Arcsin Arc csch sech sgn span diam limit supp figurechapter tablechapter Niloofar XB

Arccsc Arcsec Arccot Arctan Arccos

چکیده

نام خانوادگی: نظری **نام:** فتح الله **شماره دانشجویی:** ۸۹۲۵۰۰۶

عنوان پایان‌نامه: تعمیم میانگین پذیری ضعیف چند جبر باناخ

استاد راهنما: دکتر عبدالمحمد فروزانفر **استاد مشاور:** دکتر عبدالمحمد امین پور

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **گرایش:** آنالیز **گروه:** ریاضی

محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۲۰/ ۱۲/ ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۱۰۳

واژه‌های کلیدی: منظم آرنزی، میانگین پذیری ضعیف، نگاشت دوخطی، مرکز توپولوژیکی، دوگان دوم.

چکیده: فرض کنیم که A یک جبر باناخ و A^{**} دوگان دوم آن باشد. تحت برخی شرایط رویAنشان می دهیم که اگرA^{**} میانگین پذیر ضعیف باشد، آنگاه A میانگین پذیرضعیف است.ما این مسئله را تعمیم خواهیم داد، یعنی اگر دوگان $(n+۲)$ ام A، $A^{(n+۲)}$ میانگین پذیر $S-T$ ضعیف باشد که در آن T و S نگاشت خطی پیوسته ای از $A^{(n)}$ به $A^{(n)}$ و $n \geq ۰$ عددی زوج است آنگاه $A^{(n)}$، $S-T$ ضعیف است.

همچنین برای جبرهای باناخی که منظم آرنزی هستندنتایجی رابدست می آوریم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

به‌نام خداوند جان و خرد، به‌نام خداوند روزی‌ده رهنمای، به‌نام اول و آخر

مفهوم میانگین‌پذیری نخستین‌بار در سال ۱۹۰۴ میلادی به وسیله‌ی لبگ[۱]، در زمینه‌ی قضیه همگرایی یکنوا و با سوال زیر مطرح گردید:

آیا تابع مجموعه‌ای و به طور متناهی جمعی که تحت عمل گروه خاصی پایا باشد، وجود دارد؟ این سوال بعد از آن به مفهوم میانگین‌پذیری گروه‌ها منجر شد. درسال ۱۹۲۹ فون‌نویمان[۲] رده‌ای از گروه‌های میانگین‌پذیر را معرفی کرد ولی مفهوم میانگین‌پذیری از سال ۱۹۴۰ میلادی به بعد به یکی از مفاهیم مهم آنالیز هارمونیک تبدیل گردید. مفهوم میانگین‌پذیری در زمینه‌ی گروه‌های توپولوژی، اولین بار به وسیله‌ی دی تعریف شد.در سال ۱۹۷۲ جانسون[۳] به نتیجه بسیار مهمی دست یافت. او نشان داد که گروه به طور موضعی فشرده G میانگین‌پذیر است، اگر و فقط اگر، برای هر $L^1(G)$-مدول باناخ مانند E، اولین گروه کوهمولوژی $L^1(G)$ با ضرایب در E^* بدیهی گردد. به عبارت دیگر

$$H^1(L^1(G), E^*) = \{o\}.$$

این نتیجه سرآغازی برای تعریف میانگین‌پذیری جبرهای باناخ بود. جانسون جبر باناخ $\mathcal{A}$ را میانگین‌پذیر نامید، هرگاه برای هر $\mathcal{A}$-مدول باناخ مانند E داشته باشیم $H^1(A, E^*) = \{o\}$. بعد از جانسون

---

[۱] Lebesgue

[۲] V.Nuoman

[۳] B.E.Johnson

و با الهام از وی، میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ به وسیله‌ی کرتیس[۴] و دیلز [۵]معرفی شد. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را میانگین‌پذیر ضعیف گوییم، هرگاه $H^{۱}(A, A^*) = o$. به روشنی هر جبر باناخ میانگین‌پذیر، میانگین‌پذیر ضعیف است. ولی برعکس این مطلب برقرار نیست، زیرا $\ell^{۱}(F_{۲})$ که در آن $F_{۲}$ گروه آزاد تولیدشده به وسیله‌ی دو مولد است، میانگین‌پذیر ضعیف هست ولی میانگین‌پذیر نیست.

این رساله حاصل تحقیق و بررسی و تعمیم میانگین‌پذیری ضعیف چند جبر باناخ است و در سه فصل تنظیم شده است. فصل اول دارای دو بخش است که دربردارنده تعاریف، مفاهیم و قضایای ابتدایی از آنالیز تابعی است. در فصل دوم اعمال مختلف روی يك جبر باناخ، همچون ضرب مدولی و ضرب آرنز را بررسی خواهیم کرد. مفاهیم و قضایای این فصل اهمیت زیادی دارند و در اثبات بسیاری از قضایای فصل سوم کاربرد زیادی خواهند داشت.

فصل سوم را با مقدمه ای بر تعریف اشتقاق و اولین گروه کوهمولوژی آغاز می کنیم. در ادامه مفاهیم T-S میانگین پذیر و T-S میانگین پذیر ضعیف را تعریف کرده و نشان می دهیم که اگر $A^{(n+۲)}$ ، $T'' - S''$ میانگین پذیر ضعیف باشد آن گاه $A^{(n)}$، T-S میانگین پذیر ضعیف است. جایی که T و S نگاشت های خطی پیوسته ای از $A^{(n)}$ به $A^{(n)}$ می باشند.

فتح الله نظری

اسفند ۹۱

[۴] P.G.Curtis

[۵] H.G.Dales

فصل ۱

کلیات و تعاریف مقدماتی

مقدمه

این فصل را با بیان مفاهیم اساسی و اصلی بیان می کنیم. اثبات قضایا و مطالب گفته شده، اغلب به کتب یا مقالات مربوط ارجاع داده شده است. تعاریف، به منظور معرفی علائم و اصطلاحات وصورت قضایا برای رفع نیاز از مراجعه به منابع مختلف بیان می شوند.
این فصل مشتمل بر ۲ بخش است: نخست، مفاهیم مقدماتی مورد نیاز آنالیز تابعی و بخش دوم، تعاریف اساسی و قضایای ضروری برای فصل های دوم وسوم بیان می گردد.
خاطرنشان می سازیم که در این رساله مجموعه اعداد طبیعی را با N ، اعداد حقیقی رابا R و میدان اعداد حقیقی و مختلط را با K نشان می دهیم.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱ *فضای متری*

فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی و d یک تابع حقیقی- مقدار و نامنفی روی $X \times X$ باشد. تابع d را متر روی X می‌نامیم هر گاه به ازای هر x, y, z از X خواص زیر برقرار باشند:

۱. $d(x,y) = ۰ \iff x = y,$

۲. $d(x,y) = d(y,x)$ (تقارن),

۳. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (نامساوی مثلثی).

زوج (X,d) را، در صورتی که X یک مجموعه و d یک متر روی X باشد، فضای متری می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ *فضای خطی(برداری)*

فرض کنیم $(X,+)$ گروه آبلی باشد، X را فضای خطی روی میدان K می‌نامیم هرگاه نگاشت $K \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ دارای خواص زیر باشد:

i) $(\alpha, \beta \in K, x \in X)$ $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$؛

ii) $(\alpha \in K, x_۱, x_۲ \in X)$ $\alpha(x_۱ + x_۲) = \alpha x_۱ + \alpha x_۲$؛

iii) $(\alpha, \beta \in K, x \in X)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$؛

iv) $(x \in X)$ $۱x = x$.

تعریف ۳.۱.۱ *فضاهای نرم‌دار*

فرض کنیم X فضای برداری روی میدان K باشد. تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow R$ را یک نرم روی X خوانیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α

۱. $\|x\| \geq ۰$؛

۲. $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$ ؛

۳. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$؛

۴. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت زوج $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم. اگر شرط (۲) برقرار نباشد آن‌گاه تابع $\|.\|$را یک شبه نرم روی X گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ *متریک القاء شده توسط نرم*

هر تابع نرم روی فضای نرم‌دار X ، متر d تعریف شده به صورت زیر را القاء می‌کند

$$d : X \times X \longrightarrow R$$

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

در این صورت (X, d) یک فضای متریک است و متر d را متر القایی بوسیله نرم گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ *دنباله کشی*

دنباله (x_n) در فضای متری (X, d) را کشی می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد طبیعی $N = N(\varepsilon)$ی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m, n \in N$ و $n, m > N$ داشته باشیم، $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

تعریف ۶.۱.۱ *فضای کامل(تام)*

فضای متری (X, d) را کامل گوییم، هر گاه هر دنباله کشی در X همگرا به نقطه ای در X باشد .

تعریف ۷.۱.۱ *فضای باناخ*

فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را فضای باناخ گوییم، هرگاه تحت متر القایی توسط نرم کامل باشد، یعنی هردنباله کشی در آن همگرا باشد. به عنوان مثال برای هر $n \in N$ ، R^n همراه

$$\|x\| = (\sum_{j=۱}^{n} |x_j|^۲)^{۱/۲} = \sqrt{|x_۱|^۲ + \ldots + |x_n|^۲}.$$

فضای باناخ است.

تعریف ۸.۱.۱ *اگر X یک فضای باناخ باشد گوی یکه X را با $X_{[۱]}$ نمایش می‌دهیم و به صورت*

$$X_{[۱]} = \{x \in X : \|x\| \leq ۱\},$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۱ *فرض کنیم $۱ \leq p < \infty$ مجموعه ℓ^p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

(در این‌جا C مجموعه اعداد مختلط است).

$$\ell^p = \{x = (x_n)_۱^\infty \subseteq C : \sum_{n=۱}^\infty |x_n|^p < \infty\}.$$

به‌سادگی ثابت می‌شود که ℓ^p تحت عمل جمع معمولی یک فضای برداری است. حال به صورت زیر روی ℓ^p نرم تعریف می‌کنیم

$$\|x\|_p = (\sum_{n=۱}^\infty |x_n|^p)^{\frac{۱}{p}}, \quad (x = (x_n) \in \ell^p).$$

همچنین ℓ^∞ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\ell^\infty = \{x = (x_n) \subseteq C : \exists M \in N \quad s.t \quad \forall n \in N; |x_n| \leq M\}.$$

به‌سادگی ثابت می‌شود که ℓ^∞ یک فضای برداری است. در واقع ℓ^∞ فضای همه‌ی دنباله‌های کراندار از اعداد مختلط است و این فضا با نرم تعریف شده زیر یک فضای نرم‌دار است

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in N\} \quad , \qquad (x = (x_n) \in \ell^\infty).$$

قضیه ۱۰.۱.۱ *برای $۱ \leq p \leq \infty$، ℓ^p فضایی باناخ است.*

برهان:به [۸] مراجعه شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ *نگاشت خطی*

اگر X و Y فضاهای برداری روی میدان K باشند، آن‌گاه نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت خطی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in K$

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y).$$

مجموعه تمام نگاشت‌های خطی از X به توی Y را با نماد $\mathcal{L}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ نگاشت دو خطی
اگر X و Y و Z فضاهای برداری روی میدان K باشند، آن‌گاه نگاشت $T:X\times Y\longrightarrow Z$ را یک دوخطی گویند هرگاه برای هر $\alpha,\beta\in K$

$$T(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha T(x_1,y)+\beta T(x_2,y)\quad,\qquad (x_1,x_2\in X,y\in Y).$$

$$T(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T(x,y_1)+\beta T(x,y_2)\quad,\qquad (x\in X,y_1,y_2\in Y).$$

به همین صورت این تعریف را برای n-خطی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ نگاشت خطی کراندار
فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌داری باشند و $T:X\longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد، آن‌گاه نگاشت خطی T را کراندار گوییم هرگاه $M>0$ ی وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x\in X$

$$\|T(x)\|\leq M\|x\|.$$

توجه: *نگاشت خطی کراندار از X به Y را عملگر خطی کراندار از X به Y نیز می‌گوییم. فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با نماد $\mathcal{B}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. این فضا با عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در زیر فضای برداری است*

$$(T_1+T_2)(x)=T_1(x)+T_2(x),$$
$$(\alpha T)(x)=\alpha(T(x)).$$

همچنین اگر $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ آن‌گاه نرم T را با $\|T\|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\|=\sup\{\,\|T(x)\|:x\in X,\|x\|=1\}.$$

همچنین اگر $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ آن‌گاه نرم فوق با نرم‌های زیر معادل است

$$\sup\{\|T(x)\| \ : x\in X \ : \|x\|\leq ۱\} \ = \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : \ x\in X\,, x\neq ۰\}.$$

$\mathcal{B}(X,Y)$ با نرم بالا یک فضای نرم‌دار است. در صورتی که $X=Y$ به جای $\mathcal{B}(X,X)$ می‌نویسیم $\mathcal{B}(X)$.

نکته: *فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و T یک نگاشت خطی کراندار از X به Y باشد، در این صورت با توجه به تعریف $\|T\|$ و تعریف سوپریمم، برای هر $\varepsilon>۰$ می‌توان گفت*

$$\exists \quad x\in X \qquad s.t \qquad \|x\|=۱, \quad \|T(x)\|>\|T\|-\varepsilon.$$

قضیه ۱.۱.۱۴ *اگر Y فضای باناخ باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}(X,Y)$ با سوپریمم نرم تعریف شده در تعریف [۱-۱-۱۳]تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد.*

برهان: به [۸ قضیه۲-۱۰-۲] مراجعه شود.

مثال ۱.۱.۱۵ عملگر همانی $I\,:\,X\longrightarrow X$ روی فضای نرم‌دار X، با ضابطه $I(x)=x$ یک عملگر خطی کراندار است و $\|I\| \ = \sup\{\|Ix\|:\ x\in X,\ \|x\|=۱\}=۱$.

قضیه ۱.۱.۱۶ *فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار باشند و $T\,:\,X\longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد، آن‌گاه احکام زیر معادلند*

۱. T پیوسته است.

۲. T کراندار است.

۳. T در یك نقطه پیوسته است.

برهان: به [۸ قضیه۲-۷-۹] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۱.۱۷ نگاشت طولپا

فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. عملگر خطی $T\,:\,X\longrightarrow Y$ را یک نگاشت طولپا می‌نامیم هرگاه T یک یک‌ریختی باشد و برای هر $x\in X$

$$\|T(x)\|=\|x\|.$$

تعریف ۱.۱.۱۸ هسته

فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. اگر $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ عملگر خطی باشد، آن‌گاه هسته T را با $Ker(T)$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم

$$Ker(T) = \{x \in X : T(x) = ۰\}.$$

با توجه به منبع [۸]، هسته T یک زیر فضای برداری X است و به علاوه اگر T خطی و کراندار باشد آن‌گاه هسته T زیر فضای بسته X است.

تعریف ۱.۱.۱۹ تابعک خطی

اگر X فضای نرم‌دار روی میدان حقیقی یا مختلط K باشد، آن‌گاه عملگر خطی $f : X \longrightarrow K$ را یک تابعک خطی می‌نامیم. همچنین f را تابعک خطی کراندار نامیم هر گاه $\lambda \geq ۰$ ی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ ، $|f(x)| \leq \lambda\|x\|$.

تعریف ۱.۱.۲۰ دوگان فضای نرم‌دار

اگر X یك فضای نرم‌دار روی میدان حقیقی یا مختلط K باشد آن‌گاه مجموعه تمام تابعك‌های خطی و کراندار روی X یعنی $\mathcal{B}(X,K)$ را با X^* نمایش می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم.

X^* همراه با جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در زیر یك فضای برداری است:

$$(f_۱ + f_۲)(x) = f_۱(x) + f_۲(x),$$
$$(af)(x) = af(x).$$

به علاوه X^* با نرم زیر یک فضای نرم دار است.

$$\|f\| = \sup\{\tfrac{|f(x)|}{\|x\|}, \quad x \in X, \quad x \neq ۰\} = \sup\{|f(x)|, \quad x \in X, \quad \|x\| \leq ۱\}.$$

به همین ترتیب می توان فضای دوگان X^* یعنی $(X^*)^*$ را تعریف کرد که آن را با X^{**} نشان می‌دهیم. برای هر $n \geq ۳$ ، دوگان مرتبه n-ام را با $X^{(n)}$ نشان می‌دهیم. همچنین قرارداد می‌کنیم $X^{(۰)} = X$.

قضیه ۱.۱.۲۱ اگر X یک فضای نرم‌دار و X^* فضای برداری دوگان X باشد، آن‌گاه X^* یک فضای باناخ است.

برهان: می‌دانیم K فضایی باناخ است و از طرفی $X^* = \mathcal{B}(X, K)$ پس طبق قضیه[۱-۱-۱۴] X^* یک فضای باناخ است.

قضیه ۱.۱.۲۲ هان باناخ

فرض کنیم f تابعک خطی و کراندار روی زیرفضای Z از فضای نرم‌دار X باشد. سپس تابعک خطی و کراندار F روی X وجود دارد که توسیعی از f روی X است(یعنی $(z \in Z)\ \ F(z) = f(z)$) و

$$\|F\|_X = \|f\|_Z.$$

برهان: به [۸ قضیه۲-۱۰-۴] مراجعه شود.

قضیه ۱.۱.۲۳ اگر X یک فضای نرم‌دار و $x_\circ \neq \circ$ عضو دلخواهی در X باشد، آن‌گاه تابعک خطی کراندار f^* روی X وجود دارد به طوری که

$$\|f^*\| = 1 \qquad f^*(x_\circ) = \|x_\circ\|.$$

برهان:

فرض کنیم $Z = \{\alpha x_\circ ; \alpha \in C\}$. واضح است که Z یک زیر فضای خطی X است. تابعک خطی f را روی Z به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = f(\alpha x_\circ) = \alpha\|x_\circ\| \quad (x \in X) \qquad (*).$$

با توجه به تعریف تابعک f و خواص نرم داریم:

$$|f(x)| = |f(\alpha x_\circ)| = |\alpha|\|x_\circ\| = \|\alpha x_\circ\| = \|x\|.$$

بنابراین f کراندار و $\|f\| = 1$ است. حال با توجه به قضیه هان- باناخ f دارای توسیع f^* از Z به X است به طوری که $\|f\| = \|f^*\| = 1$ و با توجه به (*) مشاهده می‌کنیم که

$$f^*(x_\circ) = f(x_\circ) = \|x_\circ\|$$

.

نتیجه ۱.۱.۲۴ برای هر x در فضای نرم‌دار X داریم

$$\|x\| = \sup_{f\in X^* f\neq \cdot} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

بنابراین اگر $x_\cdot \in X$ به گونه‌ای باشد که ، $f(x_\cdot) = \cdot \ (f \in X^*)$ ، آن‌گاه $x_\cdot = \cdot$.

برهان:

از قضیه [۱-۱-۲۳] با نوشتن x به جای $x_\cdot$ داریم:

$$\sup_{f\in X^* f\neq \cdot} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|f^*(x)|}{\|f^*\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\| \qquad (1).$$

از طرفی به ازای هر $f \in \mathcal{A}^*$ ؛ $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \ (x \in \mathcal{A})$. در نتیجه

$$\sup_{f\in X^* f\neq \cdot} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\| \qquad (2).$$

از روابط (۱) و (۲) حکم نتیجه می‌شود.

لم ۱.۱.۲۵ فرض کنیم Y زیرفضایی بسته و سره از فضای نرم‌دار X باشد. اگر $x_\cdot \in X - Y$ یک عنصر دلخواه و

$$\delta \ = \ \inf\{\|y^* - x_\cdot\|, y^* \in Y\}$$

فاصله‌ی $x_\cdot$ از Y باشد،آن‌گاه یک $f^* \in X^*$ ی وجود دارد به طوری که

$$\|f^*\| = 1, \qquad f^*(x_\cdot) = \delta, \qquad f^*(y) = \cdot \ \ \forall y \in Y.$$

برهان: به [۸ لم۴-۶-۷] مراجعه شود. .

قرارداد:

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد.

۱. اگر f تابعك خطی و کراندار روی X باشد، یعنی $f \in X^*$ ، آن‌گاه مقدار f در $x \in X$ را با $< f, x >$ نشان می‌دهیم.

۲. همچنین اگر F تابعک خطی و کراندار روی فضای نرم‌دار X^* باشد، یعنی $F \in X^{**}$، آن‌گاه مقدار F در $f \in X^*$ را با $< F, f >$ (یا $F(f)$) نشان می‌دهیم.

بدیهی است که برای $x \in X$ ثابت، نگاشت $K \longrightarrow X^* :< f, x > \longmapsto f$ یك تابعك خطی و کراندار روی X^* است. پس اگر X فضای نرم‌دار و $f \in X^*$ فرایند بالا تابعك خطی روی X^* نتیجه می‌دهد. یعنی ما می‌توانیم با انتخاب ثابت $x \in X$ تابعک خطی و کراندار $k_x \in X^{**}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$k_x : X^* \longrightarrow K$

$k_x(f) \ =< f, x > .$ (اندیس k ،یعنی x، نشان می‌دهد که k وابسته به ثابت $x \in X$ است). در حقیقت برای $f_1, f_2 \in X^*$ و $\alpha, \beta \in K$ داریم:

$$k_x(\alpha f_1 + \beta f_2) \ =< \alpha f_1 + \beta f_2, x >=< \alpha f_1, x > + < \beta f_2, x >= \alpha < f_1, x > + \beta < f_2, x >= \ \alpha k_x(f_1) + \beta k_x(f_2)$$

و

$$|k_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \qquad (f \in X^*).$$

بنابراین k_x عنصری از X^{**} است. برای هر $x \in X$، یک $k_x \in X^{**}$ متناظر با x وجود دارد. با استفاده از این مطلب نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم:

$k : X \longrightarrow X^{**}$

$x \longmapsto k_x.$

k را نگاشت (نشاننده) کانونی از X به توی X^{**} و k_x را تصویر کانونی $x \in X$ در X^{**} می‌نامیم. همانطور که در بالا گفتیم k_x تابعک خطی و کراندار روی X^* است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_x(f) =< k_x, f >=< f, x >= f(x) \quad (f \in X^*).$$

گاهی نگاشت k را با $(\hat{\ })$ نشان می‌دهیم و

$$< k_x, f >=< \hat{x}, f >=< f, x > \qquad (f \in X^*).$$

قضیه ۱.۱ .۲۶ فرض کنیم X فضای نرم‌دار باشد. در این صورت نگاشت کانونی $k : X \longrightarrow X^{**}$ ، $k(x) = k_x$ که در آن برای هر $f \in X^*$ ، $< k(x), f > = < k_x, f > = < f, x >$ نگاشتی خطی و طولپا از X به X^{**} است.

برهان:
در بالا نشان دادیم که برای هر $x \in X$ ، $k_x \in X^{**}$. ابتدا نشان می‌دهیم k خطی است. برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in K$:

$$< k(\alpha x + y), f >=< k_{(\alpha x+y)}, f >= f(\alpha x + y)$$
$$= \alpha f(x) + f(y) = \alpha < k_x, f > + < k_y, f >$$
$$= \alpha < k(x), f > + < k(y), f >=< \alpha k(x) + k(y), f > \quad (f \in X^*)$$
$$\longrightarrow k(\alpha x + y) = \alpha k(x) + k(y).$$

بنابراین k خطی است. حال نشان می دهیم k طولپا است. برای هر $x \in X$ داریم:

$$| < k(x), f > | = |k_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$$

$\longrightarrow \|k(x)\| \leq \|x\| \qquad (\forall f \in X^*) \qquad (۱)$ از طرف دیگر بنا به قضیه [۱-۱-۲۳]، برای هر $x \in X$ که $x \neq ۰$، $f^* \in X^*$ی موجود است به طوری که $f^*(x) = \|x\|$ ، $\|f^*\| = ۱$.

و بنابراین:

$$\|k(x)\| = \|k_x\| = \sup\{|k_x(f)| : \|f\| = ۱\}$$
$$\geq |k_x(f^*)| = \|x\|$$
$$\longrightarrow \|k(x)\| \geq \|x\| \qquad (۲)$$

حال از (۱) و (۲) تساوی ثابت می شود. بنابراین k نگاشتی خطی و طولپا از X به X^{**}است و X با زیرفضایی از X^{**} یک‌ریخت است و ما می‌توانیم X را به عنوان زیر فضایی از X^{**} در نظر بگیریم.

نمی‌توانیم بگوییم فضاهای X و X^{**} یک‌ریخت‌اند زیرا k الزاما پوشا نیست.

تعریف ۱.۱ .۲۷ فضای نرم‌دار X را بازتابی گوییم اگر نگاشت $k : X \longrightarrow X^{**}$ پوشا باشد.

تعریف ۱.۱ .۲۸ همگرایی ضعیف و قوی

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد، آن‌گاه در این فضا دو نوع همگرایی می‌توان تعریف کرد

۱. همگرایی قوی

دنباله (x_n) در X را همگرای قوی یا (همگرا) گوییم، هرگاه $x \in X$ی وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = \text{۰}$$

در این صورت x را حد قوی (یا حد) (x_n) نامیده و می‌نویسیم $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ یا $x_n \overset{s}{\longrightarrow} x$ و می‌گوییم دنباله (x_n) به طور قوی به x همگراست(یا به‌طور ساده به x همگراست).

۲. همگرایی ضعیف

گوییم دنباله (x_n) در فضای نرم‌دار X به x به‌طور ضعیف همگراست و می‌نویسیم $x_n \overset{w}{\longrightarrow} x$، هرگاه برای هر $f \in X^*$، $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ یا $|f(x_n) - f(x)| \longrightarrow \text{۰}$.

تعریف ۱.۱ .۲۹ همگرایی قوی و ضعیف- ستاره دنباله‌ی تابعک‌ها

فرض کنیم (f_n) دنباله‌ای از تابعک‌های خطی کراندار روی فضای نرم‌دار X باشد ($[(f_n) \subseteq X^*]$)، آن‌گاه می‌توانیم دو نوع همگرایی تعریف کنیم

۱. همگرایی قوی تابعک‌ها

دنباله‌ی (f_n) را به طور قوی همگرا به نقطه‌ی $f \in X^*$ گوییم و می‌نویسیم $f_n \overset{s}{\longrightarrow} f$، در صورتی که

$$\|f_n - f\| \longrightarrow \text{۰}$$

(توجه کنید که $\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)|,\ x \in X,\ \|x\| \leq \text{۱}\}$).

۲. همگرایی ضعیف- ستاره

دنباله‌ی $(f_n) \subseteq X^*$ را به‌طور ضعیف- ستاره همگرا به نقطه‌ی $f \in X^*$ گوییم و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{w^*} f$ در صورتی که برای هر $x \in X$، $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. این معادل است با این که به ازاء هر $x \in X$، $\pi_x(f_n) \longrightarrow \pi_x(f)$ که $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ نگاشت کانونی است.

تعریف ۱.۱.۳۰ مجموعه جهت‌دار

مجموعه Λ را جهت‌دار خوانیم اگر و تنها اگر رابطه $\leq$ روی Λ یافت شود که در شرایط زیر صدق کند،

۱. به ازای هر $\lambda \in \Lambda$ ، $\lambda \leq \lambda$.

۲. اگر $\lambda_2 \leq \lambda_1$ و $\lambda_3 \leq \lambda_2$ آن گاه $\lambda_3 \leq \lambda_1$.

۳. اگر $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ آن گاه $\lambda_3 \in \Lambda$ یافت شود به طوری که $\lambda_3 \leq \lambda_1$ و $\lambda_3 \leq \lambda_2$.

معمولا رابطه $\leq$ را یک جهت روی Λ می‌نامیم.

مثال ۱.۱.۳۱

۱) مجموعه توانی مجموعه A یعنی $P(A)$ همراه با رابطه شمول مجموعه‌ی جهت‌دار است.

۲) مجموعه اعداد طبیعی N همراه با ترتیب نابیشتری (کوچکتر یا مساوی) معمولی مجموعه جهت‌دار می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۳۲ تور[1]

تور در مجموعه X عبارت است از تابع $x : \Lambda \longrightarrow X$ که در آن Λ مجموعه جهت‌دار است. نقطه $x(\lambda)$ را معمولا با x_λ نمایش می‌دهیم و اغلب تور x را با $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۱.۳۳

هر دنباله در مجموعه X توری در X است زیرا فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای در X باشد این دنباله تابع

[1] net

$x : N \longrightarrow X$ را نمایش می‌دهد. با در نظر گرفتن ترتیب معمولی روی مجموعه اعداد طبیعی N، N مجموعه‌ی جهت‌داری خواهد شد. بنابراین تابع $x : N \longrightarrow X$ یعنی دنباله (x_n) یک تور در X است.

تعریف ۱.۱.۳۴ زیر تور

زیر تور از تور $x : \Lambda \longrightarrow X$ عبارت است از ترکیب $x \circ \varphi$ که در آن $\varphi : M \longrightarrow \Lambda$ تابع فراپایانی صعودی از مجموعه جهت‌دار M به‌توی Λ می‌باشد بدین معنا که:

۱. اگر $\mu_۱ \leq \mu_۲$ آن‌گاه $\varphi(\mu_۱) \leq \varphi(\mu_۲)$ (φ صعودی است).

۲. برای هر $\lambda \in \Lambda$، عضوی مانند $\mu \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $\lambda \leq \varphi(\mu)$ (φ فرا پایانی در Λ است).

برای هر $\mu \in M$ نقطه‌ی $x \circ \varphi(\mu)$ را معمولا با $x_{\lambda\mu}$ نمایش داده و اغلب صحبت از زیر تور $(x_{\lambda\mu})_{\mu \in M}$ از تور $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ می‌شود.

تعریف ۱.۱.۳۵ همگرایی تورها

فرض کنیم $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ تور در فضای نرم‌دار X باشد. گوییم (x_λ) همگرا به $x \in X$ است و می‌نویسیم $x_\lambda \longrightarrow x$ هر گاه به ازای هر مجموعه باز U شامل x، $\lambda_. \in \Lambda$ ی وجود داشته باشد به طوری که $\lambda \geq \lambda_.$ نتیجه دهد $x_\lambda \in U$. به علاوه گوییم y یك نقطه بستاری تور (x_λ) در X است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه باز U شامل y در X و هر $\lambda_. \in \Lambda$، $\lambda \geq \lambda_.$ ی وجود داشته باشد به قسمی که $x_\lambda \in U$.

گزاره ۱.۱.۳۶ اگر $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ تور در فضای نرم‌دار R باشد و $x_\lambda \longrightarrow x$ آن‌گاه x یکتاست.

برهان: به [۸] مراجعه شود.

قضیه ۱.۱.۳۷ فرض کنیم $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ تور در فضای نرم‌دار X باشد. اگر $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ به $x \in X$ همگرا باشد آن‌گاه هر زیر تور آن نیز به x همگراست.

برهان: به [۸] مراجعه شود.

قضیه ۱.۱.۳۸ فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار و تابع $f : X \longrightarrow Y$ در $x_. \in X$ پیوسته باشد. اگر $x_\lambda \longrightarrow x_.$ در X آن‌گاه $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x_.)$ در Y.

برهان:

فرض کنیم V یک مجموعه باز شامل $f(x_.)$ باشد. چون f در $x_.$ پیوسته است لذا مجموعه باز U شامل $x_.$ موجود است به قسمی که $f(U) \subseteq V$. با توجه به این که $x_\lambda \longrightarrow x_.$ لذا $\lambda_.$ی هست به قسمی که $\lambda \geq \lambda_.$ نتیجه می‌دهد که $x_\lambda \in U$. بنابراین $\lambda \geq \lambda_.$ نتیجه می‌دهد که $f(x_\lambda) \in f(U)$ و لذا $\lambda \geq \lambda_.$ نتیجه می‌دهد که $f(x_\lambda) \in V$ یعنی $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x_.)$ در Y و اثبات تمام است.

قضیه ۱.۱.۳۹ فرض کنیم X فضای نرم‌دار باشد. y یک نقطه بستار تور $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در X است اگر و تنها اگر $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ دارای زیر توری همگرا به y در X باشد.

لم ۱.۱.۴۰ اگر X فضای نرم‌دار و $A \subseteq X$ در X فشرده و به علاوه $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ تور از اعضا A باشد، آن‌گاه $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ دارای زیر توری همگرا در X به عضوی از A است.

تعریف ۱.۱.۴۱ توپولوژی ضعیف

فرض کنیم X فضای توپولوژی و F خانواده‌ای از تابعک‌های خطی روی X باشد. ضعیف ترین توپولوژی (یا کوچکترین توپولوژی) روی X به قسمی که هر $f \in F$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف تولید شده توسط F نامیم.

توجه: توپولوژی ضعیف تر مجموعه‌های باز کمتری دارد.

اگر X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان آن باشد، آن‌گاه توپولوژی ضعیف تولید شده توسط X^* روی X را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم، یعنی کوچکترین توپولوژی روی X به قسمی که هر $f \in X^*$ نسبت به آن پیوسته است. این توپولوژی را به $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم. همچنین همسایگی‌ها در این توپولوژی به صورت زیر هستند

برای هر $\varepsilon > ۰$ و $x \in X$ قرار می‌دهیم

$$V(x, G, \varepsilon) = \{y \in X \ : |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in G\}.$$

که در آن $G \subseteq X^*$ و متناهی است. $V(x, G, \varepsilon)$ را یک همسایگی x در این توپولوژی می‌نامیم و می‌گوییم $U \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ مجموعه‌ی متناهی $G \subseteq X^*$ و $\varepsilon > ۰$ ی

وجود داشته باشد به‌طوری که $V(x,G,\varepsilon) \subseteq U$. اگر $A \subseteq X$ نسبت به این توپولوژی فشرده باشد آن را فشرده ضعیف می‌نامیم. به‌علاوه بستار A را در این توپولوژی بستار ضعیف می‌نامیم. اگر دنباله (x_n) نسبت به توپولوژی ضعیف روی X به x همگرا باشد می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$.

تعریف ۱.۱.۴۲ توپولوژی ضعیف- ستاره

فرض کنیم X فضای نرم‌دار و X^{**} دوگان مضاعف X باشد. همان‌طور که در قضیه‌ی [۱-۱-۲۶] بیان شد عملگر خطی $k : X \longrightarrow X^{**}$ با ضابطه‌ی $k(x) = k_x$ که در آن $k_x : X^* \longrightarrow K$ تابعك خطی است با ضابطه‌ی $k_x(f) = f(x)$ که یک یك‌ریختی حافظ نرم از فضای X به $k(X) \subseteq X^{**}$ می‌باشد.

توپولوژی ضعیف روی X^* تولید شده توسط خانواده‌ی $k(X)$ را توپولوژی ضعیف- ستاره می‌نامیم و با $\sigma(X^*,(X))$ نشان می‌دهیم یعنی کوچکترین توپولوژی روی X^* به‌طوری که برای هر $x \in X$، $k(x)$ یا به‌عبارتی k_x پیوسته می‌شود.همسایگی‌ها در این توپولوژی به صورت زیر تعریف می‌شوند اگر $\varepsilon > ۰$ و $f_۰ \in X^*$ و $G = \{k_{x_۱},\dots,k_{x_n}\} \subseteq k(X) = X$ مجموعه‌ی متناهی باشد آن‌گاه

$$V(f_۰,G,\varepsilon) = \{f \in X^* \quad : |k_{x_i}(f) - k_{x_i}(f_۰)| < \varepsilon, \quad ۱ \leq i \leq n\}.$$

به‌عبارت دیگر اگر $G = \{x_۱, x_۲, ...x_n\} \subseteq X$، آن‌گاه

$$V(f_۰,G,\varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x_i) - f_۰(x_i)| < ۰, x_i \in G\}.$$

اگر (f_n) دنباله‌ای در X^* که در توپولوژی ضعیف- ستاره به f همگراست، آن‌گاه می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{w^*} f$ و $f_n \xrightarrow{w^*} f$ اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$، $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. در این توپولوژی تور $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ به f همگراست اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ ، $f_\lambda(x) \longrightarrow f(x)$.

قضیه ۱.۱.۴۳ فرض کنیم E و F فضاهای نرم‌دار و $T \in \mathcal{B}(E,F)$ باشد. آن‌گاه یک نگاشت یکتای T^* در $\mathcal{B}(F^*,E^*)$ وجود دارد به طوری که

$$< \lambda, Tx > = < T^*\lambda, x > \qquad (x \in E, \lambda \in F^*).$$

علاوه بر این، $\|T^*\| = \|T\|$، و نگاشت $T^* : (F^*, \sigma(F^*,F)) \longrightarrow (E^*, \sigma(E^*,E))$ پیوسته است.

برهان: به [۶ قضیه A.۳.۴۶] مراجعه شود.