بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد آمار بیمه

گروه آمار

بیمه‌ی اتکایی ادعاهای بزرگ

توسط

مهرناز میرآخورلی

استاد راهنما

دکتر محمد ذکایی

استاد مشاور

دکتر محمدرضا فرید روحانی

۱۳۸۸

سپاس خداوند متعال را که فرصت بهره مندی از الطاف بی پایانش را به من داد. باشد که با استفاده از نعماتش قدردان و سپاسگذار او باشم.

از استاد گرانقدر و فرهیخته جناب آقای دکتر ذکایی که به عنوان استاد راهنما، با نکته سنجی‌ها و راهنمایی‌های ارزنده‌ی خود مرا در انجام این تحقیق یاری رساندند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از رهنمودها و یاری استاد مشاور خود، جناب آقای دکتر فرید روحانی سپاسگذار باشم.

از اساتید داور آقای دکتر وحیدی اصل و آقای دکتر پاینده که زحمت مطالعه و داوری رساله را به عهده گرفتند نیز کمال تشکر را دارم.

مهرناز میرآخورلی- فروردین ۱۳۸۸

تقدیم به :

پدر و مادرم که همواره مشوقم بوده‌اند.

بیمه‌ی اتکایی ادعاهای بزرگ

چکیده

شرکت‌های بیمه در طول دوره‌ی بیمه با ادعاهای متفاوتی روبرو هستند، اما پدیدار شدن ادعاهای بزرگ و یا وقوع ادعاهای غیر معمول به تعداد فراوان برای یک شرکت نگران کننده است. از آن‌جایی که مهم‌ترین هدف قراردادهای بیمه‌ی اتکایی پوشش ادعاهای بزرگ است، با روی آوردن به بیمه‌ی اتکایی به دنبال کاهش احتمال زیان‌هایی است که امکان به مخاطره انداختن موقعیت شرکت رادارد.

در این پایان‌نامه دو کمیت معروف به نام‌های ECOMOR و LCR در بیمه‌ی اتکایی معرفی می‌شوند و با تکیه برتوزیع‌های دم سنگین و با استفاده از نظریه‌ی مقدارکرانگین، رفتار مجانبی این کمیت‌ها مورد بررسی قرارگرفته و کران‌هایی را برای آن‌ها به‌دست می‌آوریم. در پایان با استفاده از شبیه‌سازی، مقادیر دم توزیع این کمیت‌ها باحالت دقیق مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: رفتار مجانبی، نظریه‌ی مقدار کرانگین، توزیع دم سنگین، قرارداد بیمه‌ی اتکایی، ECOMOR، LCR.

فهرست مطالب

پیشگفتار

پیشگامان بیمه پس ازآن‌که با خسارت‌های زیادی مواجه شدند به این نتیجه رسیدند که به تنهایی نمی‌توانندخود پاسخگوی همه‌ی خسارت‌های وارده باشند. سرمایه و اندوخته‌های شرکت‌های بیمه اگرچه مبالغ قابل توجهی است اما درمقایسه با تعهدات بسیار سنگینی که قبول می‌کنند بسیار اندک و ناچیز است. بنابراین در مقابل حوادث و خطرات بزرگ فوق العاده آسیب پذیرند. از این رو به دنبال چاره‌ای برای تقسیم و توزیع خطرات و خسارت‌های خود برآمدند و تصمیم گرفتند با خرد کردن بیمه، بیمه نامه‌ها را از طریق تقسیم زیان بین شرکت‌های بیمه، تعهد بیمه نامه‌های سنگین را توزیع و خطرها را به سایر شرکت‌های بیمه منتقل نمایند. این امر تا اندازه‌ای تعهد شرکت‌های بیمه را کاهش داد، اما این تمهیدات کافی نبود و در نتیجه بیمه‌ی اتکایی در دنیا پدیدار شد.

بیمه‌ی اتکایی به مفهوم توزیع جهانی مخاطره است و شرکت بیمه را قادر می‌سازد تا پاسخگوی خسارت‌هایی باشد که در طول زمان اعتبار قراردادها به وقوع می‌پیوندند. از دیدگاه آماری هدف اصلی بیمه‌ی اتکایی کاهش زیان و به حداقل رساندن خسارت برای بیمه‌گر است. بیمه‌گران زیان را به منظور کاهش حجم کل زیان‌هایی که تعهد کرده‌اند واگذار می‌کنند. وظیفه‌ی بیمه‌گر اتکایی حمایت از شرکت‌های بیمه‌ی

واگذارنده در مقابل خسارت‌های سنگین و توزیع جهانی مخاطره است. بیمه‌گر اولیه از بیمه‌گر اتکایی خود انتظار دارد که

- قادر به اداره‌ی خطرات بزرگ باشد تا توانایی شرکت در این زمینه افزایش یابد.
- از مؤسسه‌ی واگذارنده درمقابل خسارت‌های کلی یا خسارت‌های سنگین که افزون بر توان مالی شرکت است حمایت کند.
- توزیع جغرافیایی زیان‌های بیمه شده در مقابل خطرات فاجعه آمیز به مطلوب‌ترین حالت انجام گیرد.

درحال حاضر هیچ شرکت بیمه‌ای درجهان وجود ندارد که قبل از اقدام به صدور بیمه‌نامه در یک رشته، شرایط واگذاری اتکایی آن را پیش بینی نکرده باشد.

در ایران، طبق قانون بیمه‌گری که سال‌ها پیش تدوین شد شرکت‌های بیمه برای توزیع زیان و به نوعی نظارت بیمه‌ی مرکزی بر قراردادهای بیمه‌ای باید ۲۵ درصد از حق بیمه‌های اموال و ۵۰ درصد از حق بیمه‌های عمر را به عنوان اتکایی اجباری نزد بیمه‌ی مرکزی بسپارند که این سیاست در سال‌های گذشته که ایران فاقد شرکت بیمه‌ی اتکایی بود و نظارت به شکل سنتی صورت می‌گرفت تأثیرات مثبتی داشته، اما امروز به خاطر تقویت نظارت بیمه‌ی مرکزی و حرکت به سوی نظارت‌های مالی به جای نظارت تعرفه در کشور شاید بهتر باشد سهم اتکایی اجباری بیمه‌ی مرکزی به طور تدریجی کاهش یابد.

سرمایه‌های ملی مانند پالایشگاه‌ها، صنایع پتروشیمی، نفت کش‌ها و زیان‌های دریایی تا سال‌ها پیش پوشش کامل بیمه‌ای نداشتند و کانون‌های خطر در این نقاط حساس به درستی تشخیص داده نشده بود. در سال‌های گذشته صنعت بیمه‌ی ایران توانسته است پالایشگاه‌ها، صنایع پتروشیمی و نیروگاه‌های برق را با کنسرسیومی متشکل از شرکت‌های بیمه‌ی داخلی تحت پوشش درآورد و مازاد آن‌را به عنوان اتکایی به شرکت‌های بیمه‌ی اتکایی خارجی واگذار کند.

از آنچه که مطرح شد می‌توان نتیجه گرفت که مهم‌ترین هدف بیمه‌ی اتکایی پوشش ادعاهای بزرگ است. قراردادهای کلاسیک بیمه‌ی اتکایی مانند قراردادهای نسبتی، زیان بس، مازاد زیان برحسب ادعاهای

بزرگ بیان نمی‌شوند و برحسب نوع قرارداد به نوعی کلیه‌ی ادعاها را تحت پوشش قرار می‌دهند.

ریاضیات پیچیده‌ی قراردادهای بیمه‌ی اتکایی برای پوشش ادعاهای بزرگ موجب شده است که آمار بیمه‌دانان کمتر به این نوع از قراردادها بپردازند. برای اولین بار در سال ۱۹۵۰ توسط آمار بیمه‌دان فرانسوی تیت، برای پوشش ادعاهای بزرگ قراردادی به نام ECOMOR[1] معرفی شد. با فرض اینکه ادعاها در یک داشتمان به صورت صعودی مرتب شوند، این قرارداد r بزرگترین ادعای بالایی را به اندازه‌ی تفاضلشان از r-1 امین ادعای بزرگ بالایی پوشش می‌دهد. قرارداد دیگری که برای پوشش ادعاهای بزرگ مطرح است قرارداد LCR[2] است که در سال ۱۹۶۴ توسط اَمِتِر معرفی شد. این قرارداد r بزرگترین ادعا را در یک داشتمان پوشش می‌دهد. در این پایان نامه سعی براین است که با تکیه بر نظریه‌ی مقدار کرانگین بعضی از خواص مجانبی و توزیع مجانبی این دو قرارداد را به‌دست آوریم.

هلبیگ (۱۹۵۳)، یکی از اولین آمار بیمه‌دانانی است که توانسته است بعضی ازنقاط ضعف و قوت قرارداد ECOMOR را در مجموعه‌ی پواسون- پارتو بیان کند. اَمِتِر(۱۹۶۴)، درقالب محاسبه حق بیمه تحت فرض پواسون- پارتو، تقریبی را برای حق بیمه‌ی خالص به‌دست آورد. کرمر (۱۹۸۲و۱۹۸۳)، با فرض اینکه توزیع اندازه‌ی ادعاها پارتو باشد فرمول‌های مجانبی کلی وحدود بالایی را برای حق بیمه‌ی ناخالص، محاسبه نمود. کرمر(۱۹۹۸)، فرض کرد اندازه‌ی ادعاها لزوماً از یکدیگر مستقل نباشند و با این فرض تنها توانست، حد بالایی را برای حق بیمه به‌دست آورد.

توگِلز(۱۹۸۵)، اولین شخصی بود که همگرایی درتوزیع این قرارداد را با استفاده از تکنیک‌های تبدیل مورد مطالعه قرارداد. این نتایج با به‌کار بردن روش‌های احتمالاتی نیز به‌وسیله‌ی اِمبرختس وهمکاران (۱۹۹۷)، مجدداً به دست آمد.

بیرلانت و توگِلز(۱۹۹۲)، با این فرض که هنگامی که زمان به بی‌نهایت میل کند تعداد ادعاهایی که توسط این قرارداد بیمه می‌شوند، افزایش می‌یابد و توزیع اندازه‌ی ادعاها تنها از دامنه‌ی جذب فرهشه یا

---

۱. Ecomor : Excedent du cout moyen relatf.

۲. LCR :Large Claims Reinsurance.

گامبل باشد، نتایجی مجانبی را ارائه داده‌اند.

بنک تاندر (۱۹۷۸)، در ارتباط با قرارداد LCR، رابطه‌ی بین قرارداد مازاد زیان با ادعاهای بزرگ را مطرح کرد. برای محاسبه حق بیمه‌ی خالص می‌توان به بِرگلاند (۱۹۹۸)، مراجعه کرد. زمانی‌که توزیع اندازه‌ی ادعاها پارتو باشد مقایسه بین حق بیمه‌ی خالص برای قرارداد مازاد زیان با سهم نگه داشت M، با قرارداد ادعای بزرگ، توسط کوپر (۱۹۷۲) بررسی شد.

همچنین بِرلینر (۱۹۷۲)، تحت فرض پواسون-پارتو، توزیع توأم دو ادعای بزرگ را به دست آورده و کوواریانس بین آن‌ها را محاسبه کرد. سرانجام کرمر(۱۹۸۳)، کارایی مجانبی این قرارداد را به‌دست آورد.

درفصل اول رده بندی توزیع‌هایی را که در زمینه‌ی توزیع اندازه‌ی ادعاها کاربرد دارند مطرح می‌کنیم. همچنین فرضهای مورد نیاز در ارتباط با فرایند شمارشی ادعاها را نیز بیان می‌کنیم.

درفصل دوم انواع قراردادهای بیمه‌ی اتکایی را مطرح کرده، با استفاده از آن‌چه که کرمر در سال ۱۹۸۳، در ارتباط با نحوه‌ی محاسبه‌ی تعداد ادعاهای بزرگی که درقرارداد LCR بیمه می‌شوند، به‌دست آورد، روشی را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف دم توزیع ادعاها برابری‌های مجانبی بین کمیت ECOMOR و یک ادعای کلی را به‌دست می‌آوریم. همچنین در ارتباط با همگرایی در توزیع این کمیت در دو حالت مختلف نتایجی را به دست می‌آوریم و در آخر در ارتباط با همگرایی نسبت این کمیت به مقدار کل فرایند ادعاها بحث می‌کنیم.

در فصل چهارم نیز در ارتباط با همگرایی در توزیع کمیت LCR نتایجی را در دو حالت مختلف به‌دست می‌آوریم. نتایج این دو فصل براساس آنچه که توگِلز و لادوکت (۲۰۰۶) و (۲۰۰۷) به‌دست آورده‌اند، مطرح شده است.

و بالاخره در فصل پنجم با استفاده از شبیه سازی نتایج به‌دست آمده در فصل‌های سوم وچهارم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

کلیات و مفاهیم اولیه

۱.۱. نمادها و تعاریف پایه

دراین فصل ابتدا تعاریف پایه، نماد گذاری‌ها و قراردادهایی را که در این پایان نامه استفاده می‌شود مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.معکوس تابع: برای تابع غیر نزولی $f: R \to R$، معکوس تابع f را با $f^{\leftarrow}(y)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از

$$f^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in R : f(x) \geq y\}, \qquad y \in R.$$

فرض کنیم F یک تابع توزیع روی مقادیر حقیقی باشد. نقطه‌ی پایانی چپ تکیه گاه f را با x_l و نقطه‌ی پایانی راست را با x_r، نشان داده تعریف می‌کنیم:

$$x_l := \inf\{x \in R : F(x) > 0\} \text{ و } x_r := \sup\{x \in R : F(x) < 1\}.$$

همچنین دم چندکی تابع F را به‌صورت

$$U(y) := F^{\leftarrow}(1-1/y) = \inf\{x \in R : F(x) \geq 1-1/y\}, \qquad y > 1 \tag{۱.۱}$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر F پیوسته باشد برای $y > 1$، رابطه $1-F(U(y)) = 1/y$ برقرار است، در حالی که اگر U پیوسته باشد برای $x > x_l$، داریم $U(1/(1-F(x))) = x$. همچنین توجه کنید که $U(1+) = x_l \geq -\infty$ و $U(\infty) := \lim_{y\to\infty} U(y) = x_r \leq \infty$.

اگر X تقریباً همه جا نا منفی و دارای تابع توزیع F باشد، آن‌گاه تبدیل لاپلاس−استیلت‌یس X برابراست با

$$E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \ s \geq 0.$$

۲.۱. خاصیت منظم تغییر

در این پایان‌نامه، اغلب توزیع‌هایی را در نظر می‌گیریم که دم راستشان به طورمنظم در حال تغییر است.

تعریف ۲.۱. تابع منظم تغییر: تابع مثبت و اندازه‌پذیر لبگ $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ را منظم تغییر در بی‌نهایت با شاخص $\alpha \in R$ گوییم و می‌نویسیم ($f \in RV_\alpha$)، هرگاه برای هر u، $u > 0$ ، داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(ux)}{f(x)} = u^\alpha.$$

در حالت $\alpha = 0$ تابع f را کند تغییر گویند و از نماد ℓ برای نشان دادن این توابع استفاده می‌شود.
اگر f یک تابع منظم تغییر با شاخص $\alpha \in R$ باشد، می‌توان برای $x > 0$، $f(x)$ را به صورت $f(x) = x^\alpha \ell(x)$ نوشت، که درآن $\ell \in RV_0$.

توزیع‌هایی که دارای یک دم راست منظم تغییر هستند یک رده‌ی طبیعی از توزیع‌های دم سنگین

را تشکیل می‌دهند که نقش عمده‌ای در کاربردهای نظریه‌ی مقادیر کرانگین بازی می‌کنند.

تعریف ۱.۳. تابع توزیع F با تکیه‌گاه R به رده‌ی منظم تغییر R تعلق دارد، هرگاه عددی مانند α، $\alpha \geq 0$، وجود داشته باشد به طوری که وقتی $x \to \infty$ ، بر روی اعداد حقیقی $1-F \in RV_{-\alpha}$ یا به صورت معادل

$$1-F(x) \sim x^{-\alpha} \ell(x) \qquad (۲.۱)$$

برای بعضی از $\ell \in RV_0$ برقرار باشد.

۳.۱ . ماکسیمم دامنه‌ی جذب

نمونه‌ی تصادفی مستقل و هم توزیع X_1، $X_۲$، ... ، X_n با تابع توزیع مشترک F را درنظر بگیرید. در اغلب موارد، تحلیل مقدار کرانگین براساس دنباله‌ای از داده‌هایی است که از مقدار ماکسیمم‌شان بیشتر اختیار نمی‌کنند. یک بحث کلاسیک آماری بر روی میانگین داده‌ها قضیه‌ی حدی مرکزی است که به توزیع نرمال برمی‌گردد. قضیه‌ی کلاسیک حدی مرکزی بیان می‌کند که توزیع

$$\sqrt{n}\left(\frac{(X_1+.........+X_n)/n-E(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right),$$

هنگامی‌که n به بی‌نهایت می‌رود، به توزیع نرمال میل می‌کند. درکل قضیه‌ی حدی مرکزی با مجموع $S_n := X_1+...+X_n$ در ارتباط است و سعی می‌کند ثابت‌های $a_n > 0$ و $b_n \in R$ را طوری پیدا کند که

$$Y_n = a_n^{-1}(S_n - b_n),$$

درتوزیع به یک توزیع ناتباهیده میل کند. حال اگر S_n را با ماکسیمم داده‌ها یعنی $X_n^* := \max(X_1,...,X_n)$ جایگزین کنیم، طبیعی است که مسئله به پیدا کردن توزیع‌های حدی ممکن برای ماکسیمم داده ها تغییر

می‌کند. یعنی ثابت‌های $a_n > 0$ و $b_n \in R$ را طوری پیدا کنیم که هنگامی n به بی‌نهایت می‌رود، داشته باشیم:

$$a_n^{-1}(X_n^* - b_n) \xrightarrow{D} Y \;. \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۳.۱. ماکسیمم دامنه‌ی جذب: گوییم تابع توزیع F متغیر تصادفی X متعلق به دامنه‌ی جذب تابع توزیع ناتباهیده‌ی G است هرگاه ثابت های $a_n > 0$ و $b_n \in R$ وجود داشته باشند به طوری که هنگامی n به بی نهایت می‌رود، رابطه‌ی ۳.۱ برقرار باشد و می‌نویسیم $F \in D(G)$.

۴.۱. رده بندی توزیع ها

در این قسمت به رده بندی توزیع‌هایی می‌پردازیم که در این پایان‌نامه با آن‌ها مواجه هستیم. هر رده با استفاده از ویژگی‌هایی که با قالب کاری کرانگین‌ها مربوط است، مشخص می‌شود. در بخش ۱.۴.۱ رده بندی توزیع‌های دم سنگین بحث می‌شود. در بخش ۲.۴.۱ رده بندی توزیع‌هایی که به طور طبیعی در کاربردهای نظری مقادیر کرانگین ظاهر می‌شوند، مورد بحث قرارمی‌گیرند.

۱.۴.۱. رده‌ی توزیع‌های دم سنگین

این بخش را با تعریف مفهوم توزیع دم سنگین آغاز می‌کنیم.

تعریف ۴.۱. توزیع دم سنگین: تابع توزیع F متغیر تصادفی X، دم سنگین (از راست) گفته می‌شود، هرگاه برای همه‌ی $s > 0$ ، تابع مولد گشتاور X، $M_X(s)$ وجود نداشته باشد.

همچنین اگر $\overline{F} = 1 - F \in RV_0$، آن‌گاه تابع توزیع F دارای توزیع دم فوق سنگین است.

قضیه‌ی ۱.۱. فرض کنید $\alpha_F = \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x}$ که درآن $M(x) = -\log \overline{F}(x)$ تابع خطر F باشد. دراین صورت توزیع F دم سنگین است هرگاه $\alpha_F = 0$.

برهان : با توجه به اینکه $M(x)$ تنها برای توزیع‌های پیوسته تعریف می‌شود، اثبات را صرفاً برای این حالت بیان می‌کنیم. گیریم $M(x)$ مشتق پذیر باشد، دراین صورت داریم:

$$\frac{dM(x)}{dx} = m(x) .$$

که در آن $m(x)$ را تابع نرخ خطرگوییم.

فرض کنید $\alpha_F = 0$، دراین صورت $\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = m(x)$. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$، $x' > 0$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $x > x'$ داریم $M(x) \leq \varepsilon x$. درنتیجه بعضی مقادیر $c > 0$ و $x \geq 0$ موجودند به طوری که $\overline{F}(x) \geq ce^{-x}$. بنابراین برای همه‌ی $s \geq \varepsilon$ داریم:

$$\int_0^\infty e^{sx}\overline{F}(x)dx = \infty. \qquad (۴.۱)$$

از آنجایی که $\varepsilon > 0$ اختیاری است، عبارت ۴.۱ برای هر s، $s \geq 0$ ، برقرار است که به معنی دم سنگین بودن توزیع F است. ■

اینک اولین رده بندی توزیع‌های دم سنگین یعنی رده‌ی توزیع‌های دم کشیده را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۵.۱. تابع توزیع F با تکیه‌گاه $(0, \infty)$ به طوری که برای هر x، $x > 0$، $F(x) < 1$ به رده ی توزیع‌های دم کشیده‌ی L تعلق دارد هرگاه برای هر y، $y \in R$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(x+y)}{1-F(x)} = 1.$$

ممکن است توزیع‌های دم کشیده دارای تکیه گاهی بر خط حقیقی باشند، به چنین توزیع‌هایی دم کشیده روی R گفته می‌شود.

دومین و یکی دیگر از مهم ترین توزیع‌های دم سنگین که در این قسمت معرفی می‌شود رده‌ی توزیع‌های زیر نمایی است.

تعریف ۶.۱. تابع توزیع F با تکیه‌گاه $(0, \infty)$ به طوری که برای هر x، $x>0$، $F(x)<1$ به رده‌ی توزیع‌های زیر نمایی S تعلق دارد هرگاه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-F^{*2}(x)}{1-F(x)}=2.$$

که در آن $F^{*2}(x)$ تابع توزیع حاصل از پیچش مرتبه دوم $F(x)$ است.

رده‌ی توزیع‌های زیر نمایی نیز همانند رده‌ی توزیع‌های دم کشیده، می‌توانند دارای تکیه‌گاهی روی خط حقیقی باشند. توزیع‌های لگ نرمال $LN(\mu,\sigma^2)$ با پارامترهای $\mu\in R$ و $\sigma>0$ و وایبل $W(\tau,c)$ با پارامترهای $\tau\in(0,1)$ و $c>0$ مثال‌هایی از توزیع‌های زیرنمایی هستند.

به عنوان مثال، توزیع لگ نرمال در مدل بندی داده‌های بیمه‌ی موتورکاربرد زیادی دارد. اگرچه برای مواردی که درآن ادعاهای آتش سوزی وخسارت ناشی از توفان مطرح است توزیع پارتوکه به رده‌ی توزیع دم‌کشیده تعلق دارد، دارای قابلیت انعطاف پذیری بیشتری است.

رده‌ی توزیع‌های زیر نمایی به وسیله‌ی چیستیاکوف(۱۹۶۴) معرفی شده است. برخی خواص این رده از توزیع‌ها را در این قسمت و برخی دیگر را هنگام اثبات قضایا در فصل‌های آینده مطرح می‌کنیم.

لم ۱.۱. فرض کنید $F\in S$. دراین صورت برای این رده از توزیع‌ها ویژگی‌های زیر برقرار است:

۱. برای هر $\varepsilon>0$ داریم $\lim_{x\to\infty}e^{\varepsilon x}(1-F(x))=\infty$.

۲. برای هر $n\in N$، رابطه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-F^{*n}(x)}{1-F(x)}=n,$$

برقرار است.

قسمت اول لم فوق خاصیت زیر نمایی نام دارد. زیرا هنگامی که x به بی‌نهایت میل می‌کند مقدار $1-F(x)$ به صفرکاهش می‌یابد. اما برای هر $\varepsilon>0$ کاهش $1-F(x)$ آهسته‌تر از تابع نمایی $\exp(-\varepsilon x)$ است.

زمانی که شرط $F \in S$ برقرار است، با استفاده ازقسمت دوم لم ۱.۱، هنگامی که x به بی‌نهایت می‌رود برای هر $n \in N$ ، داریم $P[S_n > x] \sim nP[X_1 > x]$. به این معنی که رفتار دم مجموع S_n، به طور مجانبی با رفتار n برابر دم توزیع X_1 یکی است.

از این گذشته هنگامی که x به بی‌نهایت می‌رود برای هر $n \in N$، داریم:

$$P[X_n^* > x] = (1-F(x))\sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \sim nP[X_1 > x].$$

با ترکیب دومورد فوق نتیجه می‌گیریم:

$F \in S \Leftrightarrow (P[S_n > x] \sim P[X_n^* > x]$ ،$x \to \infty$ هنگامی که $n \geq ۲$ برای مقادیری از)

از نظر عملی با دو گونه توزیع سرو کار داریم. توزیع‌های " خوش رفتار " و توزیع‌های خطرناک با دم سنگین.

رده‌ی توزیع‌های خوش رفتار شامل توزیع‌هایی مانند F با یک دم محدود شده‌ی نمایی هستند. به طوری که برای مقادیر مثبتی از a، c و همه‌ی Xهای نامنفی داشته باشیم $1-F(x) \leq ce^{-ax}$. به این معنی که وقوع ادعاهای بزرگ غیر ممکن نیست، اما احتمال رخداد آنها با بزرگتر شدن مقدار x با سرعت نمایی به صفر کاهش می‌یابد. این توزیع‌ها بیشتر در احتمالهای ورشکستگی و مقدار ادعاهای انباشته کاربرد دارد.

در مقابل این توزیع‌های خوش رفتار، توزیع‌های خطرناک با دم سنگین دارای محدودیت نمایی نیستند و رخداد ادعاهای بزرگ دارای شانس بیشتری است.

۲.۴.۱.رده‌ی توزیع‌های کرانگین

توزیع‌هایی که در رده‌ی کرانگین مطرح می‌شوند در نظریه‌ی مقدار کرانگین کاربرد زیادی دارند. در

حقیقت مجموعه‌ی چنین توزیع‌هایی با مجموعه‌ی همه‌ی توزیع‌هایی که به دامنه‌ی جذب (یا به ماکسیمم دامنه‌ی جذب) یک توزیع مقدارکرانگین تعلق دارد، منطبق می‌باشد. به عبارت دیگر، ماکسیمم بخشی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع که به طور مناسب نرمال شده‌اند، درهر رده‌ی کرانگین دارای یک توزیع حدی ناتباهیده می‌باشد.

فرض کنید $\{X_i; i\in N\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع F است که تابع دم‌چندکی آن با U نشان داده می‌شود. همچنین $-\infty \leq U(1+) =: x_\ell$ و $x_r := U(\infty) \leq \infty$، به ترتیب برنقطه‌ی پایانی چپ و راست از تکیه‌گاه F دلالت کنند.

برای هر $n\in N$، X_1^*، ...، X_n^* به n متغیر تصادفی X_1، ...، X_n که به صورت صعودی مرتب شده‌اند، اشاره دارد. یعنی

$$X_1^* \leq \ldots \leq X_n^*$$

که X_{n-i+1}^*، i امین آماره‌ی مرتب بالایی نامیده می‌شود.

برای هر $n\in N$، تعریف می‌کنیم:

$$X_i^* := \begin{cases} x_\ell & \text{اگر } i \leq 0 \\ x_r & \text{اگر } i \geq n+1 \end{cases}$$

برای بررسی رفتار مجانبی کمیت‌هایی که شامل آماره‌های مرتب بالایی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع X_1، ...، X_n هستند لازم است فرض کنیم که تابع توزیع مشترک آن‌ها یعنی F، به یک رده‌ی کرانگین تعلق دارد.

تعریف ۱.۷. تابع توزیع F با تکیه‌گاه اعداد حقیقی و تابع دم چندکی U، به رده‌ی کرانگین C_γ با شاخص $\gamma\in R$ متعلق است هرگاه تابع اندازه پذیر لبگ مانند a ، $a:(0,\infty)\to(0,\infty)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $u>0$ داشته باشیم: