بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

تبدیلات متغیر در حل عددی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم با هسته پیوسته ومنفرد ضعیف

نگارش:

حمید اردهه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما:

دکتر خسرو مالک نژاد

پاییز ۱۳۸۰

چکیده

چندین روش تبدیل متغیر در انتگرال‌گیری عددی اخیراً توسعه داده شده است. استفاده از این تبدیلات منجر به افزایش مرتبه همگرایی قاعده‌های ذوزنقه‌ای و نقطه میانی می‌گردد. در این پایان‌نامه کاربرد روش‌های تبدیل متغیر از نوع‌های سایدی[1] و لوریه[2] در حل عددی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم با هسته‌های پیوسته و منفرد ضعیف بررسی شده است. چون تبدیلات بگونه‌ای هستند که لازم نیست نقاط انتهایی بازه انتگرال‌گیری به عنوان نقاط شبکه‌ای در نظر گرفته شوند، روش ارائه شده می‌تواند برای هر دو نوع معادلات انتگرال ولترای با هسته پیوسته و منفرد ضعیف به شیوه مشابهی بکار رود. همچنین مزیت عمده این روش‌ها سادگی کاربرد و دستیابی به همگرایی مرتبه‌های بالاتر است. کاربرد این روش در معادلات فردهلم نوع دوم با هسته‌های پیوسته و منفرد ضعیف نیز ارائه شده است. نتایج عددی بدست آمده رشد مرتبه همگرایی مورد انتظار را ثابت می‌کند. این نتایج با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای برای محاسبه انتگرال تبدیل شده بدست آمده‌اند.

1- Sidi

2- Laurie

تقدیر و تشکر

این پایان نامه تلاش برای بیان گوشه‌ای کوچک از جهان نامحدود علم است و خدا را شکر می‌کنم که توفیق اتمام آن را داشتم. از تمام کسانی که در این راه کمکی هر چند کوچک انجام داده‌اند کمال تشکر را دارم.

از آقای دکتر خسرو مالک نژاد به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و کمک‌های فراوانی که در مدت نگارش این اثر داشتند؛

از آقایان دکتر امام زاده، دکتر ایواز و دکتر رشیدی نیا که در جلسه دفاعیه شرکت داشتند و دکتر مختارزاده، دکتر شیدفر، دکتر امامی زاده که در دوران تحصیل کمک‌های زیادی در راه پیشرفت علمی اینجانب داشتند تشکر و قدردانی می‌کنم. همچنین همکاری‌های ارزنده خانم یوسفی مسئول تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی را ارج می‌نهم.

بی شک بدون کمک‌های فراوان این اساتید موفقیت در نگارش این اثر حاصل نمی‌شد.

لازم می‌دانم از دکتر Athena Makroglou از دانشکده علوم کامپیوتر و ریاضیات دانشگاه Portsmouth به خاطر ارسال برخی مراجع مورد نیاز و ارائه راهنمایی‌های مفید در طول نگارش این اثر قدردانی کنم.

تمام علاقه‌مندان را به مطالعه این اثر دعوت کرده و برای آنان آرزوی موفقیت دارم.

فهرست مطالب

مقدمه

تاریخچه‌ای از معادلات انتگرال

در بررسی پاره‌ای از مسائل فیزیکی معادلاتی پیدا می‌گردند که در آنها مـجهول در زیـر علامت انتگرال ظاهر می‌شود و به آنها معادلات انتگرال مـی‌گوییم. لاپـلاس[1] در سـال ۱۷۸۲ با معرفی معادله $y(x)=\int_0^\infty e^{-tx}f(t)\,dt$ نظریه معادلات انتگرال را پایه‌ریزی کرد. این معادله اکنون به عنوان تبدیل لاپلاس مطرح است. در ادامه فوریه[2] در مطالعات خود نوع دیگری از این معادلات را ارائه داد و اساس تبدیلات فوریه را بنیان نهاد. در زمان‌های بعد آبل[3] در مسائل مکانیکی، پواسن[4] در نظریه مغناطیس، لیوویل[5] در حـل بـرخـی معادلات دیفرانسیل، نیومن[6] با تبدیل مسئله دیریکله به یک معادله انتگرال از آن استفاده کردند.

در سال ۱۹۸۶ دانشمندی ایتالیایی به نام ولترا[7] برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را مطرح کرد. صورت عمومی معادله وی عبارت است از:

$$h(x)f(x)=g(x)+\lambda\int_a^x k(x,y)f(y)\,dy$$

در اوایل قرن بیستم ریاضیدان سوئدی به نام فردهالم[8] یک دسته‌بندی کلی از مـعادلات انتگرال خطی بصورت

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

1- Laplace
2- Fouriere
3- Abel
4- Poisson
5- Liouville
6- Neuman
7- Voltera
8- Fredholm

را مطرح کرد و کار ولترا را کامل کرد. هیلبرت[1] طی تحقیقاتی که در مورد معادلات انتگرال انجام داد، مسائل معادلات دیفرانسیل را بصورت یک معادله انتگرال تنظیم کرد.

معادلات انتگرال در علومی چون فیزیک، پتروشیمی، اشعه لیزر، رآکتورها، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و... کاربرد دارند و با گسترش علوم کاربرد آن نیز افزایش می‌یابد.

1- Helbert

فصل اول

پیش نیازهای آنالیز عددی

۱-۱- درونیابی چند جمله‌ای

فرض کنید $x_0,...,x_n$ اعداد حقیقی یا مختلط مجزا، و $y_0,...,y_n$ مقادیر تابع مرتبط با آنها باشند، مسئله یافتن چند جمله‌ای که

$$P(x_i)=y_i\,,\ i=0,\ 1,\ \dots,\ n \qquad (۱-۱-۱)$$

درونیابی نامیده می‌شود.

قضیه ۱: (اتکینسون[1] [۴] صفحه ۱۳۴) اگر $x_0,...,x_n$ اعداد حقیقی مجزا، و f تابعی حقیقی با $n+1$ مشتق پیوسته دربازه I شامل این نقاط و عدد حقیقی t داده شده باشند، آنگاه $I\in\xi$ وجود دارد که

$$f(t)-\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,lj\,(t)=\frac{(t-x_0)\dots(t-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,,$$
$$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} \qquad (۲-۱-۱)$$

چند جمله‌ای $P_n(t)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,l_j(t)$ چندجمله‌ای درونیاب $f(t)$ نامیده می‌شود.

1- Atkinson

۱-۲-انتگرال‌گیری عددی

مسئله تقریب انتگرال معین

$$I=\int_a^b f(x)dx \qquad (۱-۲-۱)$$

بوسیله قاعده

$$I_n=\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \qquad (۲-۲-۱)$$

انتگرال‌گیری عددی نامیده می‌شود.

مهمترین قاعده‌های انتگرال‌گیری فرمول‌های نیوتن[۱] - کاتس[۲] هستند، که به صورت زیر بدست می‌آیند:

برای $n\geq ۱$ قرار دهید: $h=\dfrac{(b-a)}{n}$ و برای $j=۰,۱,\ldots,n$ قرار دهید: $xj=a+jh$

I_n را بوسیله جایگزینی $f(x)$ بوسیله چند جمله‌ای درونیاب $P_n(x)$ روی نقاط $x_0,\ldots,x_n$ تعریف می‌کنیم.

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\simeq I_n=\int_a^b P_n(x)dx \qquad (۳-۲-۱)$$

پس

$$I_n=\int_a^b \sum_{j=0}^{n} l_j(x)\,f(x_j)dx=\sum_{j=0}^{n}\int_a^b l_j(x)\,f(x_j)\,dx$$

$$=\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \qquad (۴-۲-۱)$$

و در نتیجه

$$w_j=\int_a^b l_j(x)dx,\quad j=0,1,\ldots,n \qquad (۵-۲-۱)$$

در حقیقت فرمول‌های نیوتن -کاتس با $(n+۱)$ نقطه برای چند جمله‌ای‌های از درجه کمتر

1- Newton 2- Cotes

یا مساوی n دقیق هستند. چند نمونه از این فرمول‌ها در زیر آمده است:

قاعده ذوزنقه‌ای:

$$n=1,\quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx=\frac{h}{2}\,(f_0+f_1)-\frac{h^3}{12}f''(\xi),\quad x_0<\xi<x_1$$

قاعده سیمسون:[1]

$$n=2,\quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\,(f_0+4f_1+f_2)-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)\quad,\qquad x_0<\xi<x_2$$

قاعده $\frac{3}{8}$:

$$n=3,\quad \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx=\frac{3h}{8}\,(f_0+3f_1+3f_2+f_3)-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)\quad,\qquad x_0<\xi<x_3$$

قاعده ذوزنقه‌ای برای کل بازه به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}\,(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n)$$

بسط مجانبی (فرمول مجموع اویلر[2] - مکلورن[3]) برای قاعده ذوزنقه‌ای به صورت

$$E_n=I-I_n=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{B}_i[f^{(2i-1)}(b)-f^{(2i-1)}(a)]h^{2i}+O(h^{2m+1})\qquad(۱-۲-۶)$$

است که β_K اعداد ثابتی هستند [۴، صفحه ۲۸۵]، و وقتی $h\to 0$ به صورت

$$E_n=I-I_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{B}_k[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]h^{2k}\qquad(۱-۲-۷)$$

است [۲].

در (۱-۲-۶) اگر p کوچکترین اندیسی باشد که $f^{(2p-1)}(x)$ وجود داشته و برای هر $x\in[a,b]$ پیوسته باشد اما $f^{(2p-1)}(b)\neq f^{(2p-1)}(a)$ باشد آنگاه

$$I-I_n=\beta_p h^{2p}(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a))+O(h^{2p+1})\qquad(۱-۲-۸)$$

که $O(h^{2p+1})$ به معنای آن است که مقدار آن سریعتر از h^{2p+1} به صفر می‌گراید. در این

1- Sympson

2- Euler

3- Maclaurin

حالت می‌گوییم قاعده ذوزنقه‌ای دارای مرتبه ظاهری $2p$ برای انتگرالده f است، توجه داریم که تعریف مرتبه ظاهری بستگی به f دارد.

تعریف: قاعده کوادراتور را از مرتبه q می‌گوییم اگر برای هر انتگرالده f به قسمتی که $f^{(q-1)}(x)$ موجود بوده و برای هر $x\in[a,b]$ پیوسته باشد، مرتبه ظاهری حداقل q باشد و برای حداقل یک انتگرالده مرتبه ظاهری بزرگتر از q نشود.

پس واضح است که مرتبه قاعده ذوزنقه‌ای ۲ است.

۱-۳- نامساوی گرنوال[1] گسسته

قضیه ۲. اگر $z(i),a(i):Z^+\rightarrow R^+$ و $C\geq 0$، و شرایط

$$z(0)\leq C \qquad (1-3-1)$$

$$z(i)\leq C+\sum_{j=0}^{i-1} a(j)z(j) \qquad (2-3-1)$$

برقرار باشند آنگاه

$$z(i)\leq C\prod_{j=0}^{i-1}[1+a(j)] \qquad (3-3-1)$$

اثبات: به روش استقرا، اگر در (۱-۳-۲) قرار دهیم $i=1$ نتیجه می‌گیریم که

$$z(1)\leq C+a(0)z(0)\leq C+Ca(0)=C[1+a(0)]$$

یعنی فرض استقرا بر قرار است.

اکنون فرض کنیم (۱-۳-۳) برای $1,2,\ldots,i-1$ برقرار باشد، با استفاده از (۱-۳-۲) برای

1- Gronwall

گام i داریم:

$$z(i)\leq C+\sum_{j=0}^{i-1} a(j)z(j)=C+\sum_{j=0}^{i-2} a(j)z(j)+a(i-1)z(i-1)$$

اما با توجه به برقرار بودن شرایط قضیه برای $1,2,\ldots,i-1$ داریم:

$$z(i)\leq C\prod_{j=0}^{i-2}[1+a(j)]+a(i-1)C\prod_{j=0}^{i-2}[1+a(j)]$$

$$=C(1+a(i-1))\prod_{j=0}^{i-2}[1+a(j)]=C\prod_{j=0}^{i-1}[1+a(j)]$$

۱-۴-فرمول فئادی برونو[1]

قضیه ۳. فرض کنیم $G(t)=F(\phi(t))$، آنگاه Kامین مشتق G بوسیله جملاتی از مشتق‌های F و ϕ به صورت زیر است:

$$G^{(k)}(t)=\sum_J d_J F^{(\sigma(J))}(\phi)\prod_{i=1}^{\sigma(J)}\phi^{(j_i)}(t) \qquad (1-4-1)$$

که $J=(j_1,\ldots,j_\sigma)$ و $\sigma(J)$ تعداد قسمت‌هاست و

$$\sum_{i=1}^{\sigma(J)} j_i=k \qquad (2-4-1)$$

و d_J ثابت‌های معلوم هستند (برای اثبات [۳۹] را ببینید).

مثال: $k=2$

$$G''(t)=d_{11}F''(\phi)(\phi'(t))^2+d_2F'(\phi)\phi''(t)$$

همانطور که دیده می‌شود در (۱-۴-۲) بالاترین مرتبه مشتق $\phi(t)$ که در فرمول ظاهر می‌شود k است و مربوط به انتخاب $J=(k)$ است.

1- Faa di Bruno

فصل دوم

تبدیلات متغیر