بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

روش های آنالیز غیر هموار روی خمینه های ریمانی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا پوریای ولی

استاد مشاور:

دکتر صغری نوبختیان

پژوهشگر:

فرشته امانی

شهریور ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم فرشته امانی

تحت عنوان:

روشهای آنالیز غیر هموار روی خمینه‌های ریمانی

در تاریخ ...۸۷/۶/۲۷..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالـی............... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء	
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء	
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر سعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء	
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر اعظم اعتماد	با مرتبه علمی استادیار	امضاء	

مهر و امضای مدیر گروه ....

سپاسگزاری

لطف و عنایت پروردگار یکتا در انجام امور مختلف پایان نامه در سخت ترین شرایط، تنها یاریگر و الهام بخش حقیر بوده است و سپاس بی کران این حقیر از ذات اقدسش را می طلبد.

سپاس صمیمانه ام را تقدیم جناب آقای دکتر پوریای ولی و سرکار خانم نوبختیان می نمایم که همواره و بی دریغ مرا مرهون راهنمایی ها و الطافشان قرار دادند و هیچ کمکی را از حقیر دریغ ننمودند. از درگاه ایزد منان توفیق روز افزون این دو بزرگوار را خواهانم.

زحمات اساتید داور سرکار خانم دکتر اعتماد و جناب آقای دکتر اعظم را ارج نهاده و از ایشان سپاسگزارم.

از زحمات اساتید گروه ریاضی دانشگاه اصفهان که به طرق مختلف، چه در حین کلاس درس و چه در سایر موارد در راستای تحقیق این مجموعه مرا یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم. هم چنین از زحمات سرکار خانم گرامی، سرکار خانم موری، سرکار خانم فرهمند و سرکار خانم معمار در تدوین این پایان نامه تشکر می نمایم.

سپاس فراوان از پدر مهربانم، مادر فداکارم و همسر عزیزم که همواره راهنمایم بوده اند و هر آن چه دارم از برکت وجود ایشان است.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و تقدیم به همسر عزیزم

و همه ی عزیزانی که در به ثمر رساندن پایان نامه مرا یاری نمودند

چکیده

ابتدا به معرفی مفاهیم زیر و فوق دیفرانسیل توابع نیم پیوسته ی پائینی روی خمینه های هموار می پردازیم. سپس مفهوم هندسی مخروط نرمال روی خمینه ها و ارتباط آن با تابع فاصله از یک مجموعه ی دلخواه را بررسی خواهیم کرد. عناصر حساب زیر دیفرانسیل از قبیل: قوانین جمع و ضرب، قانون زنجیره ای، زیر گرادیان برای توابع سوپریمم و شرایط لازم برای مسائل بهینه ی مقید را بیان می کنیم. چند کاربرد از زیر دیفرانسیل مانند محک لیپ شیتز و قضیه ی تابع ضمنی را بحث می کنیم.دیفرانسیل شمول روی خمینه ها را بیان می کنیم که شکل کلی مناسب از نمایش سیستم های کنترل است. سپس ارتباط مفاهیم یکنوائی و ایستائی مجموعه ها نسبت به جواب های دیفرانسیل شمول روی خمینه ها را بررسی می کنیم. از این نتایج برای اثبات وجود و یکتائی معادلات همیلتون — ژاکوبی روی خمینه ها استفاده می کنیم.

کلمات کلیدی:خمینه ی ریمانی، تابع نیم پیوسته ی پائینی، زیر دیفرانسیل فرشه، زیر دیفرانسیل حدی و منفرد، مخروط نرمال فرشه و حدی.

فهرست مطالب

عنوان　　صفحه

فصل اول: مفاهیم اولیه

فصل دوم: زیر و فوق دیفرانسیل

فصل سوم: کاربردها

فصل چهارم: دیفرانسیل شمول روی خمینه ها

فصل پنجم: معادلات همیلتون –ژاکوبی روی خمینه ها

پیش گفتار

در چندین دهه‌ی اخیر شاهد ظهور آنالیز توابع غیر دیفرانسیل پذیر و کاربردهای شگرف آن در زمینه های مختلف از قبیل نظریه‌ی کنترل، بهینه سازی و ریاضیات اقتصادبوده‌ایم [۱۱, ۱۴]. هم چنین در سال های اخیر مسائل نظریه‌ی کنترل، ماتریس ها و هندسه به طور طبیعی منجر به مطالعه‌ی آنالیز توابع غیر مشتق پذیر روی خمینه های هموار گردیده اند. ساختار غیر خطی موجود در خمینه ها ایجاد روش های نوینی را طلب می نمود که با روش های به کار برده شده برای فضاهای خطی متفاوت هستند [۱, ۲] . مهم ترین ابزاری که در فضاهای باناخ برای مطالعه‌ی توابع غیر هموار به کار برده می شود، مفهوم زیر دیفرانسیل است که تعمیم آن به خمینه های هموار از اهمیت فوق العاده ای برخوردار است. در طول چهل سال اخیر زیر دیفرانسیل های متفاوتی با کاربردهای مختلف معرفی گردیده اند، که یکی از طبیعی ترین آن ها زیر دیفرانسیل فرشه است، پس از آن زیر دیفرانسیل حدی و منفرد معرفی گردیدند [۱۱] و رابطه‌ی زیر دیفرانسیل حدی با گرادیان تعمیم یافته کلارک مشخص گردید [۱۱] که ستون محکم آنالیز غیر هموار است. کلارک، گرادیان تعمیم یافته خود را برای توابع موضعاً لیپ شیتز تعریف نمود، سپس این مفهوم را در مسائل بهینه سازی و کنترل بهینه به کار برد.

این پایان نامه شامل پنج فصل است.

در فصل اول به بیان تعاریف، مفاهیم مقدماتی، بعضی قضایا و نتایج کلیدی می پردازیم.

فصل دوم شامل دو بخش است. ابتدا به تعمیم زیر دیفرانسیل فرشه و زیر دیفرانسیل های حدی و منفرد مرتبط با آن روی خمینه های هموار می پردازیم، سپس مخروط نرمال از زیر خمینه ها و ارتباط آن با تابع فاصله از یک مجموعه داده شده را بررسی خواهیم کرد. بخش دوّم

شامل عناصر حساب دیفرانسیل و انتگرال زیر دیفرانسیل توابع نیم پیوسته پائینی روی خمینه ها از قبیل: قوانین ضرب و جمع، قوانین زنجیره‌ای، زیر گرادیان برای توابع سوپریمم و شرایط لازم برای مسائل بهینه مقید است.

در فصل سوم چند کاربرد از زیر دیفرانسیل و فوق دیفرانسیل از قبیل محک لیپ شیتز و قضیه‌ی تابع ضمنی را بحث خواهیم نمود.

فصل چهارم شامل دو بخش است. ابتدا در بخش اوّل به یکنوائی وایستائی قوی و در بخش دوّم به یکنوائی و ایستائی ضعیف نسبت به حل های معادلات دیفرانسیل روی خمینه ها خواهیم پرداخت.

فصل پنجم نیز شامل دو بخش است. در بخش اوّل وجود و یکتایی جواب های نیم پیوسته پائینی تعمیم یافته معادلات همیلتون ژاکوبی روی خمینه ها برای مسائل مقدار اولیّه

$$V_t(t,x) + h(x, V_x(t,x)) = ۰ \ , \qquad V(\theta, x) = l(x),$$

را مطالعه می کنیم و در بخش دوّم مسئله مقدار مرزی

$$h(x, V_x(x)) = -۱ \ , \qquad V|_S = ۰$$

را بررسی خواهیم نمود.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به ارائه‌ی برخی از تعاریف، قضایا و نتایج شناخته شده درباره فضاهای باناخ و خمینه های ریمانی می پردازیم. همچنین به بررسی برخی خواص توابع تعریف شده روی خمینه های ریمانی (با بعد متناهی) خواهیم پرداخت.

منابع اصلی ما در این بخش [۴, ۶, ۸, ۱۱, ۱۵, ۱۶, ۲۰] هستند.

۱ـ۱ فضاهای توپولوژیکی و باناخ

تعریف ۱.۱ . فرض کنیم X یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد. یک **توپولوژی** روی X ، یک خانواده‌ی τ از زیر مجموعه های X است که شامل $\emptyset$ و X به قسمی است که اجتماع دلخواه و اشتراک باپایان از عناصر τ ، عضوی از این خانواده است. فضای X همراه توپولوژی τ را یک **فضای توپولوژیک** می گوئیم. عناصر τ را بازهای فضا گوئیم و اگر $U \in \tau$ آن گاه مکمل U را مجموعهٔ بسته می گوئیم.

تعریف ۲.۱ . اگر τ یک توپولوژی روی X باشد و $\beta \subset \tau$ آنگاه β را یک پایه [۱] برای τ گوئیم، هرگاه هر عضو τ را بتوانیم به صورت اجتماع عناصر β بنویسیم.

تعریف ۳.۱ . فضای توپولوژیک X را **هاسدورف** [۲] گوئیم هر گاه برای هر x_1, x_2 که $x_1 \neq x_2$ مجموعه های باز مجزای U_1, U_2 وجود داشته باشند به طوری $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$.

تعریف ۴.۱ . فرض کنید X یک مجموعه ی غیر تهی باشد. تابع حقیقی $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ را یک متر روی X گوئیم، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(۱) \quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$(۲) \quad d(x,y) = d(y,x)$$

$$(۳) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

مجموعه ی X با متر d یک **فضای متری** نامیده و آن را با (X,d) نشان می دهیم.

---

[۱] Base

[۲] Hausdorff

فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در X باشد. گوئیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به x است، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

در این صورت می نویسیم $x_n \to x$

دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را کوشی نامیم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow d(x_m, x_n) < m$$

فضای متری (X,d) را کامل (تام) [3] نامیم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X به عضوی مانند $x \in X$ همگرا باشد.

تعریف ۵.۱ . فضای توپولوژیک هاسدورف X را **موضعاً فشرده** [4] گوئیم هرگاه برای هر $x \in X$، همسایگی باز U از x وجود داشته باشد به طوری که بستار آن فشرده باشد.

تعریف ۶.۱ . یک نرم در فضای برداری X تابعی از X ، به $\mathbb{R}$ که با $\|x\| \to x$ نمایش داده می شود و در شرایط زیر صدق می کند:

۱) به ازای هر $x \in X$ ؛ $\|x\| \geq 0$ ؛

۲) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

۳) به ازای هر $x \in X$ و $a \in \mathbb{R}$ ، $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ ؛

۴) به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

[3] *complete*

[4] *Locally compact*

فضای برداری که روی آن نرم تعریف شده باشد، **فضای نرم دار** نام دارد. فضای برداری و نرم دار X که هر دنباله ی کوشی در آن همگرا باشد را **فضای باناخ**، می گوئیم.

تعریف ۷.۱ . فضای نرم دار کاملی که نرم آن توسط یک ضرب داخلی تعریف شده است را **فضای هیلبرت** می گوئیم.

تذکر ۸.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $\mathcal{L}(X,Y)$ نمایش مجموعه ی نگاشت های خطّی پیوسته $u : X \longrightarrow Y$ باشد. $\mathcal{L}(X,Y)$ همراه با نرم

$$\|u\| := \sup\{ \ \|u(x)\|_Y \ \ , \ \ \|x\|_X \leq ۱ \ \}$$

یک فضای باناخ است، که در آن $\| \ \|_X$ و $\| \ \|_Y$ به ترتیب نرمهای روی X و Y هستند.

۱—۲ خمینه ها

۱ – ۲ – ۱ خمینه‌ی C^∞ از بعد متناهی

تعریف ۹.۱ . منظور از یک n **خمینه‌ی توپولوژیکی** عبارت است از یک فضای توپولوژیک M که دارای خواص زیر است:

۱) M هاسدورف است؛

۲) M شمارش پذیر نوع دوم است، یعنی دارای یک پایه ی شمارش پذیر است؛

۳) M موضعاً همانریخت [۵] با فضای $\mathbb{R}^n$ است، یعنی برای هر $p \in M$، یک همسایگی U از p و یک همانریختی $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ وجود دارد. به جفت (U, φ) دستگاه

[۵] *homeomorphism*

مختصی، نقشه یا چارت [۶] گوئیم.

تعریف ۱۰.۱ . دو نقشه ی (U,φ) و (V,ψ) را C^∞ — سازگار گوئیم، هرگاه $U\cap V\neq\emptyset$ ایجاب کند که تابع

$$\psi o\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

دیفئومورفیسم C^∞ باشد، یعنی این تابع یک به یک، پوشا و به عنوان تابعی از یک مجموعه ی باز $\mathbb{R}^n$ به یک مجموعه ی باز $\mathbb{R}^n$ ، C^∞ و دارای وارون C^∞ باشد.

تعریف ۱۱.۱ . یک **ساختار دیفرانسیل پذیر** یا C^∞ روی یک خمینه ی توپولوژیکی M ، یک کلاس $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$ از نقشه هاست به طوری که:

۱) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha=M$ ؛

۲) برای هر $\alpha,\beta\in\Lambda$ ، $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ و (U_β,φ_β) ، C^∞ — سازگار باشند.

۳)کلاس $\mathcal{U}$ نسبت به خاصیت (۲) بیشین باشد، یعنی اگر (U,φ) یک دستگاه مختصی باشد، به طوری که برای هر $\alpha\in\Lambda$ ، $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ با (U,φ) ، C^∞ — سازگار باشد، آنگاه $(U,\varphi)\in\mathcal{U}$.

تعریف ۱۲.۱ . یک خمینه‌ی C^∞ ، یک خمینه ی توپولوژیکی با یک ساختار C^∞ روی آن است.

تعریف ۱۳.۱ . فرض کنید M و N خمینه های C^r $(0\leq r\leq\infty)$ باشند، تابع $f:M\to N$ را از کلاس C^r گوئیم هرگاه، برای هر $x\in M$ ، دستگاه مختصی (U,φ)

[۶] $chart$

شامل x از M و (V,ψ) شامل $f(x)$ از N با شرط $f(U)\subset V$ وجود داشته باشد به قسمی که تابع $\hat{f}:=\psi o f o \varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ از کلاس C^r باشد.

تعریف ۱۴.۱ . فرض کنید M یک خمینه و $p\in M$ باشد. یک خم در p یک نگاشت C^1، $\gamma: I\subseteq\mathbb{R}\mapsto M$ است که در آن I یک فاصله ی باز، $0\in I$ و $\gamma(0)=p$.

تعریف ۱۵.۱ . فرض کنید M یک خمینه‌ی C^∞ و $p\in M$ باشد، آنگاه $C^\infty(p)$ عبارت است از مجموعه ی تمام توابع C^∞ که دامنه ی آن ها، یک زیر مجموعه ی باز شامل p از M است. یعنی، $f\in C^\infty(p)$ است اگر همسایگی باز W حول p از M وجود داشته باشد به طوری که $f:W\to\mathbb{R}$ ، C^∞ باشد.

۱ − ۲ − ۲ کلاف برداری و کلاف مماس

تعریف ۱۶.۱ . فرض کنید M یک خمینه ی C^∞ از بعد n باشد. **فضای مماس** بر M در p که با T_pM نمایش داده می شود، عبارت است از مجموعه نگاشت های $v:C^\infty(p)\to\mathbb{R}$ به طوری که برای هر $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و برای هر $f,g\in C^\infty(p)$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $v(\alpha f+\beta g)=\alpha v(f)+\beta v(g)$

۲) $v(fg)(p)=v(f)g(p)+f(p)v(g)$

قضیه ۱۷.۱ . فرض کنید $F:M\to N$ یک تابع C^∞ بین خمینه ها باشد، در این صورت برای هر $p\in M$ ، نگاشت $F_{*_p}:T_pM\mapsto T_{F(p)}N$ که به صورت زیر تعریف می شود

$$F_{*_p}(v)f=v(foF)$$

یک نگاشت خطّی است، معمولاً این نگاشت خطّی را دیفرانسیل F در p گوئیم.

اثبات . به [۴] رجوع شود. ■

قضیه ۱۸.۱ . اگر $F : M \to N$ یک دیفئومورفیسم باشد، در این صورت $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ یک یکریختی است.

اثبات . به [۴] رجوع شود. ■

تعریف ۱۹.۱ . اگر برای $p \in M$ فضای مماس بر M ، T_pM باشد، آنگاه $\coprod_{p\in M} T_pM$ را کلاف مماس بر M گوئیم و آن را با TM نمایش می دهیم.

قضیه ۲۰.۱ . فرض کنید M یک خمینه و T_pM فضای مماس بر M در p باشد. هم چنین $TM = \coprod_{p\in M} T_pM$ کلاف مماس باشد، آنگاه کلاف مماس TM دارای یک توپولوژی و ساختار C^∞ است که با این توپولوژی و ساختار C^∞ ، TM یک $2n$ خمینه ی هموار و نگاشت تصویری [۷] $\pi : TM \to M$ با ضابطه‌ی $\pi(m, T_m(M)) = m$ یک تابع C^∞ است. **اثبات** . به [۱۶] رجوع شود. ■

تعریف ۲۱.۱ . یک برش C^∞ از کلاف TM را یک میدان برداری گوئیم، این بدان معنی است که تابع C^∞ ، $X : M \to TM$ وجود دارد به طوری که $\pi o X = 1_M$.

مجموعه ی همه ی میدان های برداری روی M به وسیله‌ی $V^r(M)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۲۲.۱ . اگر (U, ψ) دستگاه مختصی $p \in M$ و $(x^1, ..., x^N)$ مختصات موضعی متناظر روی (U, ψ) باشد، آنگاه $n = 1, ..., N$, $(\frac{\partial}{\partial x^n})_p$ که به وسیله‌ی

$$(\frac{\partial}{\partial x^n})_p f = \frac{\partial f o \psi^{-1}}{\partial x^n}(\psi(p))$$

[۷] projective

تعریف می شود، یک پایه ی $T_p(M)$ است.

تعریف هم ارز دیگر از میدان برداری هموار روی M عبارت است از یک تابع $X : M \to TM$ به قسمی که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $p \in M$ ، $X_p \in T_pM$.

۲)اگر (U, φ) یک دستگاه مختصی حول p باشد و $X_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) E_{ip}$ ،آنگاه توابع $\alpha_i(p)$ C^∞ باشند.

تعریف ۲۳.۱ . فضای دوگان $T_p(M)$ فضای هم مماس [۸] M در p است، و به صورت $T_p{}^*(M)$ نمایش داده می شود. کلاف هم مماس [۹] M عبارت است از

$$T^*(M) := \cup_{p \in M}(p, T_p{}^*(M)).$$

تعریف ۲۴.۱ . فرض کنید f یک تابع C^∞ در p باشد، $df(p)$ یک عنصر $T_p{}^*(M)$ است، و برای هر $v \in T_p(M)$ به صورت $df(p)(v) = v(f)$ تعریف می شود.

قضیه ۲۵.۱ . فرض کنید M و N دو خمینه ی C^∞ باشند. نگاشت $F : M \to N$ را در نظر بگیرید. برای هر تابع $f \in C^\infty(N)$ ، تابع F^*f روی M به صورت $F^*f = foF$ تعریف می شود. نگاشت $F : M \to N$ در $p \in M$ ، C^r است، اگر F^*f برای هر $f \in C^\infty(N)$ ، C^r باشد.

اثبات . به [۴] رجوع شود. ■

اکنون فرض کنید $F : M \mapsto N$ یک نگاشت C^∞ و $p \in M$ یک عضو ثابت و دیفرانسیل $F_{*p} : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ F در p باشد، نگاشت دوگان F_{*p} که با نماد $F_p{}^*$

[۸] cotangent space

[۹] cotangent bundle

نمایش داده می شود، از $T^*{}_{F(p)}(N)$ به $T_p{}^*(M)$ تعریف می شود، و دارای خاصیت زیر است

$$F^*{}_p df(F(p)) = d(F^*f)(p).$$

اثبات . به [۴] رجوع شود. ■

۱ – ۲ – ۳ خمینه ی ریمانی

فرض کنید V فضای برداری باشد، $g : V \times V \to \mathbb{R}$ را یک فرم دو خطی گویند هر گاه نسبت به هر دو متغیر خطی باشد. یعنی:

$$g(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲, w) = \alpha_۱ g(v_۱, w) + \alpha_۲ g(v_۲, w),$$

$$g(v, \beta_۱ w_۱ + \beta_۲ w_۲) = \beta_۱ g(v, w_۱) + \beta_۲ g(v, w_۲).$$

یک فرم دو خطی را متقارن گوئیم هرگاه:

$$g(v, w) = g(w, v).$$

یک فرم دو خطی متقارن را معین مثبت گوئیم هرگاه:

$$g(v, v) \geq ۰,$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می باشد که $v = ۰$. یعنی

$$g(v, v) = ۰ \Leftrightarrow v = ۰.$$

اگر g یک فرم دو خطی متقارن معین مثبت روی V باشد، آنگاه تعریف می کنیم:

$$\|v\| := (g(v, v))^{۱/۲}$$