دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی—گرایش آنالیز عددی

موضوع:

کاربرد روش اجزای متناهی با توابع B–اسپلاین در مسایل انتقال گرما

نگارنده:

سیما سلطانی

استاد راهنما:

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور:

دکتر محمود هادیزاده یزدی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به مادر و پدرم

مادرم؛ که عشقش در دلم مقدس است. که سرچشمه‌ی کنجکاوی دوران کودکی‌ام است. که هر چه دارم از اوست.

پدرم؛ که عشقش اساس جویندگی پرشور دانش برایم بود. که سال‌های بال و پر گرفتنم را لبریز از حکمت کرد. و هنوز هم شکوه نگرشش وجودم را فرا می‌گیرد.

شما به من زندگی بخشیدید، عشق ورزیدید. اما ورای این همه، شما دلیلی به من دادید که برای آن زندگی کنم.

تقدیمتان می‌کنم این پایان نامه را، در پاسخ به مهر و عشقتان، که اولین راهنمایانم بودید.

و همچنین تقدیم به آنان که با ابزار دانش در راه آسایش و رستگاری انسان می‌کوشند و به سوی هدفی والا ره می‌سپارند و روز و شب پیوسته در خیال خویش وظیفه‌ای مشخص دارند با عشقی بزرگ.

اظهارنامه‌ی دانشجو

موضوع پایان‌نامه: کاربرد روش اجزای متناهی با توابع B-اسپلاین در مسایل انتقال گرما

استاد راهنما: دکتر علی ذاکری

استاد مشاور: دکتر محمود هادیزاده یزدی

نام دانشجو: سیما سلطانی

شماره‌ی دانشجویی: ۸۸۰۳۶۸۴

اینجانب **سیما سلطانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه‌شده در پایان‌نامه با عنوان «**کاربرد روش اجزای متناهی با توابع B-اسپلاین در مسایل انتقال گرما** »، با راهنمایی استاد محترم **جناب آقای دکتر علی ذاکری** ، توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در موارد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. به علاوه، گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه، تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ‌جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه، چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضای دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

اکنون که مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره مشوق من بوده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

همچنین، از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر علی ذاکری که راهنمای اینجانب بوده‌اند و هدایت این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، و استاد مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمود هادیزاده یزدی، کمال تشکر و سپاس را دارم.

در انتها، وظیفه‌ی خود می‌دانم که از زحمات کلیه‌ی معلمین، دبیران و اساتید خود در مقاطع مختلف تحصیلی، تقدیر و تشکر نمایم.

باشد که گوشه‌ای از زحماتشان را ارج نهاده باشم.

چکیده

در این پایان نامه کاربرد روش عنصر متناهی برای حل معادلات انتقال گرما در حالت ایستا با شرایط دیریکله مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اساس کار بر آن است که از توابع B-اسپلاین دو بعدی به عنوان توابع پایه در روش مذکور استفاده می‌کنیم. بدین منظور ابتدا به بیان توابع اسپلاین، B-اسپلاین و ویژگی‌های آن پرداخته و سپس B-اسپلاین‌های وزن‌دار را معرفی می‌نماییم. در ادامه الگوریتم کلی روش عنصر متناهی مطرح می‌شود. در پایان با بیان قضایای همگرایی و پایداری به حل یک مثال عددی پرداخته و کارایی روش نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی: اسپلاین؛ B-اسپلاین تعمیم یافته‌ی وزن‌دار؛ روش عنصر متناهی؛ روش گالرکین؛ تابع وزن؛ روش R-تابع

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

عنصر متناهی روشی برای طیف گسترده‌ای از معادلات مشتقات جزیی در علوم فیزیک و مهندسی است. مهمترین کاربردهای آن در زمینه‌ی الکترومغناطیس، ترمودینامیک، جریان سیال، مکانیک ساختاری و ... می‌باشد[۲۸].

اندیشه‌ی نمایش ناحیه‌ی داده شده به صورت مجموعه‌ای از نواحی مجزا (گسسته) منحصر به عناصر متناهی نمی‌باشد. ریاضی‌دانان باستان مقدار π را با توجه به این‌که پیرامون چندضلعی محاط در یک دایره، پیرامون تقریبی دایره است تخمین زدند. آن‌ها مقدار π را با دقت تقریباً ۴۰ رقم اعشار با تصور دایره به صورت چندضلعی دارای تعداد اضلاع بسیار ولی محدود تخمین زدند. در زمان معاصر این مطلب جایگاهی در تحلیل سازه ای هواپیما پیدا کرد، به طوری که به عنوان مثال، بال‌ها و بدنه‌ی هواپیما به صورت همبست تقویتی های طولی، پوسته ها و صفحات برشی در نظر گرفته می‌شوند. در سال ۱۹۴۱ هرینیکف روش به اصطلاح پیکربندی را معرفی نمود که در آن محیط کشسان هواپیما با مجموعه‌ی میله ها و تیرها بیان گردید. به کارگیری توابع پیوسته‌ی قطعه‌گون تعریف شده روی یک زیر دامنه برای تقریب تابعی نامعی را می‌توان در کار کورانت یافت که از همبست اجزای مثلثی و اصل کمینه‌ی انرژی پتانسیل کل برای مطالعه‌ی مسأله‌ی پیچش سنت ونانت[۱] استفاده نمود.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول تعاریف اساسی مورد نیاز در فصل‌های بعدی ارائه شده است. در فصل دوم پس از طرح اسپلاین‌ها به معرفی B-اسپلاین‌های چندمتغیره و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. از آن‌جایی که شرط مرزی دیریکله را بر مسأله اعمال می‌کنیم ، می‌بایست B-اسپلاین‌ها روی مرز صفر شوند. برای این منظور B-اسپلاین‌های وزن‌دار معرفی می‌شوند

[۱] Saint venant

که از روش R-تابع برای ساختن تابع وزن آن استفاده می‌کنیم. خلاصه ای از روش عنصر متناهی در حالت یک و دو بعدی در فصل سوم توضیح داده می‌شود. در فصل چهارم روش عنصر متناهی با توابع پایه‌ی B-اسپلاین وزن‌دار دو بعدی را به کار می‌گیریم. ابتدا قضایایی در ارتباط با همگرایی و پایداری روش مطرح می‌شود و در نهایت یک معادله گرما در حالت ایستا را با روش گالرکین حل کرده و نتایج عددی را ارائه می‌دهیم.

امید است مطالعه‌ی این پایان نامه رضایت خاطر خوانندگان آن را فراهم سازد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۰.۱ تابعی : در این پایان نامه از واژه‌ی تابعی (تابعک)[1] برای بیان توابع انتگرالی که آرگومان آن‌ها خود تابع هستند استفاده می‌کنیم. یک تابعی، عملگری مانند λ است که تابع u را به مقدار عددی $\lambda(u)$ تبدیل می‌نماید.

تابعی $\lambda(u)$ را بر حسب u خطی گوییم اگر و فقط اگر به ازای اسکالرهای دلخواه α و β و توابع v و u داشته باشیم:

$$\lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha\lambda(u) + \beta\lambda(v)\,,$$

مثالی از یک تابعی خطی عبارت است از:

$$\lambda(v) = \int_D f v\, dD\,.$$

تعریف ۲.۰.۱ فرم دوخطی [2]: تابع $a(.,.)$ را یک فرم دو خطی می‌نامیم هرگاه نسبت به هر مؤلفه خطی باشد. به عبارت دیگر به ازای اسکالرهای دلخواه α_i, β_j تساوی زیر برقرار باشد :

$$a(\sum_i \alpha_i u_i, \sum_j \beta_j v_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j a(u_i, v_j)\,.$$

فرم دو خطی $a(u,v)$ را متقارن گویند هرگاه : $a(u,v) = a(v,u)$.

تعریف ۳.۰.۱ ضرب تانسوری [3]: اگر $X = C[a,b]$، $Y = C[c,d]$ و $X_n = span\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ و $Y_m = span\{\psi_1, ..., \psi_m\}$ به ترتیب زیرفضاهای n و m بعدی X و Y باشند، آن‌گاه ضرب تانسوری $X_n \otimes Y_m$ عبارت است از:

$$X_n \otimes Y_m = span\{\phi_i(x)\,\psi_j(y)\ :\ 1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq m\}\,,$$

مجموعه‌ی $\{\phi_i(x)\,\psi_j(y)\ :\ 1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq m\}$ مستقل خطی بوده و یک پایه برای $X_n \otimes Y_m$ است.

---

[1] functional
[2] bilinear form
[3] tensor product

گزاره ۱.۰.۱ فرمول‌های گرین [۴]: فرض کنیم $u, v \in C^{2}(\overline{D})$ که در آن D دامنه‌ای هموار و کران‌دار در R^n باشد. عبارات زیر فرمول‌های گرین نامیده می‌شوند:

$$\int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma = \int_{D}(v\nabla^{2}u + \nabla v.\nabla u)\, dD\,,$$

$$\int_{\Gamma}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u}{\partial n})\, d\Gamma = \int_{D}(v\nabla^{2}u - u\nabla^{2}v)\, d\Gamma\,.$$

گزاره ۲.۰.۱ اتحاد مارسدن [۵]: اگر

$$\psi^{n}_{k,h}(t) = h^{n}(k+1-t/h)...(k+n-t/h)\,, \qquad x, t \in \mathbb{R}\,,$$

آنگاه تساوی زیر برقرار است :

$$(x-t)^{n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi^{n}_{k,h}(t) b^{n}_{k,h}(x)$$

گزاره ۳.۰.۱ اتحاد مارسدن چندمتغیره [۶]: هر چندجمله‌ای چندمتغیره‌ی $p(x) = \sum_{\alpha_{\nu}\leqslant n} c_{\alpha}x^{\alpha}$ روی دامنه‌ی D را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی زیر نمایش داد:

$$\sum_{k\in K} q(k)b_{k}(x), \quad x\in D\,,$$

که q یک چندجمله‌ای چندمتغیره با درجه‌ی کوچکتر مساوی n در هر متغیر k_{ν} است.

تعریف ۴.۰.۱ متریک هاسدورف [۷]: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و تابع $h : 2^{X} \times 2^{X} \longrightarrow R^{*}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$h_{d}(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}\,.$$

---

[۴] Green's formula

[۵] Marsden's identity

[۶] Multivariate Marsden's identity

[۷] Hausdorff metric

$h_d(A,B)$ را فاصله ی هاسدورف القا شده توسط d گوییم با این فرض که $h_d(\varnothing,\varnothing)=0$ و به ازای مجموعه غیر تهی A ، $h_d(A,\varnothing)=\infty$.

می توان نشان داد که h یک متر است و بنابراین به ازای هر A و B و C در 2^X در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $h(A,B)\geqslant 0$ و $h(A,A)=0$.

۲) $h(A,B)=h(B,A)$.

۳) $h(A,B)\leqslant h(A,C)+h(C,B)$.

۴) $\overline{A}=\overline{B}$ اگر و فقط اگر $h(A,B)=0$.

تعریف ۱.۰.۵ اگر $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ یک n-تایی از اعداد صحیح و نامنفی α_jها باشد، آن‌گاه α را یک مولتی اندیس می‌نامیم. علاوه بر این، با فرض $x=(x_1,...,x_n)$ نماد x^α را برای $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ به کار می‌بریم که دارای درجه‌ی $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$ می‌باشد.
به طور مشابه اگر $j=1,...,n$، $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$، آن‌گاه

$$D_\alpha=D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}\,,$$

نماد اپراتور دیفرانسیلی از مرتبه‌ی $|\alpha|$ می‌باشد. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$D^{(0,...,0)}u=u\,.$$

مسائل بیضوی

روش عناصر متناهی [8] برای مسایل مقدار مرزی بیضوی که در ادامه توضیح داده می‌شود بسیار مناسب است.

تعریف ۱.۰.۶ معادلات مشتقات خطی مرتبه‌ی دوم : فرض کنیم D دامنه‌ی کران‌دار روی $\mathbb{R}^2$ باشد. مسأله مقدار مرزی دیریکله را برای معادله مشتقات جزیی بیضوی مرتبه دوم در نظر می‌گیریم:

[8] Finite Element Method

$$-div(A\nabla u) = f\,, \qquad u\mid_{\partial D} = 0\,, \qquad (1-1)$$

به طوری که $A : D \longrightarrow R^{2\times 2}$ متقارن و معین مثبت باشد. جواب u از $(1-1)$ به شرطی که مرز D و f هموار باشد، هموار خواهد بود. به کمک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم $\pounds := -div(A\nabla)$ معادله‌ی $(1-1)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\pounds u = f\,, \qquad u\mid_{\partial D} = 0\,, \qquad (2-1)$$

به طوری که عملگر دیفرانسیل $\pounds$ فرم دیورژانس دارد. یک مثال مهم، عملگر لاپلاس است یعنی $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ که یک عملگر بیضوی خطی $\pounds$ با ماتریس واحد A است.

تعریف ۷.۰.۱ مسأله پواسن : فرض کنیم D دامنه‌ای کراندار در $\mathbb{R}^2$ با مرز ∂D باشد مسأله مقدار مرزی زیر وقتی f تابع حقیقی مقدار بر D باشد، مسأله پواسن نامیده می‌شود

$$-\Delta u = f\,, \qquad u\mid_{\partial D} = 0\,, \qquad (3-1)$$

معادله‌ی پواسن یک معادله مشتقات جزیی مرتبه دو غیر همگن (اگر $f \neq 0$)، خطی و بیضوی است.

فضای سوبولف [9]

تعریف ۸.۰.۱ فضای هیلبرت[10] : فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد. حاصل ضرب داخلی روی X، یک تابع حقیقی مقدار روی $X \times X$ است که به ازای هر $x, y \in X$ مقدار حقیقی $\langle x, y\rangle$ نسبت داده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ و اسکالرهای دلخواه α و β در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\langle x, x\rangle \geq 0$.

[9] Sobolev space

[10] Hilbert space

۲) . $\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

۳) . $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

۴) . $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$

ضرب داخلی معرفی شده، یک نرم روی فضای برداری X به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}\ , \qquad u \in X\ .$$

فضای هیلبرت [11]، فضای برداری مجهز به یک ضرب داخلی می‌باشد که نرم حاصل از ضرب داخلی کامل است.

تعریف ۱.۰.۹ توابع مربعی انتگرال پذیر : فضای توابع مربعی انتگرال پذیر بر D با $L^2(D)$ نمایش داده می‌شودکه تعریف آن بصورت زیر است:

$$L^2(D) = \{f : D \longmapsto \mathbb{R}\ ,\ \int_D f^2\, dD < +\infty\}\ .$$

بطور دقیق‌تر $L^2(D)$ فضایی هم ارز کلاس توابع اندازه پذیر است، یعنی v هم ارز w است اگر و فقط اگر v و w تقریباً همه جا برابر باشند. فضای $L^2(D)$ یک فضای هیلبرت با ضرب اسکالر و نرم القا شده‌ی زیر می‌باشد:

$$\langle f,g\rangle_0 = \langle f,g\rangle_{L^2(D)} = \int_D fg\, dD\ ,$$

$$\|f\|_0 = \|f\|_{L^2(D)} = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}_{L^2(D)}\ .$$

$\mathcal{D}$ فضای توابع مشتق پذیر نامتناهی با تکیه گاه فشرده بر D است یعنی :

$$\mathcal{D} = \{f \in C^\infty(D) : \exists K \subset D,\ \text{فشرده} : supp f \subset K\}$$

به کمک فضای توابع تست D، حال مفهوم مشتق ضعیف را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ یک چندتایی از اعداد صحیح غیر منفی و $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع تعریف شده بر D باشد. مشتق جزیی f از مرتبه‌ی $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}}\ .$$

[11] Hilbert space

$g \in L^{2}(D)$ را مشتق ضعیف $D^{\alpha}f$ از یک تابع $f \in L^{2}(D)$ می‌گوییم هرگاه

$$\langle g, \phi\rangle_{L^{2}(D)} = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^{\alpha}\phi\rangle_{L^{2}(D)}\,, \qquad \forall \phi \in D\,.$$

فضای سوبولف مرتبه‌ی $\ell \in \mathbb{N}_{0}$ بر دامنه‌ی D شامل همه‌ی توابع در $L^{2}(D)$ است به طوری که همه‌ی مشتق‌ها تا مرتبه‌ی ℓ متعلق به $L^{2}(D)$ باشد یعنی:

$$H^{\ell}(D) = \{f \in L^{2}(D)\ :\ D^{\alpha}f \in L^{2}(D)\ \ \forall \alpha : |\alpha| \leq \ell\}\,.$$

فضاهای سوبولف $H^{\ell}(D)$، فضاهای هیلبرت نسبت به ضرب اسکالر زیر هستند:

$$\langle f, g\rangle_{\ell}\langle f, g\rangle_{H^{\ell}(D)} = \sum_{|\alpha|\leq \ell}\int_{D}(D^{\alpha}f)(D^{\alpha}g)\, dD$$

و نرم مرتبط با آن به این صورت تعریف می‌شود [۱]:

$$\|f\|_{\ell} = \|f\|_{H^{\ell}(D)} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{L^{\ell}(D)}} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq \ell}\int_{D}(D^{\alpha}f)^{2}\, dD}\,. \qquad (۴-۱)$$

به عنوان مثال در $H^{1}(D)$ نرم سوبولف عبارت است از:

$$\|f\|_{1} = \|f\|_{H^{1}(D)} = \Big[\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_{D}(D^{\alpha}f)^{2}\, dD\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\int_{D}\Big[f^{2}(x) + |grad\, f(x)|^{2}\Big]dD\Big]^{\frac{1}{2}}$$

و شبه نرم روی H^{ℓ} نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|f|_{H^{\ell}(D)} = \sqrt{\sum_{|\alpha|=\ell}\int_{D}(D^{\alpha}f)^{2}\, dD}\,.$$

زیرفضای $H^{\ell}_{0}(D) \subset H^{\ell}(D)$ توابعی که بر ∂D صفر شود را شامل می‌شود. یعنی $H^{\ell}_{0}(D)$ بستار همه‌ی توابع هموار با تکیه گاه فشرده در D نسبت به نرم $\|\,.\,\|_{H^{\ell}}$ است.

فضای سوبولف را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$W^{\ell}_{2}(D) = \{f \in L^{2}(D)\ :\ D^{\alpha}f \in L^{2}(D)\ \ \forall \alpha : |\alpha| \leq \ell\}$$

تعریف ۱.۰.۱۰ فرمول بندی ضعیف و جواب ضعیف : فرض کنیم D دامنه‌ای کراندار با مرز ∂D و $\pounds$ یک عملگر بیضوی خطی مرتبه‌دو و $f \in L^{2}(D)$ باشد. فرم دو خطی متقارن $a : H^{1}(D) \times H^{1}(D) \longrightarrow \mathbb{R}^{2}$ و تابعک خطی $\lambda : L^{2}(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a(u,v) = \int_{D} [\nabla u]^{T} A [\nabla v] dx \,,$$

$$\lambda(v) = \int_{D} f v dx \,.$$

تابع $u \in H_{0}^{1}(D)$ که در معادله‌ی زیر صدق کند به‌عنوان جواب ضعیف مسأله مقدار مرزی (۱−۲) شناخته می‌شود.

$$a(u,v) = \lambda(v) \,, \qquad \forall v \in H_{0}^{1}(D) \,. \tag{۱−۵}$$

معادله (۱−۵) فرم ضعیف مسأله بیضوی (۱−۲) نامیده می‌شود. به ویژه برای معادله‌ی پواسن $-\Delta u = f$ داریم:

$$a(u,v) = \int_{D} \nabla u . \nabla v dD \,.$$

تعریف ۱.۰.۱۱ فرم دو خطی بیضوی : فرم دو خطی $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای هیلبرت H کران‌دار نامیده می‌شود اگر ثابت $c_b > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\mid a(u,v) \mid \leq c_b \|u\| \|v\| \,, \qquad \forall u, v \in H$$

و علاوه بر آن اگر ثابت $c_e > 0$ وجود داشته باشد، به‌طوریکه

$$c_e \|u\|^{2} \leq a(u,u) \,, \tag{۱−۶}$$

آن‌گاه فرم دو خطی را بیضوی گوییم.از رابطه‌ی (۱ − ۶) داریم $a(u,u) \geq 0$ در نتیجه a به ازای همه $u \in H$ معین مثبت است و همچنین $a(u,u) = 0$ اگر و فقط اگر $u = 0$.

اگر فرم دوخطی بیضوی $a(.,.)$ روی فضای هیلبرت H متقارن باشد، آن گاه عبارت‌های زیر معادل‌اند:

۱) $u \in H$ در معادله‌ی تغییراتی صدق می‌کند:

$$a(u,v) = \lambda(v) \,, \qquad \forall v \in H \,.$$

۲) u تابعک درجه دوم $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ را مینیمم می‌کند:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \lambda(v)\,,$$

یعنی

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)\,.$$