بسم الله الرحمن الرحيم

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

دررشته ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

عملگرهای ترکیبی وزندار بر فضاهای سریهای توانی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

سرکار خانم دکتر فریبا ارشاد

نگارش:

مهدی محبوبی

خرداد ۱۳۸۹

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : عملگرهای ترکیبی وزندار بر فضاهای سریهای توانی

که توسط مهدی محبوبی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۱۳۸۹/۳/۱۹

نمره: ۱۸.۵ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر بهمن یوسفی	استاد	
۲- استاد مشاور	دکتر فریبا ارشاد	استادیار	
۳- استاد داور	دکتر محبوبه حسین یزدی	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد خاکساری	استادیار	

با تشکر از اساتید گرانقدرم

چکیده

این پایان نامه مشتمل بر ۳ فصل است . در فصل اول علاوه بر بیان برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز برای فصل های بعد، فضای هاردی وزندار که با نماد $H^2(\beta)$ و عملگر وزندار ترکیبی که با نماد $W_{f,Q}$ نمایش می دهند را تعریف می کنیم و هینطور به دنبال شرایط لازم و کافی ای هستیم که تحت آن شرایط عملگر وزندار ترکیبی $W_{f,Q}$ بر فضای $H^2(\beta)$ هرمیتی و کراندار شود. در فصل دوم ، یافتن شرایط لازمی را جهت آن که یک عملگر ترکیبی وزندار بر فضای $H^2(\beta)$ فشرده و یا هیلبرت – اشمیت باشد را مورد بررسی قرار خواهیم داد و در نهایت در فصل سوم شرایط لازمی را می یابیم که با توجه به آن شرایط یک عملگر وزندار ترکیبی مانند $W_{f,Q}$ به یک طولپای وارون پذیر تبدیل شود.

فهرست

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱. پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱ – ۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

در این بخش قضایا و تعاریف مورد نیاز را برای استفاده درسایر فصل ها ، ارائه می دهیم.

قضیه سری تیلور ۱ – ۱ . ۱ :

فرض کنید که f در سراسر قرص باز $|z - z_\circ| < R_\circ$ (قرص به مرکز $z_\circ$ و شعاع $R_\circ$) تحلیلی باشد. در این صورت در هر نقطه ی z در این قرص، $f(z)$ دارای نمایش سری به صورت :

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n$$

است که در آن $a_n = \frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!}$. پس هر گاه $|z - z_\circ| < R_\circ$ ، سری توانی فوق به $f(z)$ همگرا است. این بسط $f(z)$ به سری تیلور f حول نقطه ی $z_\circ$ مشهور است.

هر تابعی که در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی بوده، باید دارای سری تیلوری حول نقطه ی $z_\circ$ باشد. زیرا اگر f در $z_\circ$ تحلیلی باشد ، آنگاه f دریک همسایگی $z_\circ$ مانند $|z - z_\circ| < \varepsilon$ تحلیلی است.

اثبات :رجوع شود به[مرجع۲۷ ، صفحه ی ۱۹۳].
■

قضیه ۱ – ۱ . ۲ : هرگاه $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ آن گاه شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ برابر با ρ است.

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۲۸ ، صفحه ۳۲۳] .
■

قضیه ۱ – ۱ . ۳ : هرگاه شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n z^n$ برابر با $r \neq \circ$ باشد، آن گاه تابع $f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n z^n \ (|z| < r)$ داخل دایره $\gamma: |z| = r$ تحلیلی است و داریم :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

که شعاع همگرایی این سری هم برابر با r است.

اثبات : رجوع شود به [مرجع۲۸ ، صفحه ی ۳۲۵].

■

قضیه ۱ – ۱ . ۴ : (اصل بازتاب) فرض کنید تابع f در حوزه ی $\mathcal{D}$ تحلیلی باشد، که حوزه ی $\mathcal{D}$ شامل قطعه ای از محور x ها بوده که نسبت به آن محور متقارن می باشد. در این صورت برای هر نقطه ی z در حوزه $\mathcal{D}$ داریم

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

اگر و فقط اگر به ازای هر نقطه ی x بر آن قطعه $f(x)$ حقیقی باشد.

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۲۷ ،صفحه ی ۷۹].

■

تعریف ۱ – ۱ . ۵ : (عملگر یکانی) فرض کنید که H یک فضای هیلبرت باشد. عملگر خطی $U: H \to H$ را یک عملگر یکانی نامند هرگاه U یک طولپای پوشا باشد.

تعریف ۱ – ۱ . ۶ : اگر H و K' دو فضای هیلبرت باشند، آنگاه یک یکریختی بین H و K یک عملگر خطی پوشا مانند $U: H \to K$ است به طوری که به ازای هر hو g متعلق به H، داشته باشیم :

$$< Uh, Ug > = < h, g >$$

در این حالت دو فضای هیلبرت K و H را یکریخت می نامند.

قضیه ۱ – ۱ . ۷ : فرض کنید که H و K دو فضای هیلبرت باشند.اگر $V: H \to K$ یک نگاشت خطی باشد. آن گاه V یک طولپایی است اگرو فقط اگر به ازای هر hو g متعلق به H داشته باشیم :

$$< \mathrm{V}h, \mathrm{V}g > = < h, g >$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱، صفحه ی ۱۹].

■

نکته ۱ – ۱ . ۸ : هر یکریختی، یک طولپایی پوشا است.

تعریف ۱ – ۱ . ۹ : فرض کنید که A و B دو عملگر کراندار بر فضاهای هیلبرت Hو K باشند. اگر یک یکریختی مانند $U: H \to K$ موجود باشد. به طوری که

$$U\mathrm{A}\mathrm{U}^{-۱} = B$$

آنگاه عملگرهای A و B را هم ارز واحد می نامند و با نماد $A \cong B$ نشان می دهند.

قضیه ۱ – ۱ . ۱۰ : فرض کنید که Hو K دو فضای هیلبرت بوده و $\mathrm{A}: H \to K$ یک تبدیل خطی باشد. موارد زیر با هم معادلند :

الف) A پیوسته است.

ب) A در صفر پیوسته است.

ج) A در تعدادی نقطه پیوسته است.

د) عدد ثابتی مانند $c >$۰ وجود دارد به طوری که به ازای هر h متعلق به فضای هیلبرت H داریم:

$$\|\mathrm{A}h\| \leq c\|h\|$$

توجه کنید که نرم A به صورت زیر تعریف می شود :

$$\|A\| = sup\{\|Ah\|: \|h\| \leq ۱\}$$

و همواره داریم :

$$\|Ah\| \leq \|\mathrm{A}\|\|h\|$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱ ، صفحه ی ۲۶]

■

تعریف ۱ – ۱ . ۱۱ : مجموعه ی $\mathcal{B}(H,K)$ مجموعه ی تمام تبدیل های خطی کراندار از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت K است.

تعریف ۱ – ۱ . ۱۲ : فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند. در این صورت تابع $u: H \times K \to \mathbb{F}$ یک فرم یک و نیم خطی است اگر برای هرhو g در H، f, k در K وβ, α در $\mathbb{F}$ داشته باشیم :

الف) $$u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(g, k)$$

ب) $$u(h, \alpha k + \beta f) = \bar{\alpha} u(h, k) + \bar{\beta} u(h, f)$$

یک فرم یک و نیم خطی را کراندار گوییم اگر عدد ثابتی مانند M موجود باشد، به طوری که به ازای هر h در H و k در K داشته باشیم :

$$|u(h, k)| \leq M\|h\|\|k\|$$

عدد ثابت M را یک کرانْ برای u می نامند.

قضیه ۱ – ۱ . ۱۳ : اگر $u: H \times K \to \mathbb{F}$ به فرم یک و نیم خطی کراندار ، با کران M باشد، آن گاه عملگرهای منحصر به فردی مانند A در $\mathcal{B}(H, K)$و B در $\mathcal{B}(K, H)$ وجود دارند به طوری که برای هر h در H و k در K داریم :

$$u(h, k) = < Ah, k > = < h, Bk >$$

و

$$\|A\| \leq M, \|B\| \leq M$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱، صفحه ی ۳۱]. ■

تعریف ۱ – ۱ . ۱۴ : اگر A متعلق به $\mathcal{B}(H, K)$ باشد، آن گاه عملگر یکتای B متعلق به $\mathcal{B}(K, H)$ که در قضیه ۱ – ۱ . ۱۲ صدق می کند، الحاق A نامیده می شود و با نماد $B = A^*$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱ – ۱ . ۱۵ : یک زیر مجموعه ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H ، زیر مجموعه ای مانند E است که دو خاصیت زیر را دارا باشد :

الف) برای هر e متعلق به E داشته باشیم :

$$\|e\| = ۱$$

ب) اگر $e_۱$ و $e_۲$ متعلق به E بوده و $e_۱ \neq e_۲$ ، آن گاه $e_۱ \perp e_۲$ باشد.

اگر $E \subseteq H$ یک پایه برای فضای H باشد ، آنگاه E یک مجموعه متعامد یکه ماکزیمال است.

قضیه ۱ – ۱ . ۱۶ : فرض کنید که H یک فضای هیلبرت و E یک مجموعه ی متعامد یکه در فضای H باشد. در این صورت عبارت های زیر با هم معادلند :

الف) E یک پایه برای فضای H است.

ب) اگر h متعلق به فضای H باشد و $h \perp E$ ، آن گاه $h =۰$ می باشد.

ج) $\mathrm{VE} = \mathrm{H}$

د) اگر h متعلق به فضای H باشد، آن گاه :

$$h = \sum\{< h, e > e: e\epsilon E\}$$

ه) اگر h و g متعلق به فضای H باشد ، آن گاه :

$$< g, h >= \sum\{< g, e > < e, h >: e\epsilon E\}$$

(اگر $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{H}$ آنگاه داریم: $\mathrm{VA} = \{\sum_{k=۱}^{n} \alpha_k f_k: n \geq ۱ , \alpha_k \epsilon \mathbb{F}, f_k \epsilon \mathrm{A}\}$)

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱، صفحه ی ۱۷]. ■

قضیه ۱ – ۱ . ۱۷ : فرض کنید که H یک فضای هیلبرت باشد. آن گاه H جدایی پذیر است اگر و فقط اگر شامل یک دستگاه متعامد یکه ماکزیمال که حداکثر شمارش پذیر است ، باشد.

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۲۶ ،صفحه ی ۱۱۷] . ■

قضیه ۱ – ۱ . ۱۸ : اگر $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ دو نرم بر فضای باناخ $\mathfrak{X}$ باشند، آن گاه این دو نرم معادلند اگر و فقط اگر ، ثابت هایی مانند c و C موجود باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به فضای باناخ $\mathfrak{X}$

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱ ، صفحه ۶۴]. ■

تعریف ۱ – ۱ . ۱۹ : فرض کنید که A یک فضای برداری بر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد که عمل ضربی بر روی آن تعریف شده باشد که همراه با آن عمل ضرب به یک حلقه تبدیل گردد. اگر به ازای هر α متعلق به میدان $\mathbb{F}$ و a و b متعلق به فضای A داشته باشیم :

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

آن گاه فضای برداری Aرا یک جبر بر میدان $\mathbb{F}$ می نامیم (میدان $\mathbb{F}$ یا مجموعه ی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، یا مجموعه ی اعداد مختلط ، $\mathbb{C}$، است)

تعریف ۱ – ۱ . ۲۰ : فرض کنید که فضای برداری A بر روی میدان $\mathbb{F}$یک جبر باشد. که حاوی نرم است ($\|.\|$) و همراه با این نرم یک فضای باناخ می باشد. اگر به ازای هر a و b متعلق به A داشته باشیم:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

آن گاه فضای A را یک فضای جبر باناخ می نامند.

تعریف ۱ – ۱ . ۲۱ : فرض کنید که A یک فضای جبر باناخ باشد. نگاشت $f: A \to A$ با تعریف $f(a) = a^*$ را یک بازگشت می نامند در صورتی که به ازای هر b و a متعلق به فضایA و α متعلق به $\mathbb{C}$ خواص زیر برقرار باشد.

الف) $(a^*)^* = a$

ب) $(ab)^* = b^*a^*$

ج) $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha}a^* + b^*$

تعریف ۱ – ۱ . ۲۲ : فرض کنید که A یک فضای جبر باناخ باشد که حاوی نگاشت بازگشت است اگر به ازای هر a متعلق به فضای A داشته باشیم :

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

آن گاه فضای A را یک فضای جبر C^* می نامند.

تعریف ۱ – ۱ . ۲۳ : **اگر** A یک جبر C^* بوده و a متعلق به فضای A باشد ، آنگاه :

الف) a را هرمیتی می نامیم هرگاه $a = a^*$

ب) a را نرمال می نامیم هرگاه $a^*a = aa^*$

ج) a را یکانی می نامیم هرگاه $a^*a = aa^* = 1$ (در این حالت فضای A حتما بایستی عضو همانی ، یعنی ۱ را داشته باشد.)

تعریف ۱ – ۱ . ۲۴ : فرض کنید A یک جبر باناخ بوده که دارای عضو همانی باشد ، اگر a عضو A بوده ، طیف a را با $\sigma(a)$ نمایش می دهیم که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\sigma(a) = \{\alpha \in \mathbb{F}: \text{وارون پذیر نباشد } (a-\alpha)\}$$

و شعاع طیفی a را با $r(a)$ نمایش می دهیم که برابر است با :

$$r(a) = \sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\}$$

تعریف ۱ – ۱ . ۲۵ : فرض کنید که A و L دو فضای جبر با ناخ باشند و همریختی جبری v از فضای A به فضای L تعریف شده باشد. همریختی جبری v را یک *-همریختی نامند هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم :

$$v(a^*) = (v(a))^*$$

قضیه ۱ – ۱ . ۲۶ : فرض کنید که A یک جبر C^* بوده و a متعلق به فضای A باشد.

آن گاه داریم :

الف) اگر a معکوس پذیر باشد ، آن گاه a^* هم معکوس پذیر است و داریم :

$$(a^*)^{-۱} = (a^{-۱})^*$$

ب) $a = x + iy$ است. جایی که y و x عناصرهرمیتی از A هستند.

ج) اگر u یک عنصر یکانی از A باشد، آن گاه :

$$\|u\| = ۱$$

د) اگر B یک جبر C^* بوده و $p: A \to B$ یک * - همریختی باشد.

آن گاه به ازای هر $a \epsilon A$ داریم :

$$\|p(a)\| \leq \|a\|$$

ه) اگر $a = a^*$ باشد. آن گاه :

$$\|a\| = r(a)$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱ ، صفحه ی ۲۳۴]. ■

گزاره ۱ – ۱ . ۲۷ : فرض کنید که H یک فضای هیلبرت باشد، اگر $A\epsilon\mathcal{B}(H)$ ، آن گاه عبارت- های زیر معادلند :

الف) A یک طولپایی است.

ب) $A^* A = I$ (که در آن I عملگر همانی می باشد)

ج) برای هر g و h متعلق به فضای هیلبرت H داریم

$$< Ah, Ag >=< h, g >$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱ ، صفحه ی ۳۵]. ■

گزاره ۱ – ۱ . ۲۸ : فرض کنید که H یک فضای هیلبرت بوده و $A\epsilon\mathcal{B}(H)$ باشد.آن گاه عبارتهای زیر با یکدیگر معادلند :

الف) $A^*A = AA^* = \mathrm{I}$

ب) A یک عملگر واحد است (یعنی A یک طولپایی پوشا می باشد)

ج) A طولپایی نرمال است.

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱، صفحه ۳۵]. ■

تعریف۱ – ۱ . ۲۹ : نگاشت Q از قرص یکه باز Dبه خودش را یک خودریختی بیضی وار گویند ، هرگاه ، دارای دو نقطه ثابت ، یکی در درون D و دیگری در بیرون $\overline{D}$ باشد. [۸]

قضیه۱ – ۱ . ۳۰ : فرض کنید که Q یک نگاشت از قرص یکه باز D به خودش باشد که بیضی وار و همانی نبوده . با توجه به نگاشت Q ، دنباله ی Q_n را به صورت :

$$Q_۱ = Q \quad , Q_{n+۱} = \mathrm{Q}o\mathrm{Q}_n\,, \ (n = ۱,۲,۳, \ldots)$$

تعریف می کنیم . با این شرایط نقطه ای مانند α متعلق به $\overline{D}$ وجود دارد به طوری که دنباله ی Q_n برهر زیر مجموعه ی فشرده ی قرص یکه ی باز D به طور یکنواخت به α همگرا می باشد.

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۸، صفحه ی ۵۸ و۵۷] ■

تعریف **۱ – ۱ . ۳۱** : نقطه ی حدی α، از قضیه ی بالا را ، نقطه ی دنجوی - ولف از نگاشت Q می نامند.

نکته ۱ – ۱ . ۳۲ : نقطه ی دنجوی - ولف از نگاشت Q را می توان به عنوان نقطه ی ثابت منحصر به فرد از نگاشت Q در $\overline{D}$ با شرط $|Q'(\alpha)| \leq ۱$ در نظر گرفت.

تعریف ۱ – ۱ . ۳۳ : فرض کنید که H یک فضای هیلبرت باشد عملگر $w: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ را یک طولپایی نسبی می نامیم هرگاه به ازای هر h متعلق به $(kerw)^{\perp}$ داشته باشیم :

$$\|wh\| = \|h\|$$

فضای $(kerw)^{\perp}$ را فضای آغازی عملگر w و فضای $ranw$ را فضای پایانی آن می نامیم.۲

تعریف ۱ – ۱ . ۳۴ : اگر A یک جبر c^* بوده و a متعلق به فضای A باشد آنگاه a را مثبت می نامیم هر گاه $a \in ReA$ (ReA مجموعه تمام عناصر هرمیتی از A می باشد.) و $\sigma(a) \subseteq [\circ, \infty)$.

اگر a باشد آنگاه این خاصیت a را به صورت $a \geq \circ$ و مجموعه تمام عناصر مثبت A را با نماد A_+ نمایش می دهند . [۱]

قضیه ۱ – ۱ . ۳۵ : اگر $A \in \mathcal{B}(H)$، آنگاه یک طولپایی نسبی مانند w با فضای آغازی $(kerA)^{\perp}$ وفضای پایانی $cl(ranA)$ وجود دارد به طوری که: $A = w|A|$ ($|A| = (A^*A)^{\frac{۱}{۲}}$) ، به علاوه اگر $A = UP$ ($P \geq \circ$ و U یک طولپایی نسبی با خاصیت $kerU = kerP$ است) آنگاه :

$$P = |A| \qquad , \qquad U = W$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۱ ، صفحه ی ۲۴۳] .

■

تبصره ۱ – ۱ . ۳۶ : (عملگر هیلبرت– اشمیت)

داریم :

(آ) اگر $\{e_i\}$ و $\{f_j\}$ دو پایه ی متعامد یکه برای فضای هیلبرت H باشند و $A\epsilon\mathcal{B}(H)$ آنگاه:

$$\sum_i\|Ae_i\|^2 = \sum_j\|Af_j\|^2 = \sum_i\sum_j|\langle Ae_i, Af_j\rangle|^2$$

(ب) اگر $A\epsilon\mathcal{B}(H)$ و $\{e_i\}$ یک پایه برای فضای هیلبرتH باشد ، تعریف می کنیم :

$$\|A\|_2 = [\sum_i\|Ae_i\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به قسمت (آ) $\|A\|_2$ ، مستقل از انتخاب پایه است ، بنابراین خوش تعریف می باشد . اگر $\|A\|_2 < \infty$ باشد ، آنگاه عملگرA را یک عملگر هیلبرت – اشمیت می نامند و مجموعه ی تمام عملگرهای هیلبرت– اشمیت بر فضای هیلبرت H را با $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2(H)$ نشان می دهند.

(ج) برای هر عملگر Aدر $\mathcal{B}(H)$ ، $\|A\| \leq \|A\|_2$ ($\|.\|_2$ ، نرم برای مجموعه ی $\mathcal{B}_2$)

(د) اگر $T \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ و $A \in \mathcal{B}_2$ آنگاه :

$$\|TA\|_2 \leq \|T\|\|A\|_2$$

و

$$\|A^*\|_2 = \|A\|_2$$

و

$$\|AT\|_2 \leq \|A\|_2\|T\|$$

(و) $\mathcal{B}_2$یک ایده ال $\mathcal{B}$ است که $\mathcal{B}_{0,0}$ را شامل می شود ($\mathcal{B}_{0,0}$، مجموعه ی عملگرها از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت H با رتبه ی متناهی می باشد .)

(ه) A متعلق به $\mathcal{B}_2$ است اگر و فقط اگر $|A| \equiv (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ متعلق به $\mathcal{B}_2$ باشد در این حالت $\|A\|_2 = \||A|\|_2$

(ی) $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_0$ مجموعه ی تمام عملگرهای فشرده از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت H)

رجوع شود به [مرجع ۱، صفحه ی ۲۶۷].

قضیه ۱ – ۱ . ۳۷ : فرض کنید که T یک عملگر بر فضای هیلبرت جدایی پذیر H بوده و $T = UP$، تجزیه قطبی T باشد، آن گاه عبارت های زیر معادلند :

الف) عملگر T ، یک عملگر هیلبرت – اشمیت است.

ب) P یک عملگر هیلبرت – اشمیت است.

ج) برای هر پایه ی متعامد یکه $\{e_m\}$ از فضای هیلبرت H داریم :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Te_m\|^2 < \infty$$

د) برای تعدادی پایه متعامد یکه $\{e_m\}$ از فضای هیلبرت H داریم :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Te_m\|^2 < \infty$$

اثبات : رجوع شود به [مرجع ۸ صفحه ی ۱۴۴]. ■

۱ – ۲ فضای هاردی وزندار و عملگرهای ترکیبی وزندار :

تعریف ۱ – ۲ . ۱ : فضای هیلبرتی مانند H که بردارهای آن از توابع تحلیلی بر قرص یکه باز D تشکیل شده اند را در نظر بگیرید. اگر چند جمله ای ها در H چگال باشند و مجموعه $\{۱, z, z^۲, \dots\}$ تشکیل یک مجموعه ی متعامد از بردارهای غیر صفر را در آن دهند، آن گاه به H یک فضای هاردی وزندار گویند.

نکته ۱ – ۲ . ۲ : هر فضای هاردی وزندار به وسیله یک دنباله ی وزندار β، مشخص می شود. که این دنباله ی وزندار به ازای هر عدد صحیح نامنفی j، به صورت $\beta(j) = \|z^j\|$ تعریف می شود.

تبصره ۱ – ۲ . ۳ : فضای هاردی وزندار متناظر با دنباله ی وزندار β را با $\mathrm{H}^۲(\beta)$ نمایش می دهند و ضرب داخلی وابسته به این فضا را به صورت زیر تعریف می نمایند.

$$< f, g > = < \sum_{j=۰}^{\infty} a_j z^j, \sum_{j=۰}^{\infty} c_j z^j > = \sum_{j=۰}^{\infty} a_j \bar{c}_j \, \beta(j)^۲$$

وقتی که $g(z) = \sum_{j=۰}^{\infty} c_j z^j$, $f(z) = \sum_{j=۰}^{\infty} a_j z^j$ اعضای دلخواهی از فضای $\mathrm{H}^۲(\beta)$ می باشد.

تعریف ۱ – ۲ . ۴ : فرض کنید که $\beta = \{\beta_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد مثبت باشد به طوری که $\beta_۰ = ۱$ و $\frac{\beta_{n+۱}}{\beta_n} \to ۱$ وقتی که $n \to \infty$. در این صورت مجموعه ی $H^۲(\beta)$ یک فضای هیلبرت است که از توابع تحلیلی بر قرص یکه باز D تشکیل شده است و ضرب داخلی در آن برای اعضای دلخواه $f(Z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n z^n$ متعلق به $\mathrm{H}^۲(\beta)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$< \mathrm{f}, \mathrm{g} >_{\beta} = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \overline{c_n} \beta_n^۲$$

تعریف ۱ – ۲ . ۵ : عملگر ترکیبی وزندار با علائم f و Q را که در آن f یک تابع تحلیلی بر قرص یکه باز D و Q یک نگاشت تحلیلی از قرص یکه باز D به خودش می باشد را با $w_{f,Q}$ نمایش می دهیم و برای هر h دلخواه متعلق به $\mathrm{H}^۲(\beta)$ ، $w_{f,Q}(h)(z)$را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$w_{f,Q}(h)(z) = f(z). hoQ(z) \qquad (z \epsilon D)$$