بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
بخش ریاضی

پایان نامه:

برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ ریاضی کاربردی

عنوان:

بررسی مسائل برنامه ریزی چند هدفی فازی(FMOP)

با توابع عضویت شبه مقعر و نامقعر

نگارش:

مهران چه لابی

استاد راهنما:

دکتر ماه بانو تاتا

شهریور ۱۳۸۱

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی- دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مهران چه لابی

استاد راهنما: دکتر ماه بانو تاتا

داور ۱: دکتر ماشااله ماشین چی

داور ۲: دکتر حمیدرضا ملکی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح زاده

تقدیم به:

روان پاک پدر و مادرم

به نام خدا

با سپاس به درگاه خالق هستی که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش را عطا فرموده و توانایی قدم نهادن در راهی را ارزانی داشت که اگر توفیق سپردن آن را داشته باشم هرگز پایانی نخواهد داشت با امید به اینکه آنچه را آموخته‌ام در راه خیر و صلاح جامعه بکار گیرم.

در ابتدا از تمام اساتید بزرگواری که در طول مدّت تحصیل همواره از علم و دانش خویش مرا بهره مند ساخته‌اند تشکر می‌نمایم به ویژه از خانم دکتر ماه‌بانو تاتا کمال تشکر و قدردانی را دارم چرا که ایشان با قبول زحمت، راهنمایی این پایان نامه را به عهده گرفتند و علاوه بر این، بنده در تمام مدت تحصیل و تهیه این رساله از تلاشها و راهنمایی‌های بی‌دریغ و مشفقانهٔ ایشان برخوردار بودم. همچنین از اساتید بزرگوار، دکتر ماشاءالله ماشین‌چی و دکتر حمیدرضا ملکی که زحمت داوری این رساله را به عهده گرفته‌اند تقدیر و سپاس بیکران دارم.

در خاتمه از خانم زهرا مانی به خاطر صبر و حوصلهٔ بی نظیری که در تایپ این پایان نامه به عمل آورده‌اند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

مهران چه‌لابی
تیر ۱۳۸۱

چکیده

با توجه به تکنیکهای برنامه ریزی خطی، یک روش برای پردازش مسائل برنامـه ریـزی چنـد هدفـی فازی شبه مقعر و نا مقعر مطرح می شود. روش پیشنهاد شده در ابتدا یک عبارت خطی قطعه وار را، بـرای تفسیر یک تابع عضویت شبه مقعر و نا مقعر عرضه می کند. در این صورت، نقــاط انفصـال نـوع محـدب پیدا خواهند شد و همه توابع عضویت شبه مقعر و نا مقعر به توابع مقعر تبدیل می شوند. سپس این برنامـه تغییر داده شده، بوسیله تکنیکهای برنامه ریزی خطی معمولی حل می شود تا یک جواب بهینـه سراسـری بدست آید. علاوه بر اینکه، این روش برای توابع شبه مقعر، از متغیرهای ۱–۰ استفاده نمی کنـد، نیـاز بـه تقسیم مسئله FMOP به زیر مسائل را ندارد.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل سوم: حل مسائل برنامه ریزی خطی چند هدفی فازی با توابع عضویت شبه‌مقعر و نامقعر

١

فصل اوّل

مجموعه‌ها و نگاشتهای فازی محدب و شبه محدب

۱_۱ مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی، برای اولین‌بار در سال ۱۹۶۵ توسط آقای دکتر لطفی‌زاده استاد دانشگاه برکلی به دنیای علمی عرضه شد. به کوتاهی، نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای است که در شرایط عدم اطمینان بکار می‌رود. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستمهایی را که نادقیق و مبهم هستند (چنانچه در عالم واقع اکثراً چنین است) صورتبندی ریاضی ببخشد، و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. در این فصل، به اختصار به معرفی این نظریه می‌پردازیم. سپس مفهوم تحدب را که بطور کمی و کیفی در مطالعه تحقیق در عملیات اهمیت زیادی دارد، مورد بحث قرار می‌دهیم. مجموعه‌های فازی محدب، اکیداً محدب، شبه محدب و قویاً شبه محدب را معرفی و روابط آنها را بررسی می‌کنیم. در انتها نگاشتهای فازی شبه محدب و شبه مقعر را بیان نموده و ثابت می‌کنیم یک نگاشت فازی یکنوا، روی زیرمجموعه محدب از $\mathbb{R}^{۱}$ یا $\mathbb{R}^{۲}$ شبه محدب و شبه مقعر است.

۱_۲ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱_۲_۱: گردایه X را در نظر بگیرید. اعضای X را بطور کلی با x نشان خواهیم داد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X یک مجموعه از زوجهای مرتب بصورت زیر است:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}})|x \in X\}$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت x در $\tilde{A}$ نامیده می‌شود که نگاشتی از x به یک مجموعه $M \subset [\circ, ۱]$ می‌باشد. هنگامی‌که M تنها شامل دو نقطه $\circ, ۱$ باشد، $\tilde{A}$ غیر فازی است و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع مشخصه مجموعه $\tilde{A}$

می‌باشد.

اگر $X=\{x_۱,x_۲,\cdots\}$ باشد می‌نویسند:

$$\tilde{A}=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۱)}{x_۱}+\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۲)}{x_۲}+\cdots=\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

و اگر X ناشمارا باشد می‌نویسند:

$$\tilde{A}=\int_X\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

مثال ۱_۱: مجموعه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}=\text{"اعداد صحیح نزدیک به ۱۰"}$$

اگر میزان عضویت اعداد ۷ تا ۱۳ را مطابق جدول زیر در نظر بگیریم:

x	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	۰/۱	۰/۵	۰/۸	۱	۰/۸	۰/۵	۰/۱

آنگاه می‌نویسیم:

$$\tilde{A}=\frac{۰/۱}{۷}+\frac{۰/۵}{۸}+\frac{۰/۸}{۹}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۰/۸}{۱۱}+\frac{۰/۵}{۱۲}+\frac{۰/۱}{۱۳}\cdot$$

مثال ۱_۲: مجموعه فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\tilde{A}=\text{"اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰"}$$

اگر تابع عضویت این مجموعه فازی را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{۱}{۱+(x-۱۰)^{۲}}$$

آنگاه می‌نویسیم:

$$\tilde{A} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+(x-10)^2}\right)/x \cdot$$

تعریف ۱ـ۲ـ۲: فرض کنید $\tilde{A} \in F(X) = \{\tilde{A} | \mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]\}$ که در آن، X یک مجموعه ناتهی است. مجموعه αـبرش برای $\alpha \in [0,1]$ و تکیه‌گاه $\tilde{A}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha &= \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \\ supp(\tilde{A}) &= \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} \quad \forall \alpha \in [0,1] \cdot \end{aligned}$$

در اینجا به بیان اصل گسترش که یکی از مفاهیم بنیادی در نظریه مجموعه‌های فازی است می‌پردازیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۳ (اصل گسترش [۱۴]):

فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از X باشد. در این حالت $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ یک زیرمجموعه فازی از Y بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) | y = f(x) \ , \ x \in X\}$$

که در آن؛

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

قبل از تعریف کلی اصل گسترش به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۱ـ۲ـ۴: فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n$ بترتیب زیرمجموعه‌های فازی از مجموعه‌های مرجع $X_1, X_2, \cdots, X_n$ باشند. آنگاه حاصلضرب دکارتی $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \cdots \times \tilde{A}_n$ یک زیرمجموعه

فازی از $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ می‌باشد، که تابع عضویت آن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\} \quad \forall x_i \in X \cdot$$

تعریف ۱ـ۲ـ۵ (اصل گسترش تعمیم یافته [۱۴]):

مفروضات تعریف قبل را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید f یک نگاشت از X به مجموعهٔ Y باشد، یعنی $y = f(x_1, \cdots, x_n)$. حال حاصل عمل f بر n مجموعهٔ فازی $\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n$ به عنوان یک زیرمجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) | y = f(x_1, \cdots, x_n) \ , \ x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

که در آن:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup \min\limits_{x_1, \cdots, x_n} \{A_1(x_1), \cdots, A_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ y = f(x_1, \cdots, x_n) & \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

اکنون به تعریف عملگرهای مجموعه‌ای می‌پردازیم. از آنجا که تابع عضویت عامل مشخص کننده یک مجموعه فازی است واضح است که برای عملگرهای مجموعه‌های فازی، باید تعریفی ارائه شود که از تابع عضویت مجموعه‌ها استفاده نماید.فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ زیرمجموعه‌های فازی از X باشند.

تعریف ۱ـ۲ـ۶: اگر برای هر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ باشد، آنگاه مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را مساوی گوییم و با نماد $\tilde{A} = \tilde{B}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۷: اجتماع، اشتراک، بیشینه و کمینه دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، بصورت یک مجموعه فازی بترتیب با تابع عضویتهای زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) &= \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad \forall x \in X \,, \\
\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) &= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad \forall x \in X \,, \\
\mu_{m\tilde{a}x(\tilde{A},\tilde{B})}(z) &= \sup_{z=\max\{x,y\}} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad \forall x, y, z \in X \,, \\
\mu_{m\tilde{i}n(\tilde{A},\tilde{B})}(z) &= \sup_{z=\min\{x,y\}} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad \forall x, y, z \in X \,,
\end{aligned}
$$

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید اعضای $F(\mathbb{R})$ را کمیتهای فازی می‌گوییم. در واقع، کمیتهای فازی، زیرمجموعه‌های فازی $\mathbb{R}$ می‌باشند. با استفاده از اصل توسیع می‌توان عملگرهای جبری را روی کمیتهای فازی تعریف کرد. به عبارتی هر عمل $*$ روی اعداد حقیقی را می‌توان به یک عمل دوتایی روی $F(\mathbb{R})$ گسترش داد. بعنوان مثال تابع $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y) = x + y$ را در نظر بگیرید. جمع $\tilde{A}, \tilde{B}$ $(\tilde{A} \oplus \tilde{B})$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(z) = \sup_{z=x+y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

۱ـ۳ اعداد فازی

یکی از کاربردهای اصل گسترش، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع و ضرب برای اعدادی است که به اعداد فازی موسوم‌اند و یک تعمیم طبیعی برای اعداد معمولی می‌باشند.

تعریف ۱ـ۳ـ۱: کمیت فازی $\tilde{A}$ را عدد فازی گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱ـ یک فاصله بسته $[a,b]$، $a \leq b$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in [a,b]$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ (ممکن

۱ = $\mu_{\tilde{A}}(x)$ (ممکن است این فاصله شامل فقط یک نقطه باشد).

۲ـ $\mu_{\tilde{A}}$ نیمه پیوسته بالایی باشد.

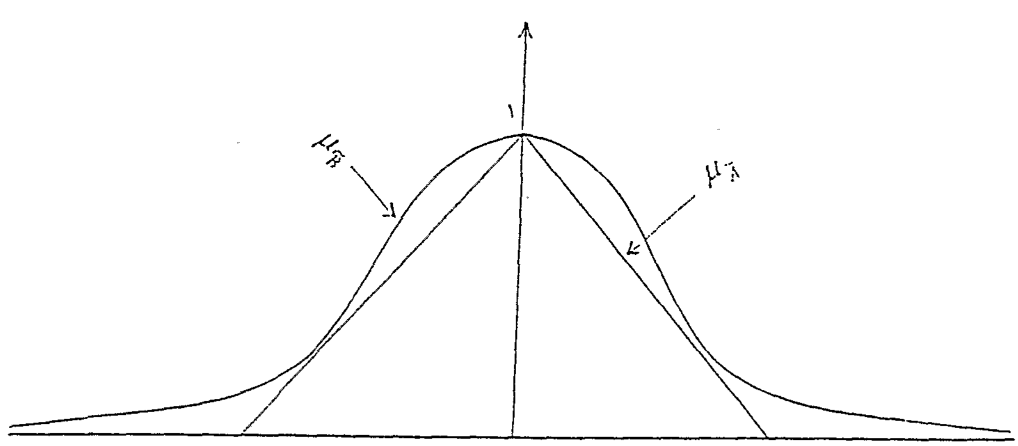
۳ـ برای هر $x \leq a$، μ صعودی و برای هر $x \geq b$، μ نزولی باشد.

مثال ۱ـ۳: مجموعه فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می‌توان $\tilde{A}$ را عدد فازی «تقریباً صفر» تعبیر کرد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1-|x| & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{سایر نقاط دیگر} \end{cases}$$

مثال ۱ـ۴: مجموعه فازی $\tilde{B}$ با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می‌توان $\tilde{B}$ را عدد فازی «تقریباً صفر» تعبیر کرد.

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty$$



نمودار توابع عضویت عدد فازی «تقریباً صفر»

شکل (۱ـ۱)

تعریف ۱ـ۳ـ۲: فرض کنید $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع یک‌بعدی باشد. بر اساس