بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به . . .

مهربان ترین پدر و صبور ترین مادر

آنان که توانشان رفت تا به توان برسم

و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند

آنانکه راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت

تقدیم به آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر.......

تقدیر و تشکر

در آغاز با حمد و سپاس خداوند علم که هادی ما در مسیر علم و تربیت است و به ما آموخت چگونه با امید به آینده‌ای روشن در کوچه‌های علم و دانش قدم زنیم و افق‌های جدیدی پیش روی خود بگشاییم.

با تقدیر و تشکر شایسته از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر امجد علی پناه که با راهنمایی و مساعدت خود صحیفه‌های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه گشای من در نگارش این پایان نامه بوده است، از خداوند سبحان توفیقات روزافزون را برای ایشان خواستارم.

از اساتید فرهیخته دانشگاه کردستان بویژه اساتید بزرگوار گروه ریاضی نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از خانواده عزیزم که در تمامی لحظات زندگی در کنارم بوده و همواره گرمای حضورشان را حس کرده‌ام کمال تشکر و سپاس را داشته باشم.

چکیده

در این پایان‌نامه، روش موجک سینوسی و کسینوسی برای حل معادله‌ی انتگرو-دیفرانسیل فردهلم غیر خطی نوع دوم از مرتبه کسری با شرایط اولیه ارائه شده است که مشتق این معادله از نوع مشتق کسری کاپوتو می‌باشد. یک مجموعه از موجک‌های سینوسی و کسینوسی به عنوان پایه‌هایی برای تقریب جواب در نظر گرفته شده است. رابطه بین توابع بلاک-پالس و موجک سینوسی و کسینوسی به‌دست آورده می‌شود، سپس توابع موجود در معادله به‌صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌ای موجک سینوسی و کسینوسی در نظر گرفته می‌شود. در نهایت یک دستگاه معادلات غیرخطی حاصل خواهد شد که با روش تکراری نیوتن حل می‌شود. مشخصه اصلی این روش استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال به‌منظور حذف عملگر انتگرال در معادله می‌باشد. در پایان نتایج عددی حاصل از این روش ارائه شده است.

کلمات کلیدی: *مشتق کسری، موجک سینوسی و کسینوسی، توابع بلاک- پالس، دستگاه معادلات غیرخطی، ماتریس عملیاتی انتگرال، نتایج عددی*

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

تعمیم مفهوم مرتبه مشتق به مقادیر غیر صحیح موجب شروع قضیه حساب دیفرانسیل کسری می‌شود. می‌دانیم مشتق اول از نظر فیزیکی به معنی سرعت و مشتق دوم به معنی شتاب است، اما پیرامون مشتق از مرتبه غیر صحیح یا کسری چه می‌توان گفت؟

حسابان کسری [۱] حوزه‌ای در آنالیز ریاضی است که به بررسی و کاربرد انتگرال‌ها و مشتق‌های کسری از مرتبه گویا، گنگ و یا حتی مختلط می‌پردازد که ممکن است به عنوان یک موضوع جدید در نظر گرفته شود.

نخستین بار در سال ۱۶۹۵ هوپیتال [۲] با مطرح کردن این مساله با لایبنیتس [۳] که اگر $n = \frac{1}{2}$ باشد آن‌گاه مفهوم $D^n f(x)$ چگونه خواهد بود، محاسبات کسری مطرح شد [۱]. به لحاظ تاریخی اولین کاربرد حسابان کسری احتمالاً توسط آبل [۴] در مطالعه مساله کوتاهترین زمان ارائه شده است [۳، ۲].

از آن زمان تا کنون محاسبات کسری نظر بسیاری از ریاضیدانان از جمله لاپلاس [۵]، فوریه [۶]، آبل، لیوویل [۷]، ریمان [۸]، هولمگران [۹]، گرونوالد [۱۰]، لتنیکوف [۱۱] و غیره را به خود جلب نموده است [۴].

کنفرانس‌های بین المللی که در سال‌های ۱۹۷۴، ۱۹۸۴ و ۱۹۸۹ در این زمینه تشکیل شد بیشتر روی مفهوم ریاضی مشتق کسری متمرکز بوده است، اما اولین کنفرانس $FDTA$ [۱۲] که در سال ۲۰۰۳ در شیکاگو برگزار

---

[۱] Fractional calculus

[۲] Hopital

[۳] Leibniz

[۴] Abel

[۵] Laplace

[۶] Fourier

[۷] Liouville

[۸] Riemann

[۹] Holmgren

[۱۰] Grünwald

[۱۱] Letnikov

[۱۲] Fractional and Derivatives with Their Applications

شد روی مفاهیم کاربردی مشتق کسری متمرکز شد. آخرین کنفرانس $FDTA$ در ماه می ۲۰۱۲ در چین برگزار شد. اولین کارگاه مشتق کسری و کاربرد آن در کنفرانس $IFAC$ [۱] در سال ۲۰۰۴ در فرانسه تشکیل شد. دومین و سومین کارگاه‌ها نیز به ترتیب در سال ۲۰۰۶ در پرتغال و در سال ۲۰۰۸ در ترکیه برگزار شدند [۵].

رشد قضایای انتگرال‌ها و مشتق‌های کسری به اویلر، لیوویل و آبل نسبت داده شده است [۷، ۶].

از ابتدای قرن ۲۱ واژه حسابان کسری به سرعت در حال افزایش بوده است. در حقیقت این مفهوم در بسیاری از رشته‌های متفاوت علمی ظاهر شده است. به عنوان یک واقعیت، در برخی از کاربردها در سیستم‌های مهندسی، ایده‌های مبتنی بر مشتق کسری نسبت به ایده‌های مبتنی بر مشتق معمولی، مدل‌های عالی‌تری را ارائه می‌کنند. به عنوان نمونه، پلیمرها و مواد ویسکوالاستیک بر خلاف مواد دیگر، خاصیت کشسانی و چسبناکی را توام با هم دارند و به واسطه آن پس از کشیده شدن به آرامی به حالت تعادل باز می‌گردند و به عبارتی دارای حافظه هستند. مشتق‌های غیر صحیح قادر به توصیف اثر حافظه می‌باشند، در نتیجه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توانایی بیشتری در بیان و مدل‌بندی رفتار چنین موادی را دارند. بنابراین می‌توان گفت حسابان کسری ابزارهای عالی برای توصیف خواص حافظه در مواد و فرآیندهای گوناگون ارائه می‌کند و این یک برتری عمده حسابان کسری در مقایسه با مدل‌های مرتبه صحیح است که در آن‌ها این خواص نادیده گرفته می‌شود.

در حال حاضر کاربردهای مربوط به حسابان کسری در زمینه‌های زیر می‌باشد [۵]:

- کنترل کسری سیستم‌های مهندسی
- ابزارها و تکنیک‌های عددی و تحلیلی
- اکتشافات اساسی از مکانیکی، الکتریکی و سایر خواص مختلف مهندسی مواد مانند پلیمرها، ویسکوالاستیک، کف، ژل و سایر کاربردهای علمی و مهندسی
- درک اساسی موج، پدیده پخش و اندازه گیری آن‌ها، مانند کاربرد در فیزیک پلاسما
- کاربردهای بیومهندسی
- مدل‌بندی گرمایی سیستم‌های مهندسی مانند ابزار عایق، ماشین

[۱] International Federation of Automatic Control

- پردازش تصویر، علائم وغیره.

معرفی معادلات انتگرو-دیفرانسیل

یکی از انواع خاص معادلات، معادلات انتگرو-دیفرانسیل [۱] می‌باشد. این معادلات علاوه بر کاربرد در ریاضیات، دارای کاربردهای گسترده‌ای در مهندسی، فیزیک، اقتصاد و غیره می‌باشد. به عنوان مثال در دینامیک حرکت، مدل‌های بیولوژیکی، جنبش‌های شیمیایی و ... از معادلات انتگرو-دیفرانسیل استفاده می‌شود. یک معادله انتگرو-دیفرانسیل شامل یک تابع مجهول از یک متغیر مستقل و یک یا چند مشتق تابع مجهول و انتگرال می‌باشد. به‌طور کلی معادلات انتگرو-دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- معادلات انتگرو-دیفرانسیل خطی
- معادلات انتگرو-دیفرانسیل غیر خطی

این معادله خطی است هرگاه تابع مجهول به‌صورت توابع، مشتق‌ها و انتگرال خطی ظاهر شوند و در غیر این صورت غیر خطی است.

در این بخش به‌طور مختصر به معرفی معادلات انتگرو-دیفرانسیل فردهلم [۲] می‌پردازیم.

معادلات انتگرو-دیفرانسیل فردهلم شامل معادلات مرتبه kام می‌باشند که شکل کلی این معادلات به‌صورت زیر است:

۱) معادله انتگرو-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه kام با شرایط اولیه:

$$\sum_{i=0}^{k} \phi_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \int_a^b K(x,t) y(t) dt, \qquad a \leq x \leq b,$$

۲) معادله انتگرو-دیفرانسیل فردهلم غیر خطی مرتبه kام با شرایط اولیه:

$$\sum_{i=0}^{k} \phi_i(x) y^{(i)}(x) = f\left(x, y(x), \int_a^b K(x,t) y(t) dt\right), \quad a \leq x \leq b,$$

شرایط اولیه برای معادلات (۱) و (۲) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y(a) = y_a,\ y'(a) = y'_a,\ \cdots,\ y^{(k-1)}(a) = y_a^{(k-1)},$$

[۱] Integro-differential equation

[۲] Fredholm

توابع $\phi_i(x)$، k، $i = ۰, ۱, \cdots, k$، $f(x)$ و $g(x)$ توابعی معلوم در $L_۲([a,b])$ می‌باشند، y_a، y'_a، $\cdots$، $y_a^{(k-۱)}$ اعدادی حقیقی و $y(x)$ نیز تابع مجهول معادله است.

روش‌های حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل

بعد از مدل‌بندی یک پدیده با یک معادله انتگرو-دیفرانسیل مرتبه کسری، حل معادله انتگرو-دیفرانسیل مدنظر قرار می‌گیرد. بیشتر معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه کسری دارای جواب تحلیلی نمی‌باشند از این رو مشابه معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه صحیح بکارگیری روش‌های عددی برای حل این گونه معادلات انتگرو-دیفرانسیل اجتناب ناپذیر است. به دلیل غیر موضعی بودن عملگرهای مشتق کسری، طرح روش‌های عددی برای این مسائل با ملاحظاتی همراه است.

در طرح روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل و یا انتگرال، گام اول عبارت است از تقریب‌های گسسته برای عملگرهای مشتق و انتگرال. در حسابان کسری نیز چنین رویه‌ای برقرار است. عملگرهای مشتق و انتگرال کسری عملگرهایی سراسری یا فراگیر می‌باشند، این به معنی آن است که برای محاسبه آن‌ها استفاده از اطلاعات تابع فقط در یک همسایگی کوچک از t کافی نیست، بلکه به پیشینه کاملی از تابع از نقطه ۰ تا t نیاز است. با توجه به این خاصیت گاهی گفته می‌شود که یک عملگر کسری دارای حافظه است.

به این ترتیب برای تعیین تقریبی از عملگرهای مشتق و انتگرال کسری در یک نقطه، بایستی حجم زیادی از اطلاعات ماقبل آن نقطه در دسترس و به‌کار گرفته شود. این خاصیت از عملگرهای کسری مانع از تعمیم آسان ابزارها و روش‌های موجود در مشتق‌های مرتبه صحیح به مشتق‌های مرتبه کسری می‌شود. به این ترتیب پیچیدگی محاسباتی یک روش عددی برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل کسری از پیچیدگی محاسباتی این روش برای معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه صحیح، بالاتر است [۱۶].

چندین روش تحلیلی و عددی کلاسیک برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه کسری وجود دارند که تا به امروز نیز گسترش یافته است. این روش‌ها شامل روش تجزیه آدومیان [۱] (ADM)، روش هم‌محلی [۲]،

[۱] Adomian decomposition method
[۲] Collocation method

روش تبدیل دیفرانسیلی [۱] ، روش گالرکین [۲] ، روش تکرار متغیر [۳] (VIM)، روش تفاضلات متناهی [۴]، روش تحلیلی هوموتوپی [۵]، روش اختلال هوموتوپی [۶]، روش تعمیم یافته تبدیلات دیفرانسیل [۷] و غیره می‌باشند که بیشتر این روش‌ها برای مسائل خطی استفاده می‌شوند و تعداد کمی از آن‌ها برای مسائل غیر خطی به‌کار برده می‌شوند. برای تعدادی از این روش‌ها تحت شرایط محدودی همگرایی ثابت شده است [۱۱].

در دو دهه اخیر روش‌های حل عددی معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه کسری پیشرفت چشمگیری داشته‌اند. روش تفاضلات پسرو بر اساس تقریب گرونوالد-لتنیکوف [۸] [۴]، روش تفاضلات پسرو لوبیش [۹] [۱۸]، ایده ماتریسی پودلوبنی [۱۰] [۱۹]، قاعده انتگرال‌گیری حاصل ضرب [۲۰]، روش دیتهلم [۱۱] بر مبنای انتگرال گیری [۲۱]، روش گام به گام [۲۲]، روش آدامز کسری [۱۲] [۲۳]، روش پیشگو-تصحیح کننده [۱۳] [۲۴] و الگوریتم موازی کارا [۲۵] از جمله روش‌های مرسوم در حل عددی معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه کسری می‌باشند.

تعمیم روش تفاضلات متناهی برای مسائل کسری منجر به روش تفاضلات متناهی با تقریب گرونوالد-لتنیکوف گردید. این روش در دو دهه اخیر در حل عددی معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه کسری به‌طور وسیعی به‌کار گرفته شده و گسترش آن مرهون تلاش افراد زیادی از جمله گرنفلو [۱۴] و پودلوبنی بوده است [۸]. اما به دلیل غیر موضعی بودن ساختار مشتق کسری، روش‌های گرنفلو و پودلوبنی به ذخیره سازی و در نتیجه حافظه زیادی نیاز دارند، به علاوه پایداری محدود و مرتبه دقت پایین این روش‌ها و هم‌چنین پیچیدگی در پیاده سازی آن‌ها برای مسائل غیر خطی، کارایی آن‌ها را در حل عددی معادلات انتگرو-دیفرانسیل مرتبه

[۱] Differential transform method
[۲] Galerkin method
[۳] Variational iteration method
[۴] Finite difference method
[۵] Homotopy analysis method
[۶] Homotopy perturbation method
[۷] Generalized differential transform method
[۸] Grünwald-Letnikov approximation
[۹] Lubich backward difference
[۱۰] Podlubny matrix idea
[۱۱] Dithelm
[۱۲] Fractional Adams method
[۱۳] Predictor-corrector method
[۱۴] Gorenflo

کسری پایین آورده است [۲۶]. علاوه بر روش گرونوالد-لتنیکوف روش‌های پیشگو-تصحیح کننده کسری [۲۴، ۲۳]، روش رانگ-کوتای کسری [۱] [۲۷] و یا روش‌های چند گامی کسری [۱۸] از جمله روش‌هایی می‌باشند که از تعمیم روش‌های حل معادلات مرتبه صحیح به دست آمده‌اند.
اما این روش‌ها به دلیل غیر موضعی بودن عملگر مشتق کسری و هم‌چنین وجود توابع با درجه همواری پایین‌تر در مدل‌های کسری، دارای کارایی مناسب نمی‌باشند. از سوی دیگر این تلاش‌ها برای طرح روش‌های غیر کلاسیک عددی منجر به نتایج قابل توجهی نگردید. به عنوان نمونه می‌توان به روش دیتهلم اشاره نمود [۲۹، ۲۸]. در این روش ابتدا عملگر مشتق کسری به انتگرال نامتعارف یک تابع تبدیل می‌شود که جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی است، سپس این انتگرال نامتعارف با انتگرال گیری گاوس-لاگر مناسب تقریب زده می‌شود.

موجک

یکی از مباحثی که در سال‌های اخیر توجه بسیاری از ریاضیدانان و مهندسین را از لحاظ نظریه و کاربرد به خود جلب نموده است آنالیز موجک [۲] می‌باشد. موجک دسته‌ای از توابع ریاضی است که برای تجزیه سیگنال پیوسته به مولفه‌های فرکانسی آن به‌کار می‌رود. این توابع به‌صورت موضعی بررسی می‌شوند و ارتباط نزدیک‌تری بین بعضی از توابع و ضرایب آن‌ها امکان پذیر می‌گردد. تقسیم‌بندی موجک‌ها بر اساس محمل فشرده [۳] بودن آن‌ها صورت می‌گیرد، محمل فشرده بودن به این معنی است که موجک روی یک بازه متناهی غیر صفر است. موجک‌های هار [۴]، دابیشز [۵] و سینوسی و کسینوسی [۶](CAS) از انواع موجک‌های با محمل فشرده می‌باشند که در این پایان‌نامه موجک سینوسی و کسینوسی مورد بررسی قرار می‌گیرد.
در این پایان‌نامه ابتدا به ارائه حسابان کسری پرداخته می‌شود، سپس برخی از توابع خاص در حسابان کسری شرح داده شده و پس از معرفی انتگرال و مشتق‌های کسری، بعضی از خواص این عملگرها بیان می‌شود. پس

[۱] Fractional runge-kutta method
[۲] Wavelet analysis
[۳] Compact support
[۴] Haar
[۵] Daubechies
[۶] Sine and cosine

از ارائه آنالیز چندریزه‌سازی و معرفی موجک، موجک سینوسی و کسینوسی معرفی شده و ماتریس عملیاتی انتگرال این موجک به‌دست آورده می‌شود. در ادامه با استفاده از موجک سینوسی و کسینوسی، تابع بلاک-پالس و ماتریس عملیاتی مربوط به این توابع، معادله انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه کسری حل می‌شود. در پایان روش ارائه شده برای حل چندین مثال به‌کار برده می‌شود.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول حسابان کسری به‌طور مختصر بیان می‌شود و برخی از توابع خاص و عملگرهای مشتق و انتگرال که نقش کلیدی در حسابان کسری دارند شرح داده می‌شود. در فصل دوم به‌طور اجمالی به بیان آنالیز چندریزه‌سازی پرداخته می‌شود و پس از معرفی موجک، موجک سینوسی و کسینوسی و چگونگی تقریب تابع به کمک آن‌ها، نحوه ساخت ماتریس عملیاتی بیان می‌شود. روش موجک سینوسی و کسینوسی برای حل معادله انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه کسری با شرایط اولیه در فصل سوم ارائه می‌شود. در فصل چهارم با ارائه‌ی چند مثال، نتایج عددی حاصل از این روش برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه‌ی کسری با شرایط اولیه بررسی می‌شود.

فصل ۱

مروری مختصر بر حسابان کسری

در این فصل ابتدا تبدیل لاپلاس [۱] را بیان می‌کنیم، سپس برخی از توابع خاص از جمله توابع گاما [۲] ، بتا [۳] و میتاگ-لفلر [۴] را معرفی کرده و بعضی از خواص این توابع را که نقش مهمی در حسابان کسری دارند، یادآوری می‌کنیم. در ادامه پس از معرفی عملگرهای کسری، خاصیت‌های ریاضی آن‌ها را بیان می‌کنیم.

۱.۱ تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یکی از ابزارهای حل معادلات دیفرانسیل خطی است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم تابع $f(t)$ برای همه مقادیر مثبت t تعریف شده باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به‌صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}\Big\{f(t)\Big\} = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

برای وجود این انتگرال، تابع $f(t)$ لازم است از مرتبه نمایی باشد [۱۰].

تعریف ۲.۱.۱. گوییم تابع f از مرتبه نمایی است هرگاه اعداد مثبتی مانند a و M وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \qquad \forall\, t \geq ۰.$$

[۱] Laplace transform

[۲] Gamma

[۳] Beta

[۴] Mittag -Leffler

تعریف ۳.۱.۱. پیچش [1] یک عملگر ریاضی است که به روی دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ عمل کرده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(z) * g(z) = \int_{\circ}^{z} f(z-\tau)g(\tau)d\tau.$$

قضیه ۱.۱.۱. تبدیل لاپلاس پیچش توابع $f(t)$ و $g(t)$ به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L}\Big\{f(t) * g(t)\Big\} = \mathcal{L}\Big\{\int_{\circ}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\Big\} = \mathcal{L}\Big\{f(t)\Big\}\mathcal{L}\Big\{g(t)\Big\}.$$

۲.۱ توابع خاص

توابع خاص به یک دسته از توابعی گفته می‌شود که از لحاظ ریاضی و فیزیکی بسیار پرکاربرد می‌باشند که در جواب معادلات دیفرانسیل معمولی [2] ، معادلات دیفرانسیل جزئی [3] و غیره ظاهر می‌شوند و یکی از موضوع‌های قدیمی در ریاضیات می‌باشند.

۱.۲.۱ تابع گاما

در مطالعه توابع خاص ریاضی، تابع گاما از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. می‌دانیم که اگر n عدد صحیح و مثبت باشد حاصل ضرب n عدد صحیح مثبت آغازین را با $n!$ نمایش می‌دهیم. تابع گاما تعمیم تابع فاکتوریل است از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی و مختلط که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_{\circ}^{\infty} t^{z-\text{۱}} e^{-t} dt,$$

این تعریف به کمک انتگرال اویلر نوع دوم ارائه شده است و آن را تابع گامای اویلر یا تابع گاما کامل نیز می‌نامند که به مقادیر $Re(z) > \circ$ محدود شده است و به سادگی می‌توان نشان داد که تابع گاما در نیمه راست صفحه مختلط ($Re(z) > \circ$) همگراست [۸].

در ادامه به بررسی برخی از خواص تابع گاما به‌طور مختصر می‌پردازیم:

۱. برای تابع گاما فرمول بازگشتی زیر برقرار است که مهم‌ترین خاصیت تابع گاما می‌باشد:

$$\Gamma(z+\text{۱}) = z\Gamma(z). \qquad (\text{۱.۱})$$

[1] Convolution
[2] Ordinary differential equations
[3] Partial differential equations

۲. برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\Gamma(n+۱) = n!$$

۳. یک تعریف جامع از تابع گاما به‌وسیله حد به شکل زیر می‌باشد:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+۱)\cdots(z+n)},$$

که دارای قطب ساده [۱] در نقاط $z = ۰, -۱, -۲, \cdots$ می‌باشد.

۴. برای هر عدد ناصحیح z داریم:

$$\Gamma(z)\Gamma(۱-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

۵. رابطه زیر که به فرمول لژاندر [۲] معروف است برای $z \neq ۰, \frac{-۱}{۲}, -۱, \cdots$ برقرار است:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}\,۲^{۱-۲z}\Gamma(۲z). \qquad (۲.۱)$$

۶. برای هر b و a دلخواه تابع گاما در خاصیت مجانبی زیر صدق می‌کند:

$$z^{b-a}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = ۱ + O(z^{-۱}).$$

۷. تابع گاما به‌صورت زیر نیز قابل تعریف است:

$$\Gamma(z) = \int_۰^۱ \left(\ln\left(\frac{۱}{t}\right)\right)^{z-۱} dt\ .$$

اثبات خواص فوق در مرجع [۸] ارائه شده است.

با قرار دادن $z = n + \frac{۱}{۲}$ در رابطه (۲.۱) خاصیت مفید زیر به‌دست می‌آید:

$$\Gamma(n+\frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{\pi}\,(۲n)!}{۲^{۲n}n!}, \qquad (۳.۱)$$

[۱] Simple pole

[۲] Legendre formula

به علاوه با قرار دادن $n=\circ$ در رابطه (۳.۱) داریم:

$$\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}.$$

همچنین به ازای $z=\frac{-۱}{۲}$ در رابطه (۱.۱) خواهیم داشت:

$$\Gamma(\frac{-۱}{۲})=-۲\Gamma(\frac{۱}{۲})=-۲\sqrt{\pi}.$$

ضرایب بسط دوجمله‌ای $\binom{\alpha}{k}$ به ازای مقادیر حقیقی، نقش مهمی در حسابان کسری دارند. این تعمیم با استفاده از تابع گاما بیان می‌شود. ضرایب بسط دوجمله‌ای به‌طوری‌که $\alpha\in\mathbb{R}$ و $k\in Z^{+}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{(-۱)^{k}\Gamma\left(k-\alpha\right)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+۱)}=\frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)\cdots(\alpha-k+۱)}{k!}.$$

۲.۲.۱ تابع بتا

تابع بتا یکی دیگر از توابع خاص ریاضی است که در مشتق و انتگرال مرتبه کسری برخی از توابع ریاضی ظاهر می‌شود. این تابع ارتباط مستقیمی با تابع گاما دارد و به کمک انتگرال اویلر نوع اول به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$B(p,q)=\int_{\circ}^{۱}t^{p-۱}(۱-t)^{q-۱}dt,\qquad Re(p)>\circ,\quad Re(q)>\circ,$$

تابع $B(p,q)$ را تابع بتای کامل نیز می‌نامند.

این تابع به صورت لم زیر نیز بیان می‌شود که بیان‌گر رابطه آن با تابع گاما است:

لم ۱.۲.۱.

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

اثبات.

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_{\circ}^{\infty}e^{-u}u^{p-۱}du\int_{\circ}^{\infty}e^{-\nu}\nu^{q-۱}d\nu\\&=\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{\infty}e^{-u-\nu}u^{p-۱}\nu^{q-۱}dud\nu,\end{aligned}$$

با اعمال تغییر متغیر $u=zt$ و $v=z(1-t)$ داریم:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial t} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z & t\\ -z & 1-t\end{vmatrix}=z,$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{1} e^{-z}(zt)^{p-1}(z(1-t))^{q-1}zdtdz &= \int_{z=0}^{\infty} e^{-z}z^{p+q-1}dz\int_{t=0}^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\\ &=\Gamma(p+q)B(p,q),\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

در ادامه به بیان برخی از خواص تابع بتا می‌پردازیم:

۱. تابع بتا را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt.$$

۲. نمایش دیگری از تابع بتا به‌صورت زیر است:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt.$$

۳. برابری‌های زیر در مورد تابع بتا برقرار است:

$$\begin{aligned}&B(p,q)=B(q,p),\\ &B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1),\\ &B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,q)=\frac{q}{p+q}B(p,q).\end{aligned}$$

۳.۲.۱ تابع میتاگ-لفلر

جواب‌های تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های کسری، اغلب بر حسب تابعی به نام میتاگ-لفلر بیان می‌شوند. تابع میتاگ-لفلر به عنوان تابع ویژه یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری نیز معرفی می‌شود و