دانشکده علوم کامپیوتر، آمار و ریاضی

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

اصل ایده‌آل اول در حلقه‌های جابه‌جایی

نگارش

مریم حمیدی زاده

استاد راهنما

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور

دکتر راضیه محجوب

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

در اینجا از کلیهٔ افرادی که به من در تهیهٔ این پایان‌نامه و همچنین در این دوره تحصیلی یاری نموده‌اند، خصوصاً از اساتید ارجمند سرکار خانم دکتر اشرفی و جناب آقای دکتر بهمنی تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تقدیم به :

روح مادر فداکارم

و

پدر همیشه دلسوزم

چکیده

در این پایان نامه به معرفی دسته‌ای از خانواده‌های Oka (Oka قوی) و Ako (Ako قوی) از ایده‌آل‌ها می‌پردازیم و اصل ایده‌آل اول را معرفی می‌کنیم. سپس قضیهٔ وابستگی منطقی بیان می‌شود و نشان می‌دهیم خانواده‌هایی از ایده‌آل‌ها که یکی از گزاره‌های این قضیه برای آنها برقرار باشد، در اصل ایده‌آل اول صدق می‌کنند.

در ادامه اصل ایده‌آل اول را در خانواده‌ای از ایده‌آل‌های منظم، خانواده‌ای از ایده‌آل‌های S‌ـچگال، خانواده‌ای از ایده‌آل‌های وارون‌پذیر و ... بررسی می‌کنیم و کاربرد آن را در این خانواده‌ها خواهیم دید. همچنین معادلی برای این اصل می‌آوریم و کاربرد آن را در خانواده‌ای از ایده‌آل‌های با تولید متناهی بررسی خواهیم کرد. این پایان نامه بر گرفته از مقالات [۲۵] و [۲۶] می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل‌های اول، اصل ایده‌آل اول، مکمل اصل ایده‌آل اول، قضیهٔ وابستگی منطقی، خانوادهٔ Oka (Oka قوی) از ایده‌آل‌ها و خانوادهٔ Ako (Ako قوی) از ایده‌آل‌ها.

مقدمه

در این پایان نامه به دو مفهوم اساسی از خانواده‌ای از ایده‌آل‌ها به نام Oka (Oka قوی) و Ako (Ako قوی) نیاز داریم. مفهوم Oka اولین بار توسط Oka در مقاله [۳۴] در سال ۱۹۵۱ مطرح شد و خانوادهٔ Ako از خانوادهٔ Oka نشأت گرفت. او به عنوان نتیجه‌ای از ایده‌آل‌های با تولید متناهی، مفهوم Oka را برای حلقه‌های توابع مختلط بیان کرد. سپس ناگاتا [1] در مرجع [۳۱]، با استفاده از این نتیجه توانست برهانی برای قضیهٔ کوهن [2] (قضیه (۲) از مرجع [٦]) ارائه دهد.

در ابتدا اصل ایده‌آل اول معرفی خواهد شد. با استفاده از این اصل می‌توان اثبات نمود که برای خانواده‌ای از ایده‌آل‌های F در یک حلقهٔ جابه‌جایی R، اگر ایده‌آلی مانند M نسبت به نداشتن خاصیتی ماکسیمال باشد آنگاه M ایده‌آل اول از R است.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است، که:

در فصل (۱) مفاهیم و قضایای پایه‌ای به همراه مفاهیم جدیدی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

در فصل (۲) اصل ایده‌آل اول معرفی می‌شود و در قضیهٔ وابستگی منطقی، دیاگرامی را نشان می‌دهیم که رابطهٔ بین این اصل با گزاره‌های ذکر شده در قضیه را بیان می‌کند. همچنین اگر هر خانواده‌ای از ایده‌آل‌ها در اصل ایده‌آل اول صدق کند آنگاه متمم آن یک Mp‌ـخانواده نامیم. در ادامه، خانواده‌هایی از ایده‌آل‌ها که هر یک خاصیت مشخصی را دارند، ذکر می‌کنیم و ثابت می‌کنیم یکی از گزاره‌های قضیهٔ وابستگی منطقی برای هر کدام برقرار است. در نتیجه با توجه به دیاگرام داده شده، این خانواده‌ها در اصل ایده‌آل اول صدق می‌کنند.

در فصل (۳) از کاربرد این اصل استفاده خواهیم کرد. این فصل شامل ۳ بخش می‌باشد که نشان می‌دهیم در بخش اول، خانوادهٔ ایده‌آل‌های منظم و S‌ـچگال، در بخش دوم، خانوادهٔ ایده‌آل‌های وارون‌پذیر و در بخش سوم، خانوادهٔ ایده‌آل‌های با تولید متناهی و اصلی در گزاره‌های دیاگرام قضیهٔ وابستگی منطقی صدق می‌کنند. همچنین در بخش سوم، کاربرد این اصل را در حلقه‌ها و ایده‌آل‌های ضربی مشاهده خواهیم کرد.

---

[1] Nagata
[2] Cohen

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. آنها برگرفته از منابع [۳۹]، [۴۰]، [۱۶]، [۴] و [۱۴] می‌باشند. در این پایان نامه تمام حلقه‌ها یکدار و جابه‌جایی و نیز مدول‌ها یکانی در نظر گرفته می‌شوند.

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R حلقه باشد و $I \trianglelefteq R$ و $A \subseteq R$. ایده‌آل $(I : A)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(I : A) = \{r \in R \quad : \quad rA \subseteq I\}$$

نمادگذاری ۲.۱.۱ مجموعهٔ همه ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال حلقهٔ R را به ترتیب با نماد Spec(R) و Max(R) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم R حلقه و F خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد و به علاوه داشته باشیم $R \in F$. در این صورت F را یک نیم صافی می نامیم، هرگاه به ازای هر $I, J \trianglelefteq R$ که $I \supseteq J \in F$

داشته باشیم $I \in F$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم F خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقهٔ R باشد و به علاوه داشته باشیم $R \in F$. در این صورت F را یک صافی می نامیم، هرگاه F یک نیم صافی باشد و به ازای هر $A, B \in F$ داشته باشیم $A \cap B \in F$.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم F خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقهٔ R باشد و به علاوه داشته باشیم $R \in F$. در این صورت F را یک منوئیدال می نامیم، اگر به ازای هر $A, B \in F$ داشته باشیم $AB \in F$.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم F خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقهٔ R باشد. در این صورت F' را متمم F می نامیم هرگاه شامل ایده آل‌هایی از R باشد که متعلق به F نیستند.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم F خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقهٔ R باشد. مجموعه همهٔ عناصر ماکسیمال F' نسبت به رابطهٔ شمول را با $\mathrm{Max}(F')$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم F خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقهٔ R باشد. F' را یک MPـخانواده می‌نامیم هرگاه هر عضو ماکسیمال F' یک ایده آل اول باشد.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم F خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقهٔ R باشد و همچنین داشته باشیم $R \in F$. آنگاه F را خانوادهٔ Oka (به ترتیب خانواده Oka قوی) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a \in R$ و $I, A \trianglelefteq R$ رابطهٔ

$$(I, a), (I : a) \in F \implies I \in F$$

برقرار باشد. (به ترتیب $(I, A), (I : A) \in F \implies I \in F$)

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم F خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقهٔ R باشد و به علاوه داشته باشیم $R \in F$، آنگاه F را خانوادهٔ Ako (به ترتیب خانواده Ako قوی) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in R$

و $I, B \trianglelefteq R$ رابطهٔ

$$(I,a),(I,b) \in F \implies (I,ab) \in F$$

برقرار باشد. (به ترتیب $(I,a),(I,B) \in F \implies (I,aB) \in F$)

تعریف ۱۱.۱.۱ زیر مجموعهٔ S از حلقهٔ R را بستهٔ ضربی می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $1 \in S$.

۲) اگر $s_1, s_2 \in S$ آنگاه $s_1 s_2 \in S$.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم S زیر مجموعهٔ بسته ضربی از حلقهٔ R و F خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد که اگر به ازای هر $r \in R$ داشته باشیم $Ir=0$ آنگاه $s \in S$ موجود است به طوری که $sr=0$. در این صورت ایده‌آل $I \trianglelefteq R$ را S‌ـچگال می نامیم هرگاه $I \in F$. اگر داشته باشیم $S = \{1\}$، آنگاه ایده‌آل S‌ـچگال $I \in F$ را چگال می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ حلقهٔ R را کاهشی می نامند هرگاه صفر تنها عنصر پوچ‌توان آن باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم R حلقه باشد و $I \trianglelefteq R$. در این صورت I را ایده‌آل اساسی می نامیم هرگاه به ازای هر ایده‌آل $L \trianglelefteq R$، اگر $I \cap L = 0$، آنگاه L=0.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم α و β به ترتیب کاردینال مجموعه‌های جدا از هم A و B باشند. $\alpha + \beta$ را کاردینال مجموعهٔ $A \cup B$ و $\alpha\beta$ را کاردینال مجموعهٔ $A \times B$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم R حلقه باشد. برای هر R‌ـمدول M، $\mu(M)$ کوچکترین کاردینال μ را مشخص می‌کند به طوری که M توسط μ عنصر تولید شده باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ R‌ـمدول M را وفادار می‌نامند هرگاه $(0:M)=0$.

تعریف ۱۸.۱.۱ برای حلقهٔ دادهٔ شدهٔ R، نمادهای $F_{pr}(R)$ و $F_{fg}(R)$ به ترتیب خانوادهٔ همهٔ ایده‌آل‌های اصلی R و خانوادهٔ همهٔ ایده‌آل‌های با تولید متناهی R را نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم R حلقه باشد. در این صورت T را R_جبر نامیم، هرگاه T یک R_مدول باشد و به ازای هر $a \in R$ و $x, y \in T$ رابطهٔ زیر را داشته باشیم:

$$a(xy) = (ax)y = x(ay)$$

تعریف ۲۰.۱.۱ ایده‌آل $J \trianglelefteq R$ از حلقهٔ R را یک ایده‌آل ضربی می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل $I \subseteq J$، ایده‌آل $K \trianglelefteq R$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $I = JK$. (یا به طور معادل $I = J(I : J)$).

برهان: نشان می‌دهیم این دو تعریف معادل هستند. فرض کنیم به ازای برخی $K \trianglelefteq R$، I به شکل JK باشد. در این صورت ثابت می‌کنیم $JK = J(JK : J)$.

اگر $x \in J(JK : J)$ را در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$x = r_1 r_2 \ \ s.t \ \ r_1 \in J \, , \, r_2 J \subseteq JK \implies x = r_1 r_2 = r_2 r_1 \in r_2 J \subseteq JK \implies x = r_2 r_1 \in JK$$

اکنون فرض کنیم $y \in JK$. در این صورت داریم:

$$y = s_1 s_2 \ \ s.t \ \ s_1 \in J \, , \, s_2 \in K \implies s_2 j = j s_2 \in JK \ \ \forall j \in J \implies s_2 J \subseteq JK \implies s_2 \in (JK : J)$$

از طرفی $s_1 \in J$، پس خواهیم داشت:

$$y = s_1 s_2 \in J(JK : J)$$

و حکم برقرار است.

اگر رابطه $I = J(I : J)$ برقرار باشد آنگاه با در نظر گرفتن $K = (I : J) \trianglelefteq R$ خواهیم داشت $I = JK$.

لذا به ازای برخی $K \trianglelefteq R$، I به شکل JK خواهد بود.

تعریف ۲۱.۱.۱ حلقه R را حلقهٔ ضربی می‌نامیم، هرگاه هر ایده‌آل $J \trianglelefteq R$ یک ایده‌آل ضربی باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و $I \trianglelefteq R$. در این صورت $P \in$Spec(R) را یک ایده‌آل اول مینیمال I نامیم هرگاه به ازای هر ایده‌آل اول P' از R، اگر $I \subseteq P' \subseteq P$ آنگاه $P = P'$. همچنین ایده‌آل اول P را مینیمال می‌نامیم هرگاه P ایده‌آل اول مینیمال (۰) باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم R حوزه صحیح با کسرهای خارج قسمتی K باشد. منظور از ایده‌آل کسری I، R-زیرمدولی از K است و منظور از I^{-1} (وارون I) مجموعه‌ای از همه xهایی در K است به طوری که $xI \subseteq R$. I^{-1} نیز ایده‌آل کسری می‌باشد. ایده‌آل I وارون‌پذیر است هرگاه داشته باشیم $II^{-1} = R$.

تعریف ۲۴.۱.۱ حلقهٔ R را دامنه ددکیند گوئیم هرگاه هر ایده‌آل غیرصفر R، وارون‌پذیر باشد.

قضیه ۲۵.۱.۱ فرض کنیم P ایده‌آل اول حلقهٔ R و $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) به ازای jای که $1 \leq j \leq n$، $I_j \subseteq P$.

۲) $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$.

۳) $\prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$.

برهان: به قضیهٔ ۵۵.۳ از مرجع [۳۹] رجوع شود. □

قضیه ۲۶.۱.۱ هر ایده‌آل اول، شامل یک ایده‌آل اول مینیمال می‌باشد.

برهان: به قضیهٔ ۵۲.۳ از مرجع [۳۹] رجوع شود. □

قضیه ۲۷.۱.۱ حلقهٔ R نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل از R، متناهی مولد باشد.

برهان: به قضیهٔ ۴، فصل ۱۳ از مرجع [۴۰] رجوع شود. □

قضیه ۲۸.۱.۱ فرض کنیم I ایده‌آلی از دامنهٔ صحیح R باشد به طوری که در بین ایده‌آل‌هایی که وارون‌ناپذیرند، ماکسیمال است. در این صورت I اول می‌باشد.
برهان: مجموعه E را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$E = \{I \trianglelefteq R \quad s.t \quad \text{وارون ناپذیر است} \quad I\}$$

$E \neq \emptyset$، زیرا $I \in E$. حال زنجیری مانند S از عناصر E را در نظر می‌گیریم. $\cup S = \cup I$ کران بالایی برای E است. بنا به لم زرن E دارای عضو ماکسیمالی مانند I است. اکنون نشان می‌دهیم I اول می‌باشد.
برهان خلف: فرض کنیم $ab \in I$ ولی $a \notin I$ و $b \notin I$. بنابراین برای ایده‌آل (I, a) و (I, b) داریم:

$$I \subsetneqq Ra + I = (I, a) \quad , \quad I \subsetneqq Rb + I = (I, b)$$

از طرفی با توجه به نوع انتخاب I، (I, a) و (I, b) وارون‌پذیرند. بنا به لم ۴.۶ از مرجع [۳۶] (فرض کنیم $I_1, ..., I_n$ ایده‌آل‌هایی در دامنه صحیح R باشند. در این صورت $I_1 ... I_n$ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر هر I_i وارون‌پذیر باشد) $(I, a)(I, b)$ نیز وارون‌پذیر می‌باشد. از طرف دیگر داریم:

$$(I, a)(I, b) = I^2 + aI + Ib + ab \subseteq (I, ab)$$

چون $ab \in I$، پس خواهیم داشت:

$$(I, a)(I, b) \subseteq (I, ab) = I$$

بنا به فرض، I ایده‌آلی وارون‌ناپذیر است، بنابراین $(I, a)(I, b)$ وارون‌ناپذیر خواهد بود و این متناقض با وارون‌پذیری $(I, a)(I, b)$ می‌باشد. در نتیجه فرض خلف نادرست و I اول است. □

قضیه ۲۹.۱.۱ اگر هر ایده‌آل اول سره در دامنه R، وارون‌پذیر باشد، آنگاه R دامنه ددکیند است.
برهان: به قضیه ۷ از مرجع [٦] رجوع شود. □

قضیه ۳۰.۱.۱ هر ایده‌آل وارون‌پذیر، با تولید متناهی است.

برهان: به قضیهٔ ۵۸ از مرجع [۱٦] رجوع شود. □

قضیه ۳۱.۱.۱ فرض کنیم $I_1,I_2,...,I_n$ ایده‌آل‌های چپ از حلقهٔ R باشند. در این صورت گزاره‌های زیر برای Rـمدول چپ R معادلند:

۱) $R = I_1 \oplus ... \oplus I_n$.

۲) هر عنصر $r \in R$ نمایش منحصر به فردی به صورت $r = r_1 + ... + r_n$ دارد که در آن برای $1 \leqslant i \leqslant n$، $r_i \in I_i$.

۳) مجموعه کامل $e_1,e_2,...,e_n$ از خودتوان‌های متعامد در R موجود است که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $I = Re_i$.

برهان: به قضیهٔ ۲.۷ از مرجع [۴] رجوع شود. □

قضیه ۳۲.۱.۱ برای هر Rـمدول چپ M گزاره‌های زیر معادلند:

۱) M نیم‌ساده است.

۲) M توسط مدول‌های ساده تولید می‌شود.

۳) M جمع مجموعه‌ای از زیرمدول‌های ساده می‌باشد.

۴) M جمع زیرمدول‌های ساده خودش است.

۵) هر زیرمدول M، جمعوند مستقیم M می‌باشد.

٦) هر دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$ از R مدول‌های چپ شکافته می‌شود.

برهان: به قضیهٔ ٦.۹ از مرجع [۴] رجوع شود. □

نتیجه ۳۳.۱.۱ ایده‌آل‌های ضربی با تولید متناهی، تحت عمل ضرب بسته‌اند.

برهان: به صفحهٔ ۴٦٦ از مرجع [۳] رجوع شود. □

نتیجه ۳۴.۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری باشد و به علاوه حلقه S یک Rـجبر متناهی مولد باشد. در این صورت S نیز حلقه‌ای نوتری است.

برهان: به نتیجهٔ ۱۱.۸ از مرجع [۳۹] رجوع شود. □

قضیه ۳۵.۱.۱ حلقهٔ R نیم‌ساده است اگر و تنها اگر به ازای هر $m \in N$، حلقه‌های تقسیم D_i و برای $1 \leqslant i \leqslant m$، $n_i \in N$ موجود باشند به طوری که داشته باشیم:

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times ... \times M_{n_m}(D_m)$$

برهان: به قضیهٔ ۴.۱۳ از مرجع [۴] رجوع شود. □

لم ۳۶.۱.۱ (لم ناکایاما) فرض کنیم $I \trianglelefteq R$. در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادلند:

۱) $I \subseteq J(R)$.

۲) به ازای هر مدول متناهی تولید شده M اگر $IM=M$ آنگاه $M=0$.

۳) به ازای هر مدول متناهی تولید شده M، $IM << M$.

برهان: به لم ۲۴.۸ از مرجع [۳۹] رجوع شود. □

قضیه ۳۷.۱.۱ فرض کنیم $I \neq R$ یک ایده‌آل از حلقهٔ R باشد. در این صورت اگر هر ایده‌آل مینیمال روی I با تولید متناهی باشد، آنگاه تعداد متناهی ایده‌آل اول مینیمال روی I وجود خواهد داشت.

برهان: به مرجع [۱] رجوع شود. □

حال چند قضیهٔ اساسی را بیان می کنیم.

قضیه ۳۸.۱.۱ فرض کنیم S یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی در حلقهٔ R باشد و به علاوه ایده‌آل $I \subseteq R$ در بین ایده‌آل‌هایی که از S جدا هستند، ماکسیمال باشد. در این صورت I اول است.

برهان: ابتدا وجود I را نشان می‌دهیم.

مجموعهٔ زیر را در نظر می گیریم:

$$\Sigma = \{C \mid C \cap S = \emptyset \quad , \quad C \trianglelefteq R\}$$

به وضوح $\Sigma \neq \emptyset$ (زیرا $I \in \Sigma$). حال زنجیر T از عناصر Σ را در نظر می‌گیریم. $\cup C = \cup T$ یک کران بالا برای T است و طبق لم زرن Σ دارای عضو ماکسیمال است. آن را I می‌نامیم.

حال نشان می‌دهیم I اول می‌باشد. فرض کنیم $ab \in I$. در این صورت باید ثابت کنیم $a \in I$ یا $b \in I$.

برهان خلف: فرض کنیم $ab \in I$ ولی $b \notin I$ و $a \notin I$. در این صورت ایده‌آل (I, a) ($I + Ra = (I,a)$ ایده‌آل تولید شده توسط a و I) و (I, b) به طور سره بزرگتر از I است، یعنی داریم:

$$I \subsetneqq I + Ra \quad , \quad I \subsetneqq I + Rb$$

با توجه به انتخاب I، (I, a) و (I, b) با S اشتراک دارند. در نتیجه عناصر $s_1, s_2 \in S$ وجود دارند به طوری که:

$$s_1 = i_1 + xa \quad (i_1 \in I, x \in R) \quad , \quad s_2 = i_2 + yb \quad (i_2 \in I, y \in R)$$

از طرفی داریم:

$$i_1 i_2 + i_1 yb + i_2 xa \in I \quad , \quad ab \in I$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$s_1 s_2 = i_1 i_2 + i_1 yb + i_2 xa + xayb \in I$$

چون مجموعهٔ S بستهٔ ضربی است، پس $s_1 s_2 \in S$ و در نتیجه $I \cap S \neq \emptyset$ است که متناقض با فرض می‌باشد. لذا فرض خلف نادرست است. بنابراین I اول می‌باشد و حکم برقرار است. □

قضیه ۳۹.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده‌آل در حلقهٔ R باشد که در بین ایده‌آل‌هایی که با تولید متناهی نیستند، ماکسیمال است. در این صورت I اول خواهد بود.

برهان: ابتدا وجود I را نشان می‌دهیم. مجموعه θ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta = \{d \mid d \trianglelefteq R \quad , \quad d \text{ با تولید متناهی نمی‌باشد}\}$$

چون $I \in \theta$، لذا $\theta \neq \emptyset$. حال زنجیر S از عناصر θ را در نظر می‌گیریم. $\cup d = \cup S$ یک کران بالا برای S می‌باشد. بنابراین طبق لم زرن θ دارای عضو ماکسیمال است. حال با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم I اول است.

فرض کنیم $ab \in I$ ولی $a \notin I$ و $b \notin I$. برای ایده آل (I,a) داریم:

$$I \subsetneqq Ra + I = (I,a)$$

با توجه به انتخاب I، Ra+I با تولید متناهی است. فرض کنیم:

$$i_۱ + x_۱ a, ..., i_n + x_n a \quad (i_۱, ..., i_n \in I)$$

مولدهای آن باشند. سپس مجموعه J را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J = \{y \in R \ | \ ya \in I\}$$

J شامل b و I می‌باشد و علاوه بر این $I \subsetneqq J$ است. زیرا:

$$x \in I \implies xa \in I \implies x \in J$$

چون $b \notin I$، پس I به طور سره زیرمجموعه J می‌باشد. بنا به انتخاب I، J با تولید متناهی است. حال ادعا می‌کنیم:

$$I = (i_۱, ..., i_n, Ja)$$

یک عضو دلخواه مانند z را در I اختیار می‌کنیم. پس داریم:

$$z \in I \subsetneqq I + Ra$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$z = u_1(i_1 + x_1 a) + ... + u_n(i_n + x_n a)$$

و چون $u_1 x_1 a + ... + u_n x_n a \in I$ لذا $u_1 x_1 + ... + u_n x_n \in J$. بنابراین داریم:

$$z \in (i_1, ..., i_n, Ja) \implies I \subseteq (i_1, ...i_n, Ja)$$

حال $k \in (i_1, ..., i_n, Ja)$ در نظر می‌گیریم. k به صورت زیر می‌باشد:

$$k = v_1 i_1 + ... + v_n i_n + da \quad (d \in J)$$

از طرفی $v_1 i_1 + ... + v_n i_n \in I$ و با توجه به تعریف J، $da \in I$ و در نتیجه:

$$k \in I \implies (i_1, ..., i_n, Ja) \subseteq I$$

بنابراین ادعا ثابت شد. لذا I با تولید متناهی می‌باشد و این با فرض با تولید نامتناهی بودن I، تناقض دارد. پس فرض خلف نادرست است و I اول می‌باشد. □

قضیه ۴۰.۱.۱ فرض کنیم R حلقه و برای R ـمدول M ، I یک ایده‌آل از R باشد به طوری که در میان پوچ سازهای عناصر غیر صفر M ماکسیمال است. در این صورت I اول خواهد بود.

برهان: از آنجایی که I در میان پوچ‌سازهای عناصر غیر صفر M ماکسیمال است، به ازای هر $x \in M$ داریم $ann(x) \subseteq I$.

حال فرض می‌کنیم $ab \in I$ و $a \notin I$. در این صورت نشان می‌دهیم $b \in I$. چون $a \notin I$، پس $ax \neq 0$. از طرفی $I \subseteq ann(ax)$. زیرا:

$$c \in I \implies cax = acx = 0 \implies c \in ann(ax)$$

اما چون I در بین پوچ‌سازهای عناصر غیر صفر M ماکسیمال است، داریم:

$$ann(ax) = I$$

و با توجه به اینکه $ab \in I$ و $a \notin I$ خواهیم داشت:

$$ab \in I \implies b \in ann(ax) \subseteq I \implies b \in I$$

بنابراین I اول است. $\square$

قضیه ۴۱.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقهٔ R باشد به طوری که در بین ایده‌آل‌هایی که اصلی نیستند، ماکسیمال است. در این صورت I اول می باشد.

برهان: فرض کنیم $ab \in I$ و $a \notin I$. ثابت می‌کنیم $b \in I$. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی $b \notin I$. پس:

$$I \subsetneqq (I, a)$$

I در بین ایده‌آل‌هایی که اصلی نیستند، ماکسیمال می‌باشد، بنابراین $(I, a) = (d)$ اصلی است. حال مجموعه J را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J = \{x \in R \mid xc \in I \ \ , \ \ c \in (d)\}$$

ثابت می‌کنیم $(I, b) \subset J$. فرض کنید $k \in (I, b)$. بنابراین k به صورت:

$$k = i_1 + r_1 b \qquad (i_1 \in I)$$

می‌باشد و برای $c \in (d)$ داریم:

$$kc = (i_1 + r_1 b)(i_2 + r_2 a) = i_1 i_2 + i_1 r_2 a + i_2 r_1 b + r_1 b r_2 a \quad (i_1, i_2 \in I, r_1, r_2 \in R)$$