وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

تجزیه‌ی عملگرهای خطی EP روی فضاهای هیلبرت

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

علی همتی

استاد راهنما: **دکتر میثم میثمی صدر**

مهر ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

همسر مهربانم

که با صبوری و قناعت راه تحصیل را برایم هموار کرد که برای دخترم ساقی در ایام تحصیل من هم پدر بود و هم مادر.

تشکر و قدردانی

از خداوند متشکرم که بی‌عنایت او کار تحصیل در کنار کار سنگین تدریس برایم غیر ممکن بود و همچنین:

از پدر و مادرم که دعای خیر آن‌ها مشعل راه من بود هر چند پدر نماند که خوشحالی او را در این لحظه ببینم.

از استاد راهنمای عزیزم که منش و خلق و خوی او الگویی برای من و سواد و تسلط او در موضوعات ریاضی همیشه باعث حیرت من بود.

از همه‌ی اساتیدی که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و از همه‌ی کسانی که در این راه همراه من بوده‌اند سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان‌نامه، عملگرهای خاصی به‌نام عملگرهای EP را معرفی خواهیم کرد و سعی بر این شده است که ویژگی‌های آن بیان شوند. همچنین تجزیه‌های مختلفی برای این نوع عملگرها می‌سازیم.

این پایان‌نامه از مراجع [۱۹]، [۲۰] و [۲۴] اقتباس شده است.

فهرست

پیش‌گفتار

ایده‌ی ماتریس‌های مربعی EP توسط $Schwerdtfeger$ در سال ۱۹۵۰ در مرجع [۲۲] ارائه شد. توسیع و نمادگذاری ماتریس‌های EP به عملگرهای EP روی فضاهای هیلبرت توسط $Campbell$ و $Mayer$ در مرجع [۴] در سال ۱۹۷۵ صورت گرفت.

دلیل اصلی مطالعه‌ی عملگرهای EP این است که توسط $Pearl$ در سال ۱۹۶۶ ثابت شد که این عملگرها با وارون مور-پنروس خودتعویض‌پذیرند. این اثبات در مرجع [۲۱] آمده است.

در مراجع [۱۷]، [۱۶] و [۱۱] ماتریس‌های EP روی عناصر $\mathbb{C}^*$-جبر و روی عناصر حلقه در مراجع [۱۴] و [۱۳] توسیع داده شده‌اند و این توسیع روی فضاهای باناخ در مرجع [۲] بیان شده است.

در مقالات مختلفی تجزیه‌ی عملگرهای EP مطرح شده است.

در فصل دوم این پایان‌نامه تجزیه‌ی عملگرهای EP را به فرم $U(A \oplus O)U^*$ را ثابت خواهیم کرد که از مراجع [۱۹] و [۲۰] برگرفته شده است.

در فصل سوم، تجزیه‌هایی به فرم $T^* = ST$ را شاهد خواهیم بود. این قسمت از مرجع [۱۹] برگرفته شده است.

در فصل چهارم، تجزیه‌هایی به فرم $T = BC$ را ارائه می‌کنیم که این مبحث از مراجع [۲۴] اقتباس شده است.

فصل اول

مقدمات، تعاریف و نمادها

۱.۱ فضای ضرب داخلی و هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. (فضای ضرب داخلی). فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. یک ضرب داخلی روی X تابعی است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y از X عدد مختلط $\langle x,y\rangle$ در $\mathbb{C}$ را نسبت می‌دهد که قواعد زیر برقرار باشند:

(۱) به‌ازای هر $x\in X$، $\langle x,x\rangle\geq ۰$؛

(۲) اگر $x,y\in X$، $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است)؛

(۳) اگر $x,y,z\in X$، $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$؛

(۴) اگر $x,y\in X$ و α اسکالر باشد، $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$؛

(۵) $\langle x,x\rangle=۰$ اگر و فقط اگر $x=۰$.

نکات زیر بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شوند:

نکته ۱. $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

نکته ۲. $\langle z, x+y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$.

تعریف ۲.۱.۱. (نرم). اگر V یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد یک نرم روی V تابعی است از V به $[\circ, \infty)$ (نرم $x \in V$ را با $\| x \|$ نشان می‌دهیم.) که شرایط زیر را داشته باشد:

(۱) به‌ازای هر $x, y \in X$، $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$؛

(۲) اگر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$؛

(۳) برای هر $x \in X$، $\| x \| \geq \circ$. ($\| x \| = \circ \Leftrightarrow x = \circ$).

تعریف ۳.۱.۱. اگر X یک فضای برداری مختلط یا حقیقی باشد که روی آن یک نرم تعریف شده باشد، آن‌گاه X را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. (فضای ضرب داخلی). یک فضای ضرب داخلی عبارت است از یک فضای برداری حقیقی یا مختلط همراه با یک ضرب داخلی مشخص روی آن فضا.

نکته ۵.۱.۱. هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار نیز هست. کافی است نرم بردار x را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\langle x, x\rangle := \|x\|^{۲}.$$

تعریف ۶.۱.۱. (فضای هیلبرت). یک فضای ضرب داخلی تام را هیلبرت گوییم.

نماد(۱). اگر $T \in B(H)$ در این‌صورت فضای پوچی T را با $N(T)$ یا $ker(T)$ نمایش می‌دهیم و به آن هسته‌ی T نیز می‌گوییم و

$$N(T) = \{x \in H; T(x) = \circ\}$$

نماد(۲). اگر $T \in B(H)$ در این‌صورت برد T را با نماد $R(T)$ نمایش داده و

$$R(T) = \{y \in H \mid \exists x \in H; T(x) = y\}$$

۲.۱ زیرفضا و جمع مستقیم

تعریف ۱.۲.۱. زیرمجموعهٔ M از فضای برداری X را یک زیرفضای X نامیم اگر M نسبت به جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در X خود یک فضای برداری باشد.

نکته. شرط لازم و کافی برای آن‌که مجموعه $M \subset X$ یک زیرفضا باشد این است که:

$$\forall x, y \in M, \alpha \in F \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in M \quad , x + y \in M$$

تعریف ۲.۲.۱. اگر یک زیرفضای فضای هیلبرت با توپولوژی القا شده توسط متر، بسته باشد به آن زیرفضا بسته گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $\omega_1, \cdots, \omega_k$ زیرفضاهایی از فضای برداری V با بعد متناهی باشند. در این‌صورت $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_k$ را مجموع مستقیم $\omega_1, \cdots, \omega_k$ گوییم هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $\omega_1, \cdots, \omega_k$ مستقل باشند. (یعنی اگر به‌ازای هر $\alpha_i \in \omega_i$، $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$ آن‌گاه به‌ازای هر i، $\alpha_i = 0$.)؛

(۲) به‌ازای هر j که $2 \leq j \leq k$ داشته باشیم $\omega_j \cap (\omega_1 + \cdots + \omega_{j-1}) = \{0\}$؛

(۳) اگر β_i پایه‌ی مرتبی برای $1 \leq i \leq k$ باشد آن‌گاه دنباله‌ی $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_k)$ پایه‌ی مرتبی برای ω باشد.

اثبات معادل بودن شرایط فوق در مرجع [۶] آمده است.

مجموع مستقیم $\omega_1, \cdots, \omega_k$ را با نماد $\omega = \omega_1 \oplus \cdots \oplus \omega_k$ نشان می‌دهیم.

نکته ۴.۲.۱. اگر M و L دو زیرفضای فضای برداری V باشند آن‌گاه شرایط زیر معادل‌اند.

(الف) $V = L \oplus M$؛

(ب) برای هر $x \in V$ اعضای یکتای $z \in M$ و $y \in L$ وجود دارند به‌طوری‌که $x = y + z$.

۳.۱ الحاق

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X و Y فضاهای هیلبرت و $T : X \to Y$ یک عملگر کران‌دار باشد. عملگر T^* را الحاق T گوییم اگر،

$$T^* : Y \longrightarrow X$$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \qquad \forall x \in X,\ \forall y \in Y$$

قضیه ۲.۳.۱. *اگر X و Y دو فضای هیلبرت و $S,T : X \to Y$ دو عملگر کران‌دار باشند، آن‌گاه:*

(۱) $(T^*)^* = T$

(۲) $(T \oplus S)^* = T^* \oplus S^*$ $\quad (S,T : X \to Y)$.

(۳) $(TS)^* = S^* T^*$ $\quad$ (X، Y و Z *فضاهای هیلبرت هستند* $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z,$).

(۴) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ $\quad$ (λ *اسکالر است*).

اثبات. (۱) داریم:

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, T^{**} y \rangle \qquad (۱)$$

$$\begin{aligned} \langle T^* x, y \rangle &= \overline{\langle y, T^* x \rangle} \\ &= \overline{\langle Tx, y \rangle} \\ &= \langle y, Tx \rangle \qquad (۲) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱),(۲) \quad &\Rightarrow \quad \langle x, T^{**} y \rangle = \langle x, Ty \rangle \\ &\Rightarrow \quad T = T^{**} \end{aligned}$$

(۲) فرض کنید $T \in B(A, B)$ و $U \in B(A', B')$. در این‌صورت $(T \oplus U)^* = T^* \oplus U^*$.

در واقع به‌ازای $(a, a') \in A \oplus A'$ و $(b, b') \in B \oplus B'$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle (T \oplus U)(a, a'), (b, b') \rangle &= \langle (a, a'), (T \oplus U)^*(b, b') \rangle \\ &= \langle (a, a'), (T^* \oplus U^*)(b, b') \rangle \end{aligned}$$

تساوی اخیر از تساوی‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \langle (a, a'), (T^* \oplus U^*)(b, b') \rangle &= \langle (a, a'), (T^*(b), U^*(b')) \rangle \\ &= \langle a, T^*(b) \rangle + \langle a', U^*(b') \rangle \\ &= \langle T(a), b \rangle + \langle U(a'), b' \rangle \\ &= \langle (Ta, Ua'), (b, b') \rangle \\ &= \langle (T \oplus U)(a, a'), (b, b') \rangle \\ &= \langle (a, a'), (T + U)^*(b, b') \rangle \end{aligned}$$

(۳) طبق فرض چون $TS : X \longrightarrow Z$ پس $(TS)^* : Z \longrightarrow X$ و نیز $T^* : Z \longrightarrow Y$ و $S^* : Y \longrightarrow X$ پس $S^*T^* : Z \longrightarrow X$. فرض کنیم $x \in X$، $y \in Y$ و $z \in Z$. داریم:

$$\langle (TS)x, z \rangle = \langle x, (TS)^*z \rangle \qquad (I)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \langle (TS)x, z \rangle &= \langle (T(S(x)), z \rangle \\ &= \langle Sx, T^*z \rangle \\ &= \langle x, S^*T^*z \rangle \qquad (II) \\ (I), (II) &\Rightarrow \langle x, (TS)^*z \rangle = \langle x, (S^*T^*)z \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (TS)^*z = (S^*T^*)z \qquad \forall z \in Z$$

$$\Rightarrow \quad (TS)^* = S^*T^*$$

(۴) فرض کنیم $x \in X$ و $y \in Y$، داریم:

$$\langle \lambda Tx, y\rangle = \langle x, (\lambda T)^*y\rangle$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} \langle \lambda Tx, y\rangle &= \langle \lambda(Tx), y\rangle \\ &= \lambda\langle Tx, y\rangle \\ &= \lambda\langle x, T^*y\rangle \\ &= \langle x, \bar{\lambda}T^*y\rangle \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\langle x, (\lambda T)^*y\rangle = \langle x, \bar{\lambda}T^*y\rangle$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda T)^*y = \bar{\lambda}T^*y \qquad \forall y \in Y$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*.$$

□

نکته ۱.۳.۳. اگر T یک عملگر خطی روی H باشد در این‌صورت

(الف) $(ImT)^\perp = kerT^*$

(ب) $(ImT^*)^\perp = kerT$

اثبات. **(الف)**

$$x \in (ImT)^\perp \iff \forall x' \quad \langle T(x'), x\rangle = ۰$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \langle x', T^*(x)\rangle = ۰ \quad \forall x' \\
&\Longleftrightarrow \quad T^*(x) = ۰ \\
&\Longrightarrow \quad x \in kerT^*.
\end{aligned}
$$

(ب) کافیست در الف به‌جای T الحاق آن یعنی T^* را قرار دهیم.

$\square$

۴.۱ تعامد

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید X یک فضای هیلبرت باشد و $x, y \in X$. اگر داشته باشیم $\langle x, y\rangle = ۰$، گوییم x عمود به y است و می‌نویسیم $x \perp y$.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای هیلبرت باشد و $x \in X$. $x^{\perp}$ را مجموعهٔ تمام اعضایی از X می‌گیریم که به x عمودند؛ و اگر M زیرفضایی از X باشد، $M^{\perp}$ را مجموعهٔ تمام اعضایی از X می‌گیریم که به هر عضو M عمود است.

$$
\begin{aligned}
x^{\perp} &:= \{y \in X;\ y \perp x\} \\
M^{\perp} &:= \{y \in X;\ y \perp m,\ \forall m \in M\}.
\end{aligned}
$$

نکته ۳.۴.۱. $x^{\perp}$ یک زیرفضای X است زیرا اگر $x \perp y$ و $x \perp y'$ آن‌گاه $x \perp (y+y')$ و $x \perp \alpha y$ که α یک اسکالر است. همچنین $x^{\perp}$ دقیقاً مجموعه نقاطی است که تابع پیوستهٔ $y \mapsto \langle x, y\rangle$ در آنها صفر است، زیرا اگر فرض کنیم $f(y) = \langle x, y\rangle$ داریم:

$$
\begin{aligned}
|f(y_۱) - f(y_۲)| &= |\langle x, y_۱\rangle - \langle x, y_۲\rangle| \\
&= |\langle x, y_۱ - y_۲\rangle| \\
&\leq \|x\| \|y_۱ - y_۲\|
\end{aligned}
$$

لذا $x^{\perp}$ یک زیرفضای بستهٔ X است. زیرا

$$x^{\perp} = f^{-۱}(\{۰\})$$

از طرفی:

$$M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}$$

پس $M^{\perp}$ اشتراک زیرفضاهای بسته است، لذا $M^{\perp}$ یک زیرفضای بستهٔ X است.

قضیه ۴.۴.۱. *فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای هیلبرت X باشد. در این‌صورت:*

(۱) *هر $x \in X$ تجزیهٔ منحصربه‌فردی مانند:*

$$x = P_x + Q_x$$

دارد که $P_x \in M$ و $Q_x \in M^{\perp}$؛

(۲) *P_x و Q_x به‌ترتیب نزدیکترین نقاط به x در M و $M^{\perp}$اند؛*

(۳) *نگاشت‌های $P : X \to M$ و $Q : X \to M^{\perp}$ خطی‌اند؛*

(۴) $\|x\|^۲ = \|P_x\|^۲ + \|Q_x\|^۲$.

اثبات. به ۱۱.۴ از مرجع [۲۶]، مراجعه شود. □

تعریف ۵.۴.۱. نگاشت‌های P و Q که در قضیه‌ی (۴.۴.۱) معرفی شدند را تصاویر متعامد X روی M و $M^{\perp}$ می‌نامند.

نماد. در تمام فصل‌های این پایان‌نامه نگاشت تصویر متعامد روی زیرفضایی مانند M را با P_M و روی $M^{\perp}$ را با $P_{M^{\perp}}$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۶.۴.۱. *اگر X یک فضای هیلبرت و M یک زیرفضای بسته از آن باشد آن‌گاه*

$H = M \oplus M^{\perp}$ *و در نتیجه*

$$\forall f \in H \qquad f = g + h \quad ; g \in M \quad , h \in M^{\perp}$$

و ضابطه‌ی P_M و $P_{M^\perp}$ به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
P_M : H &\longrightarrow M \\
f &\longmapsto g \\
P_{M^\perp} : H &\longrightarrow M^\perp \\
f &\longmapsto h
\end{aligned}
$$

به P_M نگاشت تصویر متعامد گوییم.

نتیجه ۱.۴.۷. *P_M و $P_{M^\perp}$ خطی بوده و*

(۱) $P_M(f) = f \quad \Leftrightarrow \quad f \in M$

(۲) $P_M(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in M^\perp$

نکته. $P_M^2 = P_M$.

زیرا اگر $f \in H$ پس $f = g + h$ که $g \in M$ و $h \in M^\perp$ و همچنین $P_M(f) = g$. حال

$$
\begin{aligned}
P_M^2(f) &= P_M(P_M(f)) \\
&\overset{\text{نتیجه قبل}}{=} P_M(f)
\end{aligned}
$$

قضیه ۱.۴.۸. *فرض کنید X یک فضای هیلبرت باشد.*

(۱) *اگر p یک نگاشت تصویر متعامد روی X باشد، آن‌گاه برد p زیرفضای بسته‌ای از X است و X حاصل جمع متعامد مستقیم برد p و هستهٔ p است. یعنی:*

$$X = N(P) \overset{\perp}{\oplus} R(P)$$

(۲) *اگر M زیرفضای بسته‌ای از X باشد، آن‌گاه یک نگاشت تصویر متعامد p روی X وجود دارد که $R(P) = M$ و $N(P) = M^\perp$.*

اثبات. (۱) ابتدا نشان می‌دهیم $x \in R(P)$ اگر و تنها اگر $x = P(x)$. اگر $x = P(x)$ واضح است که $x \in R(P)$. اگر $x \in R(P)$ پس $y \in X$ وجود دارد که $x = P(y)$ و چون $P^2 = P$، بنابراین:

$$\begin{aligned} P(x) &= P^2(x) \\ &= P(y) \\ &= P(x). \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم $R(P) \cap N(P) = \{0\}$، فرض کنید $x \in R(P) \cap N(P)$ لذا $x = P(x)$ و $P(x) = 0$. حال اگر $x \in X$ می‌توان نوشت:

$$x = P(x) + x - P(x)$$

که $P(x) \in R(P)$ و $(x - P(x)) \in N(P)$ زیرا:

$$\begin{aligned} P(x - P(x)) &= P(x) - P^2(x) \\ &= P(x) - P(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین $X = R(P) \oplus N(P)$.

اکنون نشان می‌دهیم برد P و هسته‌ی P برهم عمودند. فرض کنید $x = P(y) \in R(P)$ و $z \in N(P)$ آن‌گاه:

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle &= \langle Py, z \rangle \\ &= \langle y, Pz \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $R(P) \perp N(P)$.

چون فضای هیلبرت X حاصل‌جمع مستقیم برد P و هسته‌ی P است پس:

$$R(P) = N(P)^{\perp}$$

بنابراین $R(P)$ بسته است.

(۲) فرض کنید M زیرفضای بسته از فضای هیلبرت X باشد، بنابراین $X = M \oplus M^{\perp}$ لذا هر $x \in X$ یک تجزیه‌ی منحصر به‌فرد مانند $x = m_1 + m_2$ دارد که $m_1 \in M$ و $m_2 \in M^{\perp}$، نگاشت تصویر P را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto m_1 \end{aligned}$$

به این ترتیب $R(P) = M$ و $N(P) = M^{\perp}$.

فرض کنید $x' \in X$ و $x' = m'_1 + m'_2$ که $m'_1 \in M$ و $m'_2 \in M^{\perp}$ عمود بودن M و $M^{\perp}$ بر یکدیگر ایجاب می‌کند که:

$$\begin{aligned} \langle Px, x' \rangle &= \langle m_1, m'_1 + m'_2 \rangle \\ &= \langle m_1, m'_1 \rangle + \langle m_1, m'_2 \rangle \\ &= \langle m_1, m'_1 \rangle \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \langle x, Px' \rangle &= \langle m_1 + m_2, m'_1 \rangle \\ &= \langle m_1, m'_1 \rangle + \langle m_2, m'_1 \rangle \\ &= \langle m_1, m'_1 \rangle \end{aligned}$$

بنابراین

$$\langle Px, x' \rangle = \langle x, Px' \rangle$$

پس P یک نگاشت تصویر متعامد است. $\square$

نتیجه ۹.۴.۱. *اگر M یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت H باشد و $P_M : H \longrightarrow H$ یک تصویر متعامد باشد آن‌گاه*

(۱) $ranP_M = M$ و $kerP_M = M^\perp$؛

(۲) P بسته بوده و $H = ranP_M \oplus kerP_M$.

تعریف ۱۰.۴.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. اگر $M \subset X$ یک زیرفضای برداری باشد، قرار می‌دهیم:

$$M^\perp = \{f \in X';\ \langle f, x \rangle = \circ\ \forall x \in M\}$$

که X' همان دوگان X است یعنی

$$X' = \{f : X \longrightarrow C \text{خطی و کران‌دار}\}$$

اگر $N \subset X'$ یک زیرفضای برداری باشد، قرار می‌دهیم:

$$N^\perp = \{x \in X;\ \langle f, x \rangle = \circ\ \forall f \in N\}$$

می‌گوییم $M^\perp$ و $N^\perp$ به‌ترتیب فضاهای عمود بر M و N هستند.

تذکر. $M^\perp$ و $N^\perp$ به‌ترتیب زیرفضاهای برداری بسته در X' و X هستند.

گزاره ۱۱.۴.۱. *فرض کنید $M \subset X$ یک زیرفضای برداری فضای باناخ X باشد. در این‌صورت:*

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M}.$$

فرض کنید $N \subset X^*$ یک زیرفضای برداری باشد. در این‌صورت:

$$\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$$

اثبات. به گزاره II.۱۲ در مرجع [۱۶]، مراجعه شود. $\square$

گزاره ۱۲.۴.۱. *الف) اگر X یک فضای باناخ و $S_1 \subseteq S_2 \subseteq X$، آن‌گاه $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$ و*
ب) اگر $P_1 \subseteq P_2 \subseteq X^*$، آن‌گاه $P_2^\perp \subseteq P_1^\perp$.

اثبات. الف) اگر $f \in S_2^\perp$ پس:

$$\forall x \in S_2 \quad \langle f, x\rangle = 0$$

چون $S_1 \subseteq S_2$ پس:

$$\forall x \in S_1 \quad \langle f, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad f \in S_1^\perp$$

ب) اگر $x \in P_2^\perp$ طبق تعریف:

$$\forall f \in P_2 \quad \langle f, x\rangle = 0$$

چون $P_1 \subseteq P_2$ پس:

$$\forall f \in P_1 \quad \langle f, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in P_1^\perp.$$

□

قضیه ۱۳.۴.۱. *فرض کنید M و L زیرفضاهای خطی و بستهٔ فضای باناخ X باشند، آن‌گاه:*

الف) $M \cap L = (M^\perp + L^\perp)^\perp$

ب) $M^\perp \cap L^\perp = (M + L)^\perp$

اثبات. الف) فرض کنید $x \in M \cap L$ و $f \in M^\perp$ و $g \in L^\perp$. در این‌صورت داریم:

$$\langle g, x\rangle = 0 \quad , \quad \langle f, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f + g, x\rangle = 0$$

چون $f + g \in M^\perp + L^\perp$ پس:

$$x \in (M^\perp + L^\perp)^\perp \quad \Rightarrow \quad M \cap L \subseteq (M^\perp + L^\perp)^\perp$$

برعکس، واضح است که:

$$M^\perp \quad \subseteq \quad M^\perp + L^\perp$$