دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل عددی معادلات انتگرال ولترای غیر خطی با استفاده از توابع والش

استاد راهنما

دکتر صداقت شهراد

استاد مشاور

دکتر فرامرز طلعتی

پژوهشگر

سمیه فخر فاطمی

۱۳۸۹

نام خانوادگی: فخر فاطمی نام: سمیه

عنوان پایان‌نامه: حل عددی معادلات انتگرال ولترای غیر خطی با استفاده از توابع والش

استاد راهنما: دکتر صداقت شهمراد استاد مشاور: دکتر فرامرز طلعتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۹ تعداد صفحه:

کلمات کلیدی: معادله انتگرال ولترا، توابع والش، سری والش-فوریه

چکیده: در این پایان‌نامه یک روش برای حل عددی معادلات انتگرال غیر خطی ولترا با استفاده از موجک‌های ناپیوسته معروف به توابع والش پیشنهاد و گسترش داده شده است، شرایط کافی برای همگرایی روش بدست آمده و یک تخمین قیاسی برای خطا به‌دست آورده شده است. دو مثال خطی و غیر خطی برای نمایش دقت ارائه گردیده است، همچنین نشان داده شده است که مرتبه روش موضعا از مرتبه دو می‌باشد.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه که بر اساس مقاله‌های [۹، ۱۵، ۱۶] تنظیم شده است، به حل معادلات انتگرال ولترای غیرخطی می‌پردازد که شامل چهار فصل است.

فصل اول شامل مفاهیم و تعاریف مقدماتی مربوط به معادلات انتگرال می‌باشد.

در فصل دوم، توابع والش معرفی گردیده و قضایای مربوط به همگرایی، همگرایی ظریف و همگرایی ظریف موثر سری والش-فوریه بیان شده است. همچنین خصوصیات و مزیت‌های این توابع آورده شده است.

در فصل سوم، روش حل معادلات انتگرال ولترای غیر خطی با استفاده از سری والش به همراه چند مثال عددی بیان شده است.

فصل چهارم شامل کار جدیدی می‌باشد که در آن به حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری و معادله انتگرال آبل با استفاده از سری والش پرداخته شده است. برای مشاهده کارایی روش، روش مذکور روی چند مثال پیاده گردیده است. همچنین کاربرد توابع والش در علوم دیگر در این فصل بیان شده‌اند.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

۱.۱ معرفی معادلات انتگرال

تعریف. *به معادله* $f(x, y(x), y^{'}(x), ..., y^{(n)}) = 0$ *یک معادله دیفرانسیل از مرتبه* n *گفته می‌شود.*

تعریف. *به معادله‌ای که تابع مجهول در زیر انتگرال ظاهر می‌شود معادله انتگرال گفته می‌شود*

$$F(x, y(x), \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x, t, y(t))dt) = 0$$

معادلات انتگرال به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می‌شوند.

خطی: شکل عمومی معادلات انتگرال خطی عبارت است از

$$h(x)y(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)y(t)dt = f(x)$$

که در آن $k(x, t)$ هسته معادله است و$\alpha(x)$ و$\beta(x)$ حدود انتگرال‌اند که می‌توانند ثابت یا متغیر باشند و$y(x)$ مجهول معادله است.

غیر خطی: معادلات انتگرال غیرخطی اغلب به شکل‌های زیر ظاهر می‌شوند

$$y(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t, y(t))dt = f(x)$$
$$y(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)F(y(t))dt = f(x)$$

که مانند حالت خطی $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال و $k(x,t)$، $k(x,t,y(t))$ هسته انتگرال می‌باشند.

اگر داشته باشیم $h(x) \equiv 0$ آن‌گاه

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)y(t)dt = f(x)$$

و آن‌را یک معادله انتگرال خطی نوع اول می‌گویند. و اگر $h(x) \not\equiv 0$ داریم

$$y(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{k(x,t)}{h(x)} y(t)dt = \frac{f(x)}{h(x)} = g(x)$$
$$y(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} H(x,t)y(t)dt = g(x)$$

در این‌صورت معادله را معادله انتگرال خطی نوع دوم می‌گویند.

معادلات خطی نوع اول و دوم به دو دسته مهم تقسیم می‌شوند

۱. معادلات خطی ولترا که در آن حداقل یکی از حدود انتگرال یعنی $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ متغیر است.

۲. معادلات خطی فردهلم که در این معادلات هر دو حدود یعنی $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ ثابت هستند.

مثال‌هایی از انواع معادلات انتگرال

ولترای نوع دوم خطی $$y(x) + \int_0^x e^{x-t} y(t)dt = x$$

ولترای نوع اول خطی $$\int_0^x e^{x-t} y(t)dt = x$$

فردهلم نوع دوم خطی $$y(x) + \int_0^1 sin(x+t)y(t)dt = cos(t)$$

فردهلم نوع اول خطی $$\int_0^1 e^{x-t} y(t)dt = x$$

هامرشتاین، غیر خطی نوع دوم $$y(x) + \int_0^\pi sin(x+t)y^2(t)dt = x$$

اوریسون، غیر خطی نوع دوم $$y(x) + \int_0^\pi e^{x+ty(t)}dt = x$$

معادلات انتگرال-دیفرانسیل

معادلاتی هستند که در آنها مشتق و انتگرال تابع مجهول به‌طور هم‌زمان در معادله ظاهر می‌شوند

$$F(x, Dy(x), \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t,y(t))dt) = 0$$

که در آن D در حالت کلی به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$D = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

مثال:

انتگرال دیفرانسیل فردهلم خطی $\qquad y^{''}(x) + xy^{'}(x) - \int_0^1 y(t)dt = x^2 + 1$

انتگرال دیفرانسیل ولترای نوع دوم $\qquad y^{''}(x) + xy^{'}(x) - \int_0^x e^{x-t} y(t)dt = x^2 + 1$

مشتق ممکن است در زیر انتگرال ظاهر شود

$$y(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)F(y, Dy(t))dt = g(x)$$

به عنوان مثال معادله

$$y(x) + \int_0^2 sin\ (xt)(y^{'}(t) + y(t))dt = cos\ x$$

یک معادله انتگرال-دیفرانسیل محسوب می‌شود.

معادلات انتگرال منفرد

اگر در معادله انتگرال حداقل یکی از حدود انتگرال نامتناهی یا هسته معادله در نقطه یا نقاطی از بازه انتگرال‌گیری نامتناهی گردد معادله انتگرال را از نوع منفرد می‌گویند.

فرض کنید f بر $[0, \infty)$ تعریف شده باشد، انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

را در نظر بگیرید که در آن s یک عدد حقیقی است. فرض کنید که این انتگرال به‌ازای sهای متعلق به یک مجموعه مانند S همگرا باشد. در این‌صورت تابع

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

را تبدیل لاپلاس f می‌گویند، حال وقتی F در دست باشد و بخواهیم f را بدست آوریم تبدیل معکوس می‌گیریم، به عبارت دیگر یک معادله انتگرال منفرد را حل می‌کنیم.

تبدیل فوریه $$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} f(x) dx$$

در تبدیل فوریه نیز مانند تبدیل لاپلاس، اگر $F(\alpha)$ را داشته باشیم و بخواهیم $f(x)$ را بدست آوریم، یک معادله انتگرال منفرد را حل می‌کنیم.

معادله انتگرال آبل یکی از مهم‌ترین معادلات انتگرال خطی نوع اول می‌باشد که به‌صورت ذیل تعریف می‌شود

$$\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt = g(x), \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

حالت کلی معادله انتگرال وینر-هوف به‌صورت

$$\lambda x(t) - \int_0^\infty k(t-s) x(s) ds = y(t), \quad 0 \leq t < \infty \qquad (۲.۱)$$

می‌باشد که در گذشته در ارتباط با مسائل انتقال حرارت تابشی مورد استفاده قرار می‌گرفته، ولی امروزه از آن‌ها جهت بدست آوردن جواب‌های معادلات انتگرال مرزی استفاده می‌شود.

ارتباط بین معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال

معادله دیفرانسیل از نوع مسئله مقدار اولیه قابل تبدیل به معادله انتگرال از نوع ولترا است

$$\begin{cases} Dy(x) = f(x), \quad 0 \leq x \\ y^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad D = \sum_{i=0}^n p_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \ i = 0, 1, ..., n-1 \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل از نوع مسئله مقدار مرزی قابل تبدیل به معادله انتگرال از نوع فردهلم خواهد بود

$$\begin{cases} Dy(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b \\ \sum_{j=0}^{n-1}[c_{ij}y^{(i)}(a) + d_{ij}y^{(i)}(b)] = \alpha_i, \quad i = 0, 1, ..., n-1 \end{cases}$$

برای تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله انتگرال نیاز به لم ذیل داریم.

لم ۱.۱.۱.

$$\left(\int_a^x\right)^n f(t)dt = \int_0^x \int_0^{x_1} ... \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n...dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

اثبات به استقراء: برای $n = 1$ بدیهی است. فرض کنیم حکم برای n برقرار باشد. اکنون آن‌را برای $n+1$ بررسی می‌کنیم

$$\text{طرف چپ} = \int_0^x \int_0^{x_1} ... \int_0^{x_n} f(x_{n+1})dx_{n+1}...dx_1$$

فرض کنیم $G(x_n) = \int_0^{x_n} f(x_{n+1})dx_{n+1}$ در این‌صورت عبارت بالا به‌صورت ذیل درمی‌آید

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{x_1} \quad ... \quad & \int_0^{x_{n-1}} G(x_n)dx_n...dx_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}G(t)dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\int_0^t f(y)dydt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \int_0^t (x-t)^{n-1}f(y)dydt \end{aligned}$$

با تعویض ناحیه انتگراگیری خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{x_1} \quad ... \quad & \int_0^{x_n} f(x_{n+1})dx_{n+1}...dx_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \int_y^x (x-t)^{n-1}f(y)dtdy \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x -(x-t)^n \Big|_y^x f(y)dy \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n f(y)dy \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)dt. \end{aligned}$$

مثال. معادله دیفرانسیل ذیل را به یک معادله انتگرال تبدیل نمایید

$$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) + y(x) = x \\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

حل. فرض می‌کنیم $g(x) = y''(x)$ با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه خواهیم داشت

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x g(t)dt$$

فرض کنیم $y'(0) = \alpha$ آن‌گاه خواهیم داشت

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x g(t)dt$$

$$y'(x) = \alpha + \int_0^x g(t)dt$$

با انتگرالگیری مجدد و استفاده از لم ۱.۱.۱ داریم

$$y(x) - y(0) = \alpha x + \int_0^x (x-t)g(t)dt$$
$$y(x) = \alpha x + \int_0^x (x-t)g(t)dt$$

حال برای تعیین α از شرط $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ استفاده می‌کنیم

$$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \to \alpha(\frac{\pi}{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - t)g(t)dt = 0$$
$$\alpha = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - t)g(t)dt$$
$$y'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - t)g(t)dt + \int_0^x g(t)dt$$
$$g(x) + \frac{8x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - t)g(t)dt - 4\int_0^x (x-t)g(t)dt = x$$

می‌توان نوشت

$$g(x) + \frac{8x}{\pi}\int_0^{x} (\frac{\pi}{2} - t)g(t)dt + \frac{8x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - t)g(t)dt - 4\int_0^x (x-t)g(t)dt = x$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت

$$g(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(x,t)g(t)dt = x$$

که در آن

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{4t(\pi-2x)}{\pi}, & 0 \le t \le x \\ \frac{4x(\pi-2t)}{\pi}, & x \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

۲.۱ حل معادلات انتگرال با هسته تباهیده

تعریف. *$k(t,s)$ را یک هسته تباهیده می‌نامیم هرگاه بتوان آنرا به صورت*

$$k(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\beta_i(s) \tag{۳.۱}$$

که α_iها و β_iها متعلق به $c[a,b]$ هستند.

معادله انتگرال

$$\lambda x(t) - \int_D k(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in D \tag{۴.۱}$$

با $\lambda \neq 0$ و $D \subset \mathbb{R}^m$ که $m \geq 1$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم D مجموعه بسته و کران‌دار باشد. فضای توابع را معمولاً $X = C(D)$ با نرم $\|.\|_\infty$ و گاهی $X = L^2(D)$ با نرم مربوطه $\|.\|_2$ در نظر می‌گیریم. عملگر انتگرال K وابسته به معادله (۴.۱) را از X به توی X در نظر می‌گیریم.

فرض کنید

$$Kx(t) = \int_D k(t,s)x(s)ds$$

در این صورت معادله به شکل عملگری ذیل نوشته می‌شود

$$(\lambda - K)x = y \tag{۵.۱}$$

تابع هسته $k(t,s)$ با دنباله‌ای از هسته‌های تباهیده

$$k_n(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n}(t)\beta_{i,n}(s) \tag{۶.۱}$$

تقریب می‌شود به‌طوری‌که عملگر انتگرال K_n وابسته به هسته‌ی $k_n(t,s)$ در رابطه زیر صدق کند

$$\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = 0 \tag{۷.۱}$$

یعنی K_n به K میل کند.

فرض کنید $k_n(t,s)$ به‌صورت (۶.۱) باشد، آن‌گاه معادله انتگرال $(\lambda - K_n)x_n = y$ به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\lambda x_n(t) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) \int_D \beta_j(s)x_n(s)ds = y(t),\ t \in D \tag{۸.۱}$$

آن‌گاه با قرار دادن

$$c_j = \int_D \beta_j(s)x_n(s)ds$$

جواب x_n از رابطه ذیل به‌دست می‌آید

$$x_n(t) = \frac{1}{\lambda}\left[y(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j(t)\right] \tag{۹.۱}$$

برای تعیین $\{c_j\}$ طرفین (۸.۱) را در $\beta_i(t)$ ضرب و روی D انتگرال می‌گیریم. بنابراین دستگاه معادلات ذیل به‌دست می‌آید

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_j, \beta_i) = (y, \beta_i), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{۱۰.۱}$$

که در آن

$$(\alpha_j, \beta_i) = \int_D \beta_i(t)\alpha_j(t)dt, \quad (y, \beta_i) = \int_D \beta_i(t)y(t)dt \tag{۱۱.۱}$$

پس از حل دستگاه معادلات (۱۰.۱) جواب معادله انتگرال از رابطه‌ی (۹.۱) به‌دست می‌آید. قضیه ذیل شرط لازم جهت نامنفرد بودن دستگاه را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید $\lambda - K_n : X \to X$ یک‌به‌یک و پوشا باشد، $\lambda \neq 0$ و $X = C(D)$ یا $X = L^2(D)$ و فرض کنید K_n دارای هسته تباهیده (۶.۱) باشد. دراین‌صورت دستگاه معادلات (۱۰.۱) نامنفرد است.

اثبات:(ر.ک.[۲])

۳.۱ محاسبه مقدار میانگین تابع

هرگاه تابع $f(x)$ در بازه $[a,\ b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه مقدار میانگین تابع $f(x)$ در آن بازه به‌صورت ذیل محاسبه می‌شود

$$\overline{f}(x) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

همچنین مقدار میانگین تابع پیوسته دو متغیره $f(x,y)$ در ناحیه بسته و کراندار $D \subset \mathbb{R}^2$ به‌کمک رابطه ذیل به‌دست می‌آید

$$\overline{f}(x,y) = \frac{\iint_D f(x,y)dA}{S(D)}$$

که در آن $S(D)$ مساحت ناحیه D می‌باشد.

۴.۱ روش تصحیح باقیمانده

فرض کنید دستگاه $Ax = b$ را حل نموده و جواب تقریبی $x^{(0)}$ را به‌دست آورده‌ایم. اگر x_t جواب واقعی دستگاه باشد، در این‌صورت بردار باقیمانده را به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = Ax_t - Ax^{(0)} = A(x_t - x^{(0)}) \qquad (۱۲.۱)$$

بنابراین در صورت معکوس‌پذیر بودن A نتیجه می‌شود

$$x_t - x^{(0)} = A^{-1}r^{(0)}$$

حال بردار خطا را به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم

$$e^{(0)} = x_t - x^{(0)} \quad (۱۳.۱)$$

در این‌صورت

$$x_t = x^{(0)} + e^{(0)} \quad (۱۴.۱)$$

و از دو رابطه (۱۲.۱) و (۱۳.۱) نتیجه می‌گیریم

$$Ae^{(0)} = r^{(0)}$$

و بدین‌صورت $e^{(0)}$ محاسبه می‌شود و از آن‌جایی‌که محاسبه آن با خطا توام است، به‌جای جواب واقعی x_t یک جواب تقریبی مانند $x^{(1)}$ بدست می‌آید. لذا به‌کمک رابطه (۱۴.۱) می‌توان نوشت

$$x^{(1)} = x^{(0)} + e^{(0)}$$

$x^{(1)}$ تقریبی از x_t است که از $x^{(0)}$ دقیق‌تر است و به همین ترتیب داریم

$$x^{(2)} = x^{(1)} + e^{(1)}$$

مقدار $e^{(1)}$ از رابطه

$$Ae^{(1)} = r^{(1)} = Ax_t - Ax^{(1)} = b - Ax^{(1)}$$

محاسبه می‌شود. این عملیات معمولاً تا وقتی ادامه می‌یابد که $\|e\| < \epsilon$ که در آن ϵ یک دقت از پیش تعیین شده است.

۵.۱ روش پیکارد

پیکارد روشی برای پیدا کردن نقطه ثابت تابع $g(x)$ است. پیدا کردن این نقطه‌ی ثابت می‌تواند همراه با حل مسئله ODE و یا معادله انتگرال باشد

$$y^{'} = F(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

که معادل با معادله انتگرال

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))ds$$

می‌باشد که در آن‌ها F یك تابع پیوسته می‌باشد. برای حل یك معادله انتگرال با روش پیکارد به‌صورت ذیل عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&p_1(t) = y_0 \\
&p_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, p_1(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y_0)ds \\
&p_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, p_2(s))ds \\
&\vdots \\
&p_{k+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, p_k(s))ds
\end{aligned}$$

که $p_k(t)$ تقریبی از جواب معادله انتگرال است.قضیه زیر همگرایی روش پیکارد را تضمین می‌کند.

قضیه ۱.۵.۱. اگر X فضای متری کامل و $F : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباضی باشد، یعنی عدد حقیقی نامنفی $A < 1$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $y_1, y_2 \in X$ داریم

$$|F(y_1) - F(y_2)| \leq A|y_1 - y_2|$$

آنگاه نگاشت F فقط و فقط یک نقطه‌ی ثابت در X دارد.

مثال. *روش پیکارد را برای معادله*

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

یا به‌طور معادل برای معادله انتگرال

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)ds$$

با جواب واقعی $y(t) = e^t$ به‌کار می‌بریم. داریم

$$p_1(t) = 1$$

$$p_2(t) = 1 + \int_0^t p_1(s)ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$$

$$p_2(t) = 1 + \int_0^t p_2(s)ds = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$p_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + ... + \frac{t^k}{k!}$$

که همان بسط تیلور تابع نمایی می‌باشد.

۶.۱ روش اویلر پیشرو

اویلر پیشرو روشی برای حل معادله دیفرانسیل معمولی با رابطه

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

است که در آن h طول گام، $x_{n+1} = x_n + h$ و $y_n = y(x_n)$ می‌باشد. خطای هر گام از روش اویلر $O(h^2)$ می‌باشد، زیرا

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y_{n+1} + h\frac{dy}{dx}\big|_{x_n} + O(h^2) \\ &= y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2) \end{aligned}$$

می‌توان برای جزئیات بیشتر به [۱] مراجعه کرد.

فصل ۲
سری والش

۱.۲ مقدمه

اخیرا روش‌های تابع والش برای حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی و غیر خطی بسیار گسترش یافته است. در حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل با استفاده از دسته موجک‌های ناپیوسته و مشهور به‌نام توابع والش مزیت‌های زیادی وجود دارد که اساسی‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱- توابع والش دارای ساختار بسیار ساده هستند.

۲- هر تابع $f \in L^2[0,\, 1)$ می‌تواند به‌صورت یك سری از توابع والش بسط داده شود.

۳- به‌دست آوردن تبدیلات فوریه آن‌ها بسیار راحت‌تر از به‌دست آوردن تبدیلات فوریه سایر انواع توابع نظیر توابع مثلثاتی است.

۴- تکنیك‌های ساده و آسان‌تری وجود دارند که باعث افزایش مرتبه همگرایی سری‌های والش می‌شوند(ر.ک. [۶]).

۲.۲ توابع رادماچر

توابع رادماچر [۱] به‌صورت

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\ \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}\ 1) \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x)$$

$$r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

تعریف می‌شوند (ر.ک. [۶]) یا می‌توان آن‌را به‌صورت

$$r_k(x) = sign \sin(\pi 2^k x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k})\ \text{زوج}\ i \\ -1, & x \in (\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k})\ \text{فرد}\ i \end{cases}$$

تعریف نمود(ر.ک. [۷]) . خصوصیات اساسی $r_k(x)$ها:

۱- دارای دوره تناوب $\frac{1}{2^k}$ هستند.

۲- مقادیر ثابت ۱ و ۱- می‌گیرند.

۳- در بازه‌هایی به‌صورت $[\frac{m}{2^k},\ \frac{m+1}{2^k})$ تعریف می‌شوند که در آن $m = 0, ..., 2^k - 1$.

۴- در هر یك از این بازه‌ها دارای یك مقدار ثابت هستند و

$$\int_{\frac{m}{2^k}}^{\frac{m+1}{2^k}} r_k(x)dx = 0, \quad m, k \geq 0 \tag{۱.۲}$$

زیرا دوره تناوب $r_k(x)$، $\frac{1}{2^k}$ است و در هر دوره یکبار با مقدار ۱ و یکبار با مقدار ۱- برابر است که همدیگر را حذف می‌کنند. مثلا به‌ازای $m = 0$ داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2^k}} r_k(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2^k}} r_0(2^k x)dx = \frac{1}{2^k}\int_0^1 r_0(t)dt \\ &= \frac{1}{2^k}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} r_0(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 r_0(t)dt\right) = \frac{1}{2^k}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} r_0(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} -r_0(t)dt\right) = 0 \end{aligned}$$

[۱] Rademacher

نکته. r_1 *در بازه* $[0,\ \frac{1}{4})$ *معادل با* r_0 *در بازه* $[0,\ \frac{1}{2})$ *است، چون* $r_1(x) = r_0(2x)$ *مثلا به‌ازای* $x = \frac{1}{4}$ *داریم* $r_1(\frac{1}{2}) = r_0(\frac{1}{4})$.

۵- $r_{k+m}(x) = r_k(2^m x)$ این رابطه به آسانی از تعریف تابع رادماچر به‌دست می‌آید. زیرا

$$r_k(x) = r_0(2^k x), \quad r_{k+m}(x) = r_0(2^{k+m}x) = r_0(2^k 2^m x) = r_k(2^m x)$$

در نتیجه

$$r_{k+m}(x) = r_k(2^m x).$$

۳.۲ تابع والش

در مقاله‌ای که والش برای اولین بار منتشر کرد، مجموعه‌ی Xی تعریف کرد که در آن دو نوع تابع معرفی شده است.(ر.ک.[۱۶])

$$f_0(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0 & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \qquad f_1^{(2)}(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & 0 \le x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f_k^{(i)} = \begin{cases} 1 & \frac{i-1}{2^k} < x < \frac{i}{2^k} \\ 0 & 0 \le x < \frac{i-1}{2^k} < \frac{i-1}{2^k} \text{ یا } \frac{i}{2^k} < x \le 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, ..., 2^k \\ k = 1, 2, ..., \infty \end{matrix}$$

و

$$X_0(x) = 1 \quad 0 \le x \le 1, \qquad X_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

$$\begin{array}{rclrcll} X_2^{(1)}(x) & = & \sqrt{2} & X_2^{(2)} & = & 0 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ & = & -\sqrt{2} & & = & 0 & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ & = & 0 & & = & \sqrt{2} & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \\ & = & 0 & & = & -\sqrt{2} & \frac{3}{4} < x \le 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} X_k^{(i)} & = & \sqrt{2^{k-1}} & \frac{i-1}{2^{k-1}} < x < \frac{2i-1}{2^k} \qquad i = 1, 2, ..., 2^{k-1} \\ & = & -\sqrt{2^{k-1}} & \frac{2i-1}{2^k} < x < \frac{i}{2^{k-1}} \qquad k = 1, 2, 3, ... \\ & = & 0 & 0 < x < \frac{i-1}{2^{k-1}} \text{ یا } \frac{i}{2^{k-1}} < x < 1 \end{array}$$