بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی بابل
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان:

S–عمل‌ها و S–زیرعمل‌ها

استاد راهنما:

دکتر حسین هدایتی

استاد مشاور:

دکتر مهران مطیعی

نگارش :

غلامرضا طالش‌تبار دولتی

شهریور ۹۱

قدردانی

خداوند متعال را شاکرم که این توفیق را نصیب من نمود تا این پایان نامه را به پایان برسانم. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از استاد فرزانه

جناب آقای دکتر حسین هدایتی

که با راهنمایی‌های خود باعث فراهم آوردن فرصتی جهت تحقیق در این زمینه شدند خاضعانه سپاس‌گزاری نمایم.

همچنین از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر مهران مطیعی کمال تشکر را دارم و از اساتید گروه ریاضی جناب آقای دکتر بهرام محمدزاده و سرکار خانم دکتر سمیه خادملو که در طول تحصیل زحمتهای زیادی کشیده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همواره سپاس‌گزار پدر و مادر مهربانم هستم که همیشه مشوق من بوده‌اند و از همسر گرامیم که در راه پیشرفتم از هیچ تلاشی فروگذار نکرده‌اند تشکر می‌نمایم.

تقدیم به:

پدر و مادر و همسر

مهربانم

چکیده

در این پایان‌نامه، هدف بررسی $S-T$–دوعمل‌ها و تعمیم آنهاست. به این منظور در فصل دوم به مفهوم $S-T$–دوعمل و زیردوعمل‌های آنها پرداخته و زیرساختارهای آن را معرفی می‌کنیم. سپس در فصل سوم مطالعه زیرعمل‌های (α,β)–فازی در یک S–عمل و مشخص‌سازی این زیرعملها به وسیله S–عمل‌های هموار صورت می‌گیرد و قضایای مهمی را در این فصول ثابت می‌کنیم. در نهایت در فصل چهارم مفهوم مجموعه‌های هموار (فازی) و مطالعه ساختار آنها روی $S-T$–دوعمل‌ها را مطرح می‌کنیم.

کلمات کلیدی : $S-T$–دوعمل، زیردوعمل و زیرعمل (α,β)–فازی، $S-T$–دوعمل هموار.

پیشگفتار

در سال ۱۹۶۵ استاد ایرانی‌تبار دانشگاه برکلی لطفی‌زاده[1] نظریه مجموعه های فازی را در [۲۳] ارائه نمود و ابزاری قوی در اختیار محققان رشته‌های مختلف قرار داد تا رفتار دستگاه های مختلف را مورد مطالعه و بررسی نوینی قرار دهند. گرچه در دهه ۱۹۷۰ و اوایل دهه ۱۹۸۰ مخالفان جدی برای نظریه فازی وجود داشت، اما امروز هیچ‌کس نمی‌تواند ارزش‌های منطق فازی و کنترل فازی را منکر شود. زمینه‌های پژوهش و تحقیق در زمینه نظریه فازی بسیار گسترده می‌باشد. پژوهش‌گران علاقه‌مند می‌توانند با پژوهش و تحقیق در این زمینه باعث رشد و شکوفایی هرچه بیشتر نظریه فازی شوند.

اگر بخواهیم نظریه مجموعه‌های فازی را توضیح دهیم، باید بگوییم نظریه‌ای است بر اقدام در شرایط عدم اطمینان؛ این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد.

درسال ۱۹۸۰ لیو[2] در [۴] مفهوم نقاط فازی را تعریف کردند. تعریف مورالی[3] از مفهوم تعلق $(\in)$ به زیرمجموعه‌های فازی که تحت یک هم ارزی طبیعی روی زیرمجموعه های فازی مطرح گردید، نقش عمده‌ای در تعمیم زیرساختارهای فازی بازی می‌کند.

تئوری مجموعه هموار در سال ۱۹۹۹ توسط مولود تسو[4] در [۱۷] ارائه شد. هدف اصلی این تئوری برداشتن مشکلات وابسته به تکنیک‌های رفتاری که قطعی نیستند به طوری که پایه ریاضیات و تئوری احتمال و تئوری مجموعه فازی می‌باشند.

---

[1] Zadeh

[2] Liu

[3] Murali

[4] Molod Sov

مجی[5] و بیسواز[6] در [۱۴] انواع مختلفی از عملیات روی مجموعه هموار را ارائه و روی آنها کار کردند.

در مقالات مختلف نامهای مختلفی برای $S-$عمل‌ها وجود دارد این نامها عبارتند از: $M-$مجموعه، $S-$مجموعه، $S-$سیستم، $S-$مجازی، اپراتور منوئید، مبدل نیم‌گروها یا منوئید انتقالی و $\cdots$.

در مفاهیم جبری این موضوع مشابه عمل‌های گروهی می‌باشد. از دیدگاه علوم کامپیوتر، نیمه‌مجازیهایی که کاربرد دارند، فقط ورودی دارند اما خروجی ندارند. کاربرد $S-$عمل‌ها در تئوری کدگذاری و تئوری غیرمجازی می‌باشد که در [۳] وجود دارد. در جهان واقعی چنین واقعیت وجود ندارد. همه مدل ابزاری کلاسیک ریاضی که با آنها سروکار داریم غیرمجازی، دقیق، واقعی می‌باشند و دلایل و محاسبات محیط مجازی را کامل می‌کنند.

---

[5] Maji

[6] Bis Was

فهرست مطالب

فصل ۱ – تعاریف و پیش‌نیازها

۱.۱ S–عمل راست و T–عمل چپ ۲

۲.۱ مجموعه‌های هموار ۵

۳.۱ مجموعه‌های فازی هموار ۸

فصل ۲ – ایزومورفیسم و حاصل‌ضرب $S-T$–دوعمل‌ها

۱.۲ دوعمل و زیردوعمل ۱۲

۲.۲ خارج‌قسمت $S-T$–دوعمل‌ها بر اساس رابطه هم‌ارزی ۱۳

۳.۲ قضایای ایزومورفیسم روی $S-T$–دوعمل‌ها ۱۷

فصل ۳ – S–عمل‌های فازی تعمیم‌یافته و مشخص‌سازی آنها به وسیله S–عمل‌های هموار

۱.۳ S–عمل‌های هموار ۳۱

۲.۳ زیرعمل‌های (α,β)–فازی ۳۵

۳.۳ مشخص‌سازی زیرعمل‌های تعمیم‌یافته به وسیله Sعمل‌های هموار ۳۹

۴.۳ کاربرد استلزام‌های فازی ۴۶

فصل ۴ – $S-T$–دوعمل‌های هموار (فازی)

۱.۴ مجموعه‌های هموار و $S-T$–دوعمل‌های هموار ۵۱

۲.۴ $S-T$–دوعمل‌های فازی هموار ۶۱

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۷۳

منابع ۷۰

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

مقدمه:

در این فصل ابتدا مفاهیمی همچون منو ئید و S–عمل راست و T– عمل چپ و $T-S$–دوعمل و زیرعمل و زیردوعمل را تعریف کرده و با ارائه چند مثال به تبیین این مفاهیم خواهیم پرداخت.

در بخش بعد به S–عمل هموار پرداخته و عملگرهای اجتماع و اشتراک و $\cdots$ را روی آن تعریف می‌کنیم.

در بخش سوم، مجموعه فازی و زیرعمل فازی را تعریف می‌کنیم و در ادامه نقطه فازی و زیرساختارهای فازی از یک S–عمل و $T-S$–دوعمل را معرفی خواهیم کرد.

مطالب این فصل بر گرفته از مراجع [۲۱] و [۸] و [۹] و [۲] و [۱۱] و [۲۳] و [۳] و [۱۵] می‌باشد.

۱.۱ S–عمل راست و T–عمل چپ

تعریف ۱.۱.۱ : S را یک منوئید می‌نامند هرگاه نسبت به عمل تعریف شده روی آن شرکت‌پذیر و دارای عضو بی‌اثر باشد. توجه داشته باشید که S و T در این پایان‌نامه همواره منوئید می‌باشند.

تعریف ۲.۱.۱ : M را S– عمل راست می‌گویند. هرگاه نگاشت $\odot : M \times S \to M$ باضابطه $(m,s) \to m \odot s$ موجود باشد به طوری که:

(الف) $m \odot 1_s = m$،

(ب) برای هر $m \in M$ و $s,t \in S$، $m \odot (s \odot t) = (m \odot s) \odot t$،

و آن را با M_S نمایش می‌دهند.

به همین ترتیب می‌توان T–عمل چپ را تعریف کرد و آن را با ${}_TM$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱ : زیرمجموعه غیرتهی X از M_S را زیرعمل M_S می‌گویند هرگاه اگر

$$XS \subseteq X.$$

و همچنین می‌توانیم زیرعمل ${}_TM$ را نیز تعریف کنیم.

تعریف ۴.۱.۱ : فرض کنید S و T دو منوئید باشند. آنگاه M را $T-S$–دوعمل می‌گویند هرگاه برای هر $s \in S$ و $t \in T$ و $m \in M$،نگاشت $\odot : T \times M \times S \to M$ با ضابطه $(t, m, s) \to t \odot m \odot s$ موجود باشد به طوری که:

(الف) $m \odot 1_S = m = 1_T \odot m$

(ب) $(t \odot m) \odot s = t \odot (m \odot s)$.

و آن را به صورت ${}_TM_S$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۵.۱.۱ : زیرمجموعه X از ${}_TM_S$، زیردوعمل نامیده می‌شود هرگاه اگر

$$TXS \subseteq X.$$

مثال ۶.۱.۱ : فرض کنید $S = [0, 1]$ و $M = [0, \frac{1}{2}]$ و $T = [\frac{1}{2}, 1]$ باشد. در این صورت M، $S - T$–دوعمل و $X = [0, \frac{1}{4}]$ زیر دوعمل ${}_TM_S$ می‌باشد.

مثال ۷.۱.۱ : فرض کنید $S = \mathbb{N}$ و $T = \mathbb{Z}$ و $M = Q$ باشد. در این صورت M، $S - T$–دوعمل و $X = \mathbb{Z}$ زیردوعمل ${}_TM_S$ می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱ : رابطه هم‌ارزی ρ روی M_S رابطه همنهشتی روی M_S است اگر برای هر $x, y \in M_S$ و $s \in S$:

$$x\rho y \Rightarrow (xs)\rho(ys).$$

به همین ترتیب می‌توان رابطه همنهشتی روی ${}_TM$ و ${}_TM_S$ را نیز تعریف کرد.

مثال ۹.۱.۱ : منوئید $S = \{1, b, c, d\}$ و جدول کیلی زیر را در نظر بگیرید.

$\cdot$	۱	b	c	d
۱	۱	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	d	c	b	d

واضح است که S، S–عمل می‌باشد. همچنین می‌توانید رابطه همنهشتی $\rho = \{(۱,۱),(b,b),(c,c),(d,d),(b,c),(c,b)\}$ روی S و افرازهای آن در کلاس‌های هم‌ارزی $\{۱\}$ و $\{b,c\}$ و $\{d\}$ را در نظر بگیرید. به آسانی می‌توان دید که $X = \{b,c,d\}$ زیرعمل S می‌باشد، ولی $\{c,d\}$ زیرعمل S نیست.

مثال ۱۰.۱.۱ : منوئید $S = \{۱,a,b,c,d,e\}$ و جدول کیلی زیر را در نظر بگیرید.

$\cdot$	۱	a	b	c	d	e
۱	۱	a	b	c	d	e
a	a	b	b	c	c	d
b	b	b	b	c	c	c
c	c	c	c	c	c	c
d	d	c	c	c	c	d
e	e	c	c	c	d	e

به سادگی می‌توان نشان داد که S، S–عمل است. همچنین می‌توانید رابطه همنهشتی $\rho = \{(۱,۱),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(b,c),(c,b)\}$ روی S و افرازهای آن در کلاس‌های هم‌ارزی $\{۱\}$ و $\{a\}$ و $\{b,c\}$ و $\{d\}$ و $\{e\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $X = \{c,d\}$ زیرعمل S است، اما $\{d\}$ زیرعمل S نیست.

تعریف ۱۱.۱.۱ : فرض کنید M_S و N_S دو S–عمل باشند. $f : M_S \to N_S$ را همومورفیسم S–عملهای راست یا S–همومورفیسم می گویند. هرگاه اگر برای هر $m \in M_S$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$f(ms) = f(m)s.$$

به طور مشابه می‌توان همومورفیسم $T-$عملهای چپ را تعریف کرد.

۲.۱ مجموعه‌های هموار

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنید U مجموعه مرجع و E مجموعه‌ای از پارامترها باشد. برای $A \subseteq E$، جفت (F, A) را مجموعه هموار گویند اگر و تنها اگر F نگاشت پوشا از A به مجموعه توانی U باشد. مجموعه همه مجموعه‌های هموار را با $G(U)$ نمایش می‌دهند. به تعبیر دیگر مجموعه هموار، خانواده پارامتری از زیرمجموعه‌های U می‌باشد و E مجموعه‌ای از پارامترها است. $supp(F, A) = \{x \in A \mid F(x) \neq \phi\}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱ : فرض کنید (F, A) و (G, B) دومجموعه هموار باشد. آنگاه (G, B) را زیرمجموعه هموار (F, A) گویند هرگاه:

(الف) $B \subseteq A$

(ب) برای هر $b \in B$، $G(b) \subseteq F(b)$.

و آن را به صورت $(G, B)\tilde{\subseteq}(F, A)$ نمایش می‌دهند.

دومجموعه (F, A) و (G, B) را برابر می‌گویند هرگاه اگر $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ و $(G, B)\tilde{\subseteq}(F, A)$.

تعریف ۳.۲.۱ : فرض کنید U مجموعه مرجع و E مجموعه‌ای از پارامترها و $A \subseteq E$ باشد.

(الف) (F, A) نسبت به مجموعه پارامتری A را مجموعه هموار صفر نسبی[۱] گویند هرگاه اگر برای هر $e \in A$، $F(e) = \phi$ و آن را با ϕ_A نمایش می‌دهند.

(ب) (G, A) نسبت به مجموعه پارامتری A را مجموعه هموار کامل[۲] گویند هرگاه اگر برای هر $e \in A$، $G(e) = U$ و آن را با U_A نمایش می‌دهند.

[۱] ralative null soft set

[۲] ralative whole soft set

مجموعه هموار کامل نسبت به مجموعه مرجع از پارامترهای E را مجموعه هموار مطلق روی U نامیده می‌شود و ان را با U_E نمایش می‌دهند و همچنین مجموعه ضفر نسبی نسبت به مجموعه پارامتری E را مجموعه هموار صفر روی U می‌گویند و آن را با ϕ_E نمایش می‌دهند و همچنین مجموعه هموار یکتا روی U با مجموعه پارامتری ϕ را مجموعه هموار تهی می‌گویند و آن را با ϕ_ϕ نمایش می‌دهند و همواره داریم:

$$\phi_\phi \subseteq F(A) \subseteq U_A \subseteq U_E.$$

برای مجموعه هموار (F,A)، اگر $(F,A) \neq \phi_A$ باشد آن را غیربدیهی و اگر $(F,A) \neq \phi_\phi$ باشد آن را نرمال می‌گویند.

تعریف ۴.۲.۱ : فرض کنید (F,A) و (G,B) دومجموعه هموار روی U باشند در این صورت:

(الف) $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$ که $C = A \cap B$ یک مجموعه هموار است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall\ x \in C;\quad H(x) = F(x) \quad \text{یا} \quad H(x) = G(x).$$

(ب) $(F,A)\tilde{\cup}(G,B) = (H,C)$ که $C = A \cup B$ و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall\ x \in C;\quad H(x) = \begin{cases} F(x) & x \in A - B, \\ G(x) & x \in B - A, \\ F(x) \cup G(x) & x \in A \cap B. \end{cases}$$

(ج) $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall\ (x,y) \in A \times B;\quad H(x,y) = F(x) \cap G(y).$$

(د) $(F,A) \vee (G,B) = (H, A \times B)$ و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall\ (x,y) \in A \times B;\quad H(x,y) = F(x) \cup G(y).$$

(هـ) اجتماع محدود شده[۳] دو مجموعه هموار (F,A) و (G,B) به صورت $(F,A) \cup_R (G,B) = (H,C)$ و $C = A \cap B$ می‌باشد.

$$\forall\ x \in C;\quad H(x) = F(x) \cup G(x).$$

(و) اشتراک توسیع‌یافته[۴] دو مجموعه هموار (F,A) و (G,B) به صورت $(F,A) \sqcap_E (G,B) = (H,C)$ و

[۳] restricted
[۴] extended

$C = A \cup B$ می‌باشد.

$$\forall\, x \in C;\quad H(x) = \begin{cases} F(x) & x \in A - B, \\ G(x) & x \in B - A, \\ F(x) \cap G(x) & x \in A \cap B. \end{cases}$$

(ز) اشتراک محدود شده دو مجموعه هموار (F,A) و (G,B) به صورت $(F,A) \Cap (G,B) = (H,C)$ و $C = A \cap B \neq \phi$ می‌باشد.

$$\forall\, x \in C;\quad H(x) = F(x) \cap G(x).$$

تعریف ۵.۲.۱ : فرض کنید $(F_i, A_i)_{i\in I}$ خانواده غیرتهی از مجموعه‌های هموار روی U و $I(x) = \{i \in I \mid x \in A_i\}$ باشد. در این صورت:

(الف) اجتماع این خانواده به صورت $\bigcup\limits_{i\in I}(F_i, A_i) = (H,B)$ و $B = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ می‌باشد و برای هر $x \in B$، $H(x) = \bigcup\limits_{i\in I} F_i(x)$.

(ب) اجتماع محدود شده این خانواده به صورت $\widetilde{\bigcup\limits_{i\in I_R}}\, (F_i, A_i) = (H,B)$ و $B = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ می‌باشد و برای هر $x \in B$، $H(x) = \bigcup\limits_{i\in I} F_i(x)$.

(ج) اشتراک توسیع‌یافته این خانواده به صورت $\sqcap_{i\in I_E}(F_i, A_i) = (H,B)$ و $B = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ می‌باشد و برای هر $x \in B$، $H(x) = \bigcup\limits_{i\in I} F_i(x)$.

(د) اشتراک محدود شده این خانواده به صورت $\Cap_{i\in I}(F_i, A_i) = (H,B)$ و $B = \bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \phi$ می‌باشد و برای هر $x \in B$، $H(x) = \bigcap\limits_{i\in I} F_i(x)$.

(هـ) ترکیب عطفی این خانواده به صورت $\widetilde{\bigwedge\limits_{i\in I}}(F_i, A_i) = (H,B)$ و $B = \prod\limits_{i\in I} A_i$ می‌باشد و برای هر $x = (x_i)_{i\in I} \in B$، $H(x) = \bigcap\limits_{i\in I} F_i(x_i)$.

(و) ترکیب فصلی این خانواده به صورت $\widetilde{\bigvee\limits_{i\in I}}(F_i, A_i) = (H,B)$ و $B = \prod\limits_{i\in I} A_i$ می‌باشد و برای هر $x = (x_i)_{i\in I} \in B$، $H(x) = \bigcup\limits_{i\in I} F_i(x_i)$.

(ز) حاصل‌ضرب کارتزین[5] این خانواده به صورت $\widetilde{\prod\limits_{i\in I}}(F_i, A_i) = (H,B)$ و $B = \prod\limits_{i\in I} A_i$ می‌باشد و برای هر $x = (x_i)_{i\in I} \in B$، $H(x) = \prod\limits_{i\in I} F_i(x_i)$.

---

[5] cartesion product

۳.۱ مجموعه‌های فازی هموار

تعریف ۱.۳.۱ : تابع $\lambda : X \to [\circ, \mathsf{1}]$ زیرمجموعه فازی مجموعه X نامیده می‌شود. اگر λ تابعی از M_s به $[\circ, \mathsf{1}]$ باشد. آنگاه λ زیرعمل فازی راست نامیده می‌شود. اگر برای هر $m \in M_s$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$\lambda(ms) \geq \lambda(m).$$

تعریف ۲.۳.۱ : برای هر $t \in (\circ, \mathsf{1}]$ و هر $x \in X$، زیرمجموعه x_t از X که برای هر $y \in X$ به صورت

$$x_t(y) = \begin{cases} t & x = y \\ \circ & x \neq y \end{cases}$$

تعریف می‌شود را نقطه فازی می‌گویند.

تعریف ۳.۳.۱ : گوییم نقطه فازی x_t:

(الف) به زیرمجموعه فازی λ تعلق دارد و می‌نویسیم $x_t \in \lambda$ اگر $\lambda(x) \geq t$.

(ب) با زیرمجموعه فازی λ شبه‌سازگار دارد و می‌نویسیم $x_t q \lambda$ اگر $\lambda(x) + t > \mathsf{1}$

چنانچه یکی از حالات $x_t \in \lambda$ یا $x_t q \lambda$ برقرار باشد، برای نمایش آن از عبارت $x_t \in \vee q\lambda$ استفاده می‌شود. و اگر هر دو حالت $x_t \in \lambda$ و $x_t q \lambda$ برقرار باشد برای، نمایش آن از عبارت $x_t \in \wedge q\lambda$ استفاده می‌شود. هر یک از عبارات $x_t \bar{\in} \lambda$ و $x_t \bar{q} \lambda$ و $x_t \overline{\in \vee q\lambda}$ و $x_t \overline{\in \wedge q\lambda}$ متناظراً به این معناست که روابط $x_t \in \lambda$ و $x_t q \lambda$ $x_t \in \vee q\lambda$ و $x_t \in \wedge q\lambda$ برقرار نمی‌باشد.

تعریف ۴.۳.۱ : اگر I^X نمایش مجموعه همه مجموعه‌های فازی روی X و $A \subseteq X$ باشد. جفت (f, A) مجموعه فازی هموار روی X است و برای هر $a \in A$ داریم:

$$f : A \to I^X$$

$$f(a) = f_a : X \to I, \qquad I = [\circ, \mathsf{1}]$$

تعریف ۵.۳.۱ : فرض کنید (f,A) و (g,B) دو مجموعه فازی هموار باشند. آنگاه (g,B) را زیرمجموعه فازی هموار (f,A) و گویند هرگاه:

(الف) $B \subseteq A$

(ب) برای هر $b \in B$، $g_b \subseteq f_b$.

و آن را به صورت $(g,B) \sqsubseteq (f,A)$ نمایش می‌دهند. دو مجموعه فازی هموار (f,A) و (g,B) را برابر گویند هرگاه اگر $(g,B) \sqsubseteq (f,A)$ و $(f,A) \sqsubseteq (g,B)$.

تعریف ۶.۳.۱ : فرض کنید (f,A) و (g,B) دو مجموعه فازی هموار روی مجموعه مرجع U باشند. در این صورت:

(الف) اجتماع این دو مجموعه فازی هموار به صورت $(f,A) \sqcup (g,B) = (h,C)$ می‌باشد که $C = A \cup B$ و برای هر $c \in C$ داریم:

$$h(c) = h_c = \begin{cases} f_c & c \in A - B, \\ g_c & c \in B - A, \\ f_c \vee g_c & c \in A \cap B. \end{cases}$$

(ب) اشتراک آنها به صورت $(f,A) \sqcap (g,B) = (h,C)$ می‌باشد که $C = A \cap B$ و برای هر $c \in C$، $h(c) = h_c = f_c \wedge g_c$.

(پ) ترکیب عطفی آنها به صورت $(f,A) \wedge (g,B) = (h, A \times B)$ می‌باشد و برای هر $(a,b) \in A \times B$ داریم:

$$h(a,b) = h_{a,b} = f_a \wedge g_b.$$

تعریف ۷.۳.۱ : فرض کنید (f,A) و (g,B)، $T - S$–دوعمل فازی هموار روی $_TM_S$ باشد در این صورت:

(الف) اجتماع توسعه‌یافته آنها به صورت $(f,A) \sqcup_E (g,B) = (h,C)$ می‌باشد که $C = A \cup B$ و برای هر $c \in C$ داریم:

$$h_c = \begin{cases} f_c & c \in A - B, \\ g_c & c \in B - A, \\ f_c \cup g_c & c \in A \cap B. \end{cases}$$

(ب) اجتماع محدود آنها به صورت $(f,A) \sqcup_R (g,B) = (h,C)$ می‌باشد که $C = A \cap B$ و برای هر $c \in C$، $h_c = f_c \cup g_c$.

(پ) اشتراک توسیع‌یافته آنها به صورت $(f,A) \sqcap_E (g,B) = (h,C)$ می‌باشد که $C = A \cup B$ و برای هر $c \in C$ داریم:

$$h_c = \begin{cases} f_c & c \in A - B, \\ g_c & c \in B - A, \\ f_c \cap g_c & c \in A \cap B. \end{cases}$$

تعریف ۸.۳.۱ : فرض کنید (f,A)، $S-T$–دوعمل فازی هموار روی ${}_TM_S$ و $\{(h_i,B_i) \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از زیردوعمل‌های فازی هموار روی (f,A) باشد. اشتراک محدود این خانواده را به صورت $\Cap_{i\in I}(h_i,B_i) = (g,C)$ نمایش می‌دهند که $C = \bigcap_{i\in I} B_i \neq \phi$ و برای هر $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$، $g(x) = \bigcap_{i\in I} h_i(x)$.

فصل ۲

ایزومورفیسم و حاصل‌ضرب $S-T-$دو عمل‌ها