بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

١١١٧٦٦

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر(KKT) در مسائل برنامه ریزی چند هدفه با تابع هدفهای بازه ای

۱۳۸۸ /۱۲/ ۱۰

استاد راهنما:

دکتر علی اصغر فروغی

استاد مشاور:

دکتر مهدی احمدی نیا

نگارنده:

محمد منتظری

زمستان ۱۳۸۷

۱۱۱۷۶۶

بسمه تعالی

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه قم

« صورت جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد»

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر «عجل الله تعالی فرجه الشریف» جلسه دفاعیه پایان نامه کارشناسی ارشدآقا/ خانم **محمدمنتظری** رشته : **ریاضی کاربردی**

تحت عنوان : **شرایط بهینگی کروش کان تاکر(K.K.T) درمسائل برنامه ریزی چندهدفه باتابع هدفهای بازه ای**

با حضور هیأت داوران در محل دانشگاه قم در تاریخ۱۳۸۷/۱۱/۱۴تشکیل گردید

دراین جلسه، پایان نامه با موفقیت مورد دفاع قرار گرفت و نامبرده نمره با عدد ۱۸٫۷۵ با حروف هجده و هفتاد و پنج صدم با درجه : عالی O بسیار خوب O خوب O قابل قبول O دریافت نمود.

نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	امضاء
علی اصغرفروغی	استاد راهنما	استادیار	
مهدی احمدی نیا	استاد مشاور	استادیار	
غلامحسن شیردل	استاد ناظر	استادیار	
سعید محرابیان	استاد ناظر	استادیار	
احمدفقیهی آفارانی	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی	استادیار	

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده

نام و امضاء:

مدیر امور آموزش و تحصیلات تکمیلی

نام و امضاء:

نشانی:
قم، جاده قدیم اصفهان،
دانشگاه قم
کدپستی: ۳۷۱۶۱۴۶۶۱۱
تلفن: ۲۸۵۳۳۱۱
دورنویس:
معاونت آموزشی ۲۸۵۵۶۸۴
معاونت اداری ۲۸۵۵۶۸۶
معاونت دانشجویی ۲۸۵۵۶۸۸

تقدیم:

به پدرم،

که اسطوره جوانمردیست و فداکاری.

به مادرم،

که اسوه ایمان است و مهربانی.

و به تمام آنان که قلبم به عشقشان می تپد.

خدایا !

به آنان که نمی دانند، بیاموز که بدانند و به آنان که می دانند، بیاموز که عمل کنند.

(دکتر شریعتی)

پس از شکر عالِم دو عالم که توفیق کسب علم و معرفت را عطا فرمود و همه امکانات لازم را مهیا نمود تا بتوانم این نخستین گام را در این راه بی انتها بردارم. بر خود وظیفه می دانم که از استاد راهنمای بزرگوارم

جناب آقای دکتر علی اصغر فروغی

که نه تنها از علم بلکه از حلم ایشان بهره شایانی بردم. خدمات ایشان را به علم ریاضی کاربردی ارج می نهم و از ایشان صمیمانه سپاس گذارم.

همچنین از استاد مشاورم **جناب آقای دکتر مهدی احمدی نیا** برای انجام امر مشاورت، و اساتید داور **جناب آقای دکتر غلامحسن شیردل و جناب آقای دکتر سعید محرابیان** به دلیل قبول زحمت داوری تشکر می نمایم.

در خاتمه از کلیه کسانی که در به ثمر رسیدن این پایان نامه مرا یاری کردند. قدردانی نموده و توفیق روزافزون آنان را از یگانه هستی خواستارم.

محمد منتظری

زمستان ۱۳۸۷

چکیده

در بیشتر مسائل بهینه سازی واقعی، پارامترها به صورت غیر دقیق بکار می روند که این عدم دقت را می توان به صورت تصادفی، فازی، و بازه ای نشان داد. اگر عدم قطعیت در مسائل بهینه سازی به صورت احتمال و تصادف باشد، به آن بهینه سازی تصادفی، اگر به صورت مبهم یا فازی باشد، به آن بهینه سازی فازی و اگر به صورت بازه باشد، به آن بهینه سازی بازه ای می گوییم. در بهینه سازی تصادفی، ضرایب مسأله، متغیرهای تصادفی با توزیع های مشخص می باشند. در بهینه سازی فازی، ضرایب مسأله، اعداد فازی با تابع عضویت مشخص هستند و در بهینه سازی بازه ای، ضرایب مسأله، به صورت بازه های بسته می باشند.

مشکلی که در بهینه سازی فازی و تصادفی با آن مواجه هستیم، این است که، به طور کامل با موقعیت های واقعی سازگار نیستند. همچنین تعیین توزیع مناسب در بهینه سازی تصادفی و تعیین تابع عضویت مناسب در بهینه سازی فازی، به آسانی امکان پذیر نیست. به این دلیل بهینه سازی بازه ای ممکن است، جایگزین مناسبی برای مسائل بهینه سازی باشد که در آن عدم قطعیت بکار رفته است.

در سالهای اخیر مقالات و کتابهای متعددی در مورد بهینه سازی بازه ای به چاپ رسیده است. هسین چونگ وو در [26]و[25]، شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر را برای مسائل بهینه سازی تک هدفه و چند هدفه با تابع هدف بازه ای بیان کرد که با اشکالاتی مواجه بود. در این پایان نامه سعی بر آن است، با تعریف نوع جدیدی از جواب بهینه به تصحیح و تعمیم آن بپردازیم.

کلمات کلیدی: متریک هاسدورف، اختلاف هوکوهارا، شرایطKKT، H- مشتق پذیر، تابع مقدار بازه ای، جواب بهینه پارتو.

فهرست مطالب

مقدمه

تحمیل عدم قطعیت ها بر روی مسائل بهینه سازی یک موضوع جالب برای محققین است. عدم قطعیت ها ممکن است به صورت تصادف و احتمال یا مبهم تعبیر شود. تصادف و احتمال در مسائل بهینه سازی، به عنوان مسائل بهینه سازی تصادفی دسته بندی می شوند. در این زمینه کتب و مقالات متعددی نوشته شده است که از آن جمله می توان به مراجع [23]،[20]،[14]و[5] اشاره نمود. از طرف دیگر پیشامدهای ابهامی در مسائل بهینه سازی، به عنوان مسائل بهینه سازی فازی دسته بندی می شوند. در این ارتباط می توان به مجموعه ای از مقالات[22]،[21]،[16]،[15] و[12] که در مورد بهینه سازی فازی است، اشاره کرد. ترکیب پیشامدهای فازی و تصادفی در مسائل بهینه سازی، یک موضوع جالب برای تحقیق است. در[22] مقایسه ای بین بهینه سازی تصادفی و بهینه سازی فازی برای مسائل برنامه ریزی چندهدفه صورت گرفته است. همان طور که می دانیم در مسائل بهینه سازی تصادفی، ضرائب مسأله، متغیرهای تصادفی با توزیع های مشخص بوده و در مسائل بهینه سازی فازی، ضرائب مسأله اعداد فازی با تابع عضویت معلوم هستند. مشکلی که در بهینه سازی فازی و تصادفی با آن مواجه هستیم، این است که، به طور کامل با موقعیت های واقعی سازگار نیستند. همچنین تعیین توزیع مناسب در بهینه سازی تصادفی و تعیین تابع عضویت مناسب در بهینه سازی فازی به آسانی امکان پذیر نیست. به این دلیل بهینه سازی بازه ای، ممکن است جایگزین مناسبی برای مسائل بهینه سازی باشد که در آن عدم قطعیت بکار رفته است. در مسائل بهینه سازی بازه ای ضرائب مسأله بازه های بسته هستند. مسائل بهینه سازی بازه ای با مسائل برنامه ریزی خطی نادقیق، بسیار مرتبط هستند. این ارتباط را می توان در مراجع [24]،[19]،[9] و[8] ملاحظه کرد. **چارنز**[1] در [7] مسائل برنامه ریزی خطی را مورد بررسی قرار داد که مقادیر سمت راست قیدهای نامساوی خطی آن بازه های بسته بودند. **بیتران**[2] در [6] رابطه بین مجموعه نقاط رأسی کارا و وجود نقاط کارا در مسائل برنامه ریزی خطی چند هدفه با ضرایب بازه ای را مورد بحث قرار داد. **ایشی بوچی و تاناکا**[3] در[13]رابطه ترتیبی برای رتبه بندی بازه های بسته برای مسائل ماکزیمم سازی و مینیمم سازی پیشنهاد

---

1 - A. Charnes
2 - G.R. Bitran
3 - H. Ishibuchi and H. Tanaka

کرد. **هسین چونگ وو** [1] در مقاله [25] با تعریف دو نوع جواب بهینه برای مسائل بهینه سازی با تابع هدف بازه ای و نیز در مقاله[26] با تعریف دو نوع جواب بهینه پارتو برای مسائل برنامه ریزی چند هدفه با توابع هدف بازه ای، شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر آنها را بیان کرد کـه به نظر می رسد با اشکالاتی مواجه است. در این پایان نامه که شامل فصل های زیر است سعی می شود این اشکالات را برطرف کنیم. در فصل اول، خلاصه ای از حساب بازه ها و رتبه بنـدی بازه ها آورده شده است. در فصل دوم، تابع مقدار بازه ای را تعریف کرده، از متریک هاسـدورف برای تعریف فاصله دو بازه ی بسته کمک گرفته و با استفاده از آن می توانیم حـد و پیوسـتگی تابع بازه ای را بررسی کنیم. همچنین از اختلاف هوکوهارا برای تعریف اختلاف بین دو بـازه ی بسته استفاده کرده و با استفاده از آن و نیز مفهوم حد در تابع بازه ای، مشـتق تـابع بـازه ای را تعریف می کنیم. در فصل سوم، با تعریف نوع جدیدی از جواب بهینه برای مسائل بهینه سازی تک هدفه با تابع هدف بازه ای و ارتباط این جواب و دو جواب بهینه دیگر که در[25] تعریـف شده است، به تصحیح و تعمیم شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر برای این مسائل می پردازیم. در فصل چهارم که تعمیمی از فصل سوم می باشد، با تعریف نوع جدیدی از جواب های بهینـه پارتو برای مسائل بهینه سازی چند هدفه با توابع هدف بازه ای و ارتباط این جواب پارتو بـا دو جواب پارتوی دیگر که در[26] تعریف شده، به تعمیم شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر برای این مسائل می پردازیم.

[1] - Hsien-Chung Wu

فصل اول

مقدمه ای بر آنالیز بازه ها

۱- ۱ مقدمه و تاریخچه

بسیاری از مسائل واقعی، اگر بصورت مسائل برنامه ریزی خطی یا غیر خطی و یا مسائل کنترل بهینه فرمول بندی شوند، اغلب با داده های نامعین و نادقیق همراه هستند. برای نشان دادن این نامعینی، معمولاً از رویکرد فازی، تصادفی یا بازه ای استفاده می شود. روش های آنالیز بازه مرتبط با موضوع های زیادی است، به طوری که در نظریه مجموعه های فازی، خصوصاً اعداد فازی و مقایسه آنها، از آنالیز بازه استفاده می شود. آنالیز بازه در گذشته به دلیل نبودن سخت افزار و نرم افزار مناسب، کاربرد وسیعی نداشته است ولی در سال های اخیر نقش مهمی در علوم مختلف به خصوص ریاضیات ایفا کرده است. آنالیز بازه در مسائل بهینه سازی کلّی اهمیت ویژه ای دارد، به طوری که تابع هدف می تواند مینیمم یا ماکزیمم شود. لذا اگر $F(X)$ تابع هدف باشد، آنگاه:

$$F(X)\epsilon[min\,F(X)\,,max\,F(X)]$$

از کاربردهای آنالیز بازه، می توان به کاربرد آن در مهندسی الکترونیک، مهندسی شیمی، گرافیک کامپیوتری، نظریه کنترل و کنترل کیفی، سیستم های دینامیکی، سیستم های اطلاعاتی جغرافیایی، فیزیک مکانیک سیّالات و غیره اشاره کرد. اولین نظریه ها در مورد آنالیز بازه در سال های ۱۹۳۱ و ۱۹۲۴ میلادی توسط بورکیل[۱]، یانگ[۲] و سپس در سال ۱۹۵۸ توسط ت. سوناگا[۳] مطرح گردید. مباحث آنالیز بازه از نوع امروزی با مقالاتی از مور[۴] ([18]و[17])، در سال ۱۹۶۲ آغاز شد که برای عدم قطعیّت در مسائل نامعین، مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۸۳، آلفلد[۵] و هرزبرگر[۶] [1] با نوشتن کتابی با عنوان ((مقدمه ای بر حساب بازه))[۷]، موجبات گسترش آنالیز بازه را فراهم کردند.

1 -Burkill
2 -Young
3 -T.Sunaga
4 -R.E. Moore
5 - G. Alefeld
6 - J. Herzberger
7 - Introduction to Interval Computations

۱- ۲ حساب بازه ها

تعریف ۱- ۱:

یک بازه مقدار حقیقی A، مجموعه ای از اعداد حقیقی است که بین کران پایین a^L و کران بالای a^U قرار دارند، و به صورت زیر نوشته می شود:

$$A = [a^L , a^U] = \{x:\ a^L \leq x \leq a^U\}$$

که A را یک بازه بسته و کراندار $\mathbb{R}$ می گوییم.

نمادگذاری ۱- ۱:

مجموعه تمام بازه های بسته و کراندار $\mathbb{R}$ را با نماد $\mathbb{I}$ نمایش داده و چنین تعریف می کنیم:

$$\mathbb{I} = \{[a^L , a^U]: a^L \leq a^U , a^L , a^U \epsilon \mathbb{R}\}$$

مشابه اعمال حسابی که روی $\mathbb{R}$ وجود دارد، می توان عملگرهای حسابی را روی $\mathbb{I}$ تعریف کرد. فرض کنید $A = [a^L , a^U]$ و $B = [b^L , b^U]$ دو بازه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشند. اگر $* \epsilon \{+ , - , \times , \div , \cap , \cup\}$ یک عملگر باشد. این عملگر روی $\mathbb{I}$ در [11] و [12] به صورت زیر تعریف می شود:

$$A * B = \{a * b:\ a \epsilon A , b \epsilon B\}$$

به عبارت دیگر:

1) $A + B = [a^L + b^L , a^U + b^U],$

2) $A - B = [a^L - b^U , a^U - b^L],$

3) $A \times B = [(ab)^L, (ab)^U]$

$$,\begin{cases}(ab)^L = min\{a^L b^L , a^L b^U , a^U b^L , a^U b^U\},\\(ab)^U = max\{a^L b^L , a^L b^U , a^U b^L , a^U b^U\},\end{cases}$$

4) $\frac{A}{B}=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{L},\left(\frac{a}{b}\right)^{U}\right];$

$$\begin{cases}\left(\frac{a}{b}\right)^{L}=min\left\{\frac{a^L}{b^L},\frac{a^L}{b^U},\frac{a^U}{b^L},\frac{a^U}{b^U}\right\}\\ \left(\frac{a}{b}\right)^{U}=max\left\{\frac{a^L}{b^L},\frac{a^L}{b^U},\frac{a^U}{b^L},\frac{a^U}{b^U}\right\}\end{cases};0\notin B,$$

همچنین اگر $k\epsilon\mathbb{R}$ باشد:

5) $A+k=[a^L,a^U]+[k,k]=[a^L+k,a^U+k],$

6) $kA=\{ka\,;a\epsilon A\}=\begin{cases}[ka^L,ka^U];k\geq 0\\ [ka^U,ka^L];k<0\end{cases}$

تعریف ۱- ۲:

فرض کنید $A=[a^L,a^U]$ بازه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد،

الف) گوییم A مثبت است، اگر $a^L>0$.

ب) گوییم A منفی است، اگر $a^U<0$.

در حالت خاص اگر A و B دو بازه مثبت باشد، داریم:

$$A\times B=[a^Lb^L,a^Ub^U],$$

$$\frac{A}{B}=\left[\frac{a^L}{b^U},\frac{a^U}{b^L}\right];0\notin B$$

و اگر A و B دو بازه منفی باشد، داریم:

$$A\times B=[a^Ub^U,a^Lb^L],$$

$$\frac{A}{B}=\left[\frac{a^U}{b^L},\frac{a^L}{b^U}\right];0\notin B$$

تعریف ۱- ۳:

فرض کنید $A = [a^L , a^U]$ و $B = [b^L , b^U]$ دو بازه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه:

$A \subseteq B$، اگر و تنها اگر $a^L \geq \mathrm{b}^L \;\; \& \;\; a^U \leq \mathrm{b}^U$.

تعریف ۱- ۴:

فرض کنید $A = [a^L , a^U]$ یک بازه بسته و کراندار روی $\mathbb{R}$ باشد،

الف) پهنای بازه A را با $W(A)$ نشان می دهیم و $W(A) = a^U - a^L$.

ب) نقطه میانی[۱] بازه A را با نماد a^C نشان داده و چنین تعرف می کنیم:

$$a^{\mathrm{C}} = \frac{a^L + a^U}{2}$$

ج) نیم پهنای[۲] بازه A را با نماد a^W نشان داده و چنین تعرف می کنیم:

$$a^W = \frac{a^U - a^L}{2}$$

۱- ۳ رتبه بندی بازه ها

در حالت کلّی بازه ها دارای رتبه بندی نیستند، زیرا نمی توان رابطه ترتیبی کلّی برای بـازه هـا تعریف کرد. به عبارت دیگر نمی توان آنها را با هم مقایسه کرد و بازه بزرگتر یـا بـازه کـوچکتر مفهومی ندارد. در این ارتباط ایشی بوچی و تاناکا[۳] در [13]و همچنین باو کینگ هو و سونگ وانگ[۴] در [11] و[10] روابط ترتیب جزئی روی بازه ها تعریف کردند و بازه ماکزیمم و مینیمم را از چندین بازه تعیین کردند.

تعریف۱- ۵:

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه ترتیب جزئی روی $\mathbb{I}$ بوده و A و B دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند. گوییم

1 -Center
2 -Half-Width
3 - Ishibuchi and Tanaka
4 - Bao Qing Hu and Song Wang

A و B مقایسه پذیرند اگر و تنها اگر $A\mathcal{R}B$ یا $B\mathcal{R}A$.

در اینجا چند رابطه ترتیب جزئی روی بازه ها تعریف می کنیم.

فرض کنید $A = [a^L , a^U]$ و $B = [b^L , b^U]$ دو بازه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشند. رابطه "$\preccurlyeq_{LU}$" را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A \preccurlyeq_{LU} \mathrm{B} \iff a^L \leq \mathrm{b}^L \ \ \& \ \ a^U \leq \mathrm{b}^U,$$

$$A \prec_{LU} \mathrm{B} \iff A \preccurlyeq_{LU} B \ \ \& \ A \neq B.$$

به طور معادل رابطه "$\prec_{LU}$" را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} a^L < b^L \\ a^U \leq b^U \end{cases} \text{یا} \quad \begin{cases} a^L \leq b^L \\ a^U < b^U \end{cases} \text{یا} \quad \begin{cases} a^L < b^L \\ a^U < b^U \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

به راحتی می توان بررسی کرد که "$\preccurlyeq_{LU}$" روی $\mathbb{I}$، انعکاسی، پادمتقارنی و متعدی است. لذا رابطه "$\preccurlyeq_{LU}$" روی $\mathbb{I}$ یک رابطه ترتیب جزئی است. با توجه به رابطه فوق، اگر A و B دو بازه بسته وکراندار در $\mathbb{R}$باشند، تحت رابطه "$\preccurlyeq_{LU}$" بازه ای بزرگتر است که کران بالا و کران پایین بزرگتر داشته باشد. به طور مثال بازه $[4, 7]$ بزرگتر از بازه $[2, 5]$ نسبت به رابطه "$\preccurlyeq_{LU}$" است، و بازه $[1, 6]$ با بازه$[3, 5]$ نسبت به رابطه "$\preccurlyeq_{LU}$" مقایسه پذیر نیست، زیرا نمی توان مشخص کرد کدام یک از دیگری بزرگتر و یا کوچکتر است.

تعریف۱- ۶:

$\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \dots , A_r)$ را یک بردار‌بازه ای[1] می گوییم، اگر هر مولفه آن یک بازه بسته باشد.

تعریف۱- ۷:

فرض کنید $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \dots , A_r)$ و $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \dots , B_r)$ دو بردار بازه ای باشند.

(i) گوییم $\boldsymbol{A} \preccurlyeq_{LU} \boldsymbol{B}$ اگر و تنها اگر برای هر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطه $A_k \preccurlyeq_{LU} B_k$ برقرار باشد.

[1] Interval vector

(ii) گوییم $\boldsymbol{A} \prec_{LU} \boldsymbol{B}$ اگر وتنها اگر برای هر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطه $A_k \preccurlyeq_{LU} B_k$ بـر قرار باشد، و برای حداقل یک اندیس $h\epsilon\{1 , 2 , \dots , r\}$، داشته باشیم:

$$A_h \prec_{LU} B_h.$$

بنا به تعریف ۱- ۴، می توانیم از نماد تازه ای به صورت $\langle a^C , a^W \rangle$ برای مشخص کردن بازه A استفاده کنیم. یعنی بنویسیم $A = \langle a^C , a^W \rangle$

فرض کنیـد $A = \langle a^C , a^W \rangle$ و $B = \langle b^C , b^W \rangle$ دو بـازه بـا نمـاد جدیـد باشـند. رابطـه "$\preccurlyeq_{CW}$" را به طور جداگانه برای تعیین $max\{A , B\}$ و $min\{A , B\}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

(i) برای تعیین $max\{A , B\}$:

$$A \preccurlyeq_{CW} B \iff a^C \leq \mathrm{b^C} \ \ \& \ \ a^W \geq b^W,$$

(ii) برای تعیین $min\{A , B\}$:

$$A \preccurlyeq_{CW} B \iff a^C \leq \mathrm{b^C} \ \ \& \ \ a^W \leq b^W,$$

همچنین $B \prec_{CW} A$ اگر و تنها اگر $B \preccurlyeq_{CW} A$ و $A \neq B$.

در نتیجه بنا به (i) از بین دو بازه، بازه ای بیشینه است، که دارای مرکزیت بیشتر و نیم پهنای کمتر باشد. و بنا به (ii) از بین دو بازه، بازه ای کمینه است که دارای مرکزیـت و نـیم پهنـای کمتـــر باشـــد. بـــه عنـــوان مثـــال از بـــین دو بـــازه $A = [3 , 7] = \langle 5 , 2 \rangle$ و $B = [6 , 8] = \langle 7 , 1 \rangle$ در مسائل ماکزیمم سازی بازه B را به عنوان بازه بهینه انتخاب می کنیم، و در مسائل می نیمم سازی این دو بازه باهم مقایسه پذیر نیستند.

تعریف۱- ۸:

اگر $\boldsymbol{A} = (A_1 , A_2 , \dots , A_r)$ و $\boldsymbol{B} = (B_1 , B_2 , \dots , B_r)$ دو بردار بازه ای باشند.

(i) گوییم $\boldsymbol{A} \preccurlyeq_{CW} \boldsymbol{B}$ اگر و تنها اگر برای هـر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطـه $A_k \preccurlyeq_{CW} B_k$ برقرار باشد.

(ii) گوییم $\boldsymbol{A} \prec_{CW} \boldsymbol{B}$ اگر وتنها اگر برای هر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطه $A_k \preccurlyeq_{CW} B_k$ بر قرار باشد، و برای حداقل یک اندیس $h \in \{1 , 2 , \dots , r\}$ داشته باشیم:

$$A_h \prec_{CW} B_h.$$

فرض کنید $A = [a^L , a^U] = \langle a^C , a^W \rangle$ و $B = [b^L , b^U] = \langle b^C , b^W \rangle$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه دو رابطه ترتیب جزئی "$\preccurlyeq_{LC}$" و "$\preccurlyeq_{UC}$" را به طور جداگانه برای تعیین $max\{A , B\}$ و $min\{A , B\}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

(i) برای تعیین $max\{A , B\}$:

$$A \preccurlyeq_{LC} B \iff a^L \le b^L \ \& \ a^C \le b^C,$$

$$A \prec_{LC} B \iff A \preccurlyeq_{LC} B \ \& \ A \neq B.$$

(ii) برای تعیین $min\{A , B\}$:

$$A \preccurlyeq_{UC} B \iff a^U \le b^U \ \& \ a^C \le b^C,$$

$$A \prec_{UC} B \iff A \preccurlyeq_{UC} B \ \& \ A \neq B.$$

در نتیجه بنا به رابطه "$\preccurlyeq_{LC}$"، از بین دو بازه، بازه ای ماکزیمم است، که دارای کران پایین و مرکزیت بزرگتر باشد. همچنین بنا به رابطه "$\preccurlyeq_{UC}$" از بین دو بازه، بازه ای مینیمم است، که دارای کران بالا و مرکزیت کمتر باشد.

تعریف۱- ۹:

اگر $\boldsymbol{A} = (A_1 , A_2 , \dots , A_r)$ و $\boldsymbol{B} = (B_1 , B_2 , \dots , B_r)$ دو بردار بازه ای باشند.

(i) می نویسیم $\boldsymbol{A} \preccurlyeq_{LC} \boldsymbol{B}$ اگر و تنها اگر برای هر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطه $A_k \preccurlyeq_{LC} B_k$ برقرار باشد.

(ii) می نویسیم $\boldsymbol{A} \prec_{LC} \boldsymbol{B}$ اگر وتنها اگر برای هر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطه $A_k \preccurlyeq_{LC} B_k$ بر قرار باشد، و برای حداقل یک اندیس $h \in \{1 , 2 , \dots , r\}$ داشته باشیم:

$$A_h \prec_{LC} B_h.$$

تعریف۱- ۱۰:

اگر $\boldsymbol{A} = (A_1 , A_2 , \dots , A_r)$ و $\boldsymbol{B} = (B_1 , B_2 , \dots , B_r)$ دو بردار بازه ای باشند.

(i) می نویسیم $\boldsymbol{A} \preccurlyeq_{UC} \boldsymbol{B}$ اگر و تنها اگر برای هر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطه $A_k \preccurlyeq_{UC} B_k$ برقرار باشد.

(ii) می نویسیم $\boldsymbol{A} \prec_{UC} \boldsymbol{B}$ اگر وتنها اگر برای هر $k = 1 , 2 , \dots , r$ رابطه $A_k \preccurlyeq_{UC} B_k$ بر قرار باشد، و برای حداقل یک اندیس $h \epsilon \{1 , 2 , \dots , r\}$ داشته باشیم:

$A_h \prec_{UC} B_h$.

قضیه زیر ارتباط بین روابط ترتیب جزئی تعریف شده را نشان می دهد.

قضیه۱- ۱:

فرض کنید $A = [a^L , a^U] = \langle a^C , a^W \rangle$ و $B = [b^L , b^U] = \langle b^C , b^W \rangle$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند. آنگاه روابط زیر برای تعیین $min\{A , B\}$ برقرار هستند،

$$\text{(i)} \quad A \preccurlyeq_{UC} B \quad \Leftrightarrow \quad A \preccurlyeq_{LU} B \ \vee \ A \preccurlyeq_{CW} B$$

$$\text{(ii)} \quad A \prec_{UC} B \quad \Leftrightarrow \quad A \prec_{LU} B \ \vee \ A \prec_{CW} B$$

اثبات۱- ۱:

فرض کنید، $A \preccurlyeq_{CW} B \ \vee \ A \preccurlyeq_{LU} B$ باشد.

اگر $A \preccurlyeq_{LU} B$ باشد، داریم:

$$a^L \le b^L \ \ \& \ \ a^U \le b^U \qquad\qquad (*)$$

از رابطه $(*)$ نتیجه می گیریم:

$$a^C = \frac{a^L + a^U}{2} \le \frac{b^L + b^U}{2} = b^C \ \ \& \ \ a^U \le b^U$$

و این نشان می دهد که: $A \preccurlyeq_{UC} B$.