شمول برای مقادیر ویژه حقیقی، که در [۵، ۱۷] به دست آمده‌اند، و $\bar{B}-$بازه‌ها نامیده می‌شوند، اطلاعات بیشتری نسبت به بازه‌های حقیقی که توسط قرص‌های گرشگورین به دست آمده‌اند فراهم می‌کنند. همچنین یک کران پایین برای قسمت‌های حقیقی همه مقادیر ویژه پیدا می‌شود. هنگامی که پراکندگی درایه‌های غیرقطری ماتریس کاهش می‌یابد، $\bar{B}-$ بازه‌های شمول و بازه غیرشمول سطری اطلاعات دقیقتری را ارایه می‌دهند، دقیقا مشابه با حالتی که اگر ماتریس مورد بحث به یک ماتریس قطر غالب شباهت داشته باشد آنگاه قرص‌های گرشگورین اطلاعات دقیقتری در مورد موقعیت مقادیر ویژه می‌دهند.

۲.۲ کاربرد $B-$ ماتریس‌ها در تعیین موقعیت مقادیر ویژه حقیقی ماتریس‌های حقیقی

تعریف ۱.۲.۲. ماتریس حقیقی و مربعی $A = (a_{ik})_{1\leq i,k\leq n}$ با مجموع‌های سطری مثبت را یک $B-$ ماتریس گوییم هرگاه تمام درایه‌های غیرقطری آن از بالا به میانگین سطری متناظر محدود شده باشند، یعنی به ازای $i = 1, \ldots, n$ داشته باشیم:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0, \quad \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}) > a_{ij}, \quad \forall j \neq i.$$

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

داریم:

$$\sum_{k=1}^{2} a_{1k} = 3 > 0, \quad (\sum_{k=1}^{2} a_{2k}) = 2 > 0$$

و همچنین