بسم الله الرحمن الرحیم

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم تحقیقات وفناوری

دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

کارشناسی ارشد ریاضی محض(جبر)

گراف های توانی در گروه های متناهی

پژوهشگر

معصومه امینی آقبلاغی

استاد راهنما

دکتر شیرین فولادی

بهار ۱۳۹۱

بسم ا... الرحمن الرحیم

عنوان پایان نامه

گراف های توانی گروه های متناهی

توسط:

معصومه امینی آقبلاغی

پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

از

دانشگاه اراک

اراک-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکترشیرین فولادی (استاد راهنما و رئیس کمیته)........ استادیار

دکتر رضا عرفی (دانشگاه اراک) .... استادیار

دکتر محرم آقاپورنهر........ استادیار

بهار ۱۳۹۱

تقدیم به مادر مهربانم

که وجودش بایم همه عشق است و وجودم برایش همه رنج

مالش رفت تا به توانایی رسم

مویش سپید تا رو سپید بمانم

راستی قامتم در شکستگی قامتش تجلی یافت

فروغ نگاهش گرمی کلامش و روشنی رویش

سرمایه جاودانه زندگی من است

در برابر وجودش زانوی ادب بر زمین می نهم و بادلی

مالامال از عشق بر دستان گرمش بوسه می نهم.

و تقدیم به روح پدرم

که گرچه وجودش در کنارم نیست ولی حضورش را در تک تک لحضات زندگی ام حس می کنم و از حضورش وجود می گیرم.

با خلوص نیت مراتب تشکرم را به محضر استاد راهنمای عزیز و مهربانم

سرکار خانم دکتر شیرین فولادی

که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم تقدیم می کنم.

و از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر رضا عرفی و جناب آقای محرم آقاپور نهر که زحمت داوری و قرائت این رساله را متقبل شده اند کمال سپاس و تشکر را دارم.

و در خاتمه از تمامی اساتید جبر گروه ریاضی دانشگاه اراک که در طول این دو سال زحمات فراوانی کشیده اند و الفبای جبر را به من آموختند نهایت تقدیر و تشکر را دارم.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه در این صورت گراف توانی جهت دار گروه G، گرافی است که مجموعه رئوس آن برابر با G و y به x وصل می شود هرگاه x توانی از y باشد و هم چنین گراف توانی بی جهت گروه G، گرافی است که مجموعه رئوس آن برابر با G و دو راس آن به هم وصل می شوند هرگاه یکی توانی از دیگری باشد.
به وضوح هرگاه دو گروه یکریخت باشند، گراف توانی آن ها نیز یکریخت می شوند. هدف اصلی این پایان نامه پاسخ به عکس سئوال فوق است. به عبارت دیگر اگر گراف توانی متناظر با دو گروه یکریخت باشند آیا دو گروه یکریخت هستند؟
ابتدا نشان می دهیم گروه های متناهی غیر یکریخت وجود دارند به طوری که گراف توانی بی جهت آنها یکریخت اند. سپس ثابت می کنیم که سئوال فوق در گروه های آبلی متناهی درست است و در ادامه نشان می دهیم اگر گراف توانی بی جهت دو گروه یکریخت باشند آنگاه گراف توانی جهت دار آنها نیز یکریختند و در نتیجه تعداد اعضاء از هر مرتبه در دو گروه فوق یکسان است. هم چنین نشان می دهیم تنها گروه متناهی که گروه خودریختی آن با گروه خودریختی گراف توانی آن یکریخت است، گروه چهارتایی کلاین می باشد. در پایان عدد خوشه ای گراف های توانی گروه های دو وجهی و کواترنیون تعمیم یافته را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی: گراف توانی بی جهت — گراف توانی جهت دار — یکریختی گراف های توانی — عدد خوشه ای در گراف توانی

پیش‌گفتار

پیدایش گراف ها از روی گروه ها و نیم گروه ها یکی از مباحث مورد توجه ریاضی دانان تا کنون بوده است. به عنوان مثال گراف کیلی یکی از قدیمی ترین گراف های ساخته شده به وسیله گروه ها است. در این رساله به مطالعه یکی دیگر از این نوع گراف ها، یعنی گراف توانی می پردازیم. مفهوم گراف توانی جهت دار ابتدا برای نیم گروه ها در سال ۲۰۰۲ توسط $Kelarev$ و $Quinn$ معرفی گردید. پس از آن $Chakrabarty$ گراف توانی بی جهت نیم گروه ها را مورد مطالعه قرار داد. در این رساله گراف توانی را برای گروه ها معرفی می کنیم. به عبارت دیگر فرض کنیم G یک گروه در این صورت گراف توانی جهت دار گروه G، گرافی است که مجموعه رئوس آن برابر با G و y به x وصل می شود هرگاه x توانی از y باشد، که آن را با $\overrightarrow{\mathcal{P}}(G)$ نشان می دهیم و هم چنین گراف توانی بی جهت گروه G، گرافی است که مجموعه رئوس آن برابر با G و دو راس آن به هم وصل می شوند هرگاه یکی توانی از دیگری باشد و آن را با $\mathcal{P}(G)$ نشان می دهیم. به وضوح هرگاه دو گروه یکریخت باشند، گراف توانی آن ها نیز یکریخت می شوند. هدف اصلی این پایان نامه پاسخ به عکس سئوال فوق است.
این پایان نامه مشتمل بر شش فصل می باشد.
فصل اول به مطالب مقدماتی درباره گراف ها و گروه ها اختصاص داده شده است که در فصول بعدی از آن ها استفاده می کنیم.
در فصل دوم ابتدا تعاریف و لم های اولیه را در مورد گراف های توانی بیان می کنیم و سپس با بیان چند مثال نشان می دهیم که گروه های نا متناهی غیر یکریخت وجود دارند به طوری که گراف های توانی آنها یکریخت هستند. همچنین با ارائه مثال نشان می دهیم گروه های متناهی غیر یکریخت وجود دارند به طوری که گراف توانی آنها یکریخت اند.
در فصل سوم ثابت می کنیم هرگاه دو گروه آبلی متناهی دارای گراف های توانی یکریخت باشند آنگاه آن دو گروه یکریخت هستند.
در فصل چهارم به یکریختی گراف های توانی گروه ها می پردازیم و نشان می دهیم که اگر دو گراف توانی جهت دار یکریخت باشند آنگاه تعداد اعضای از هر مرتبه چه متناهی و چه نا متناهی در دو گروه برابرند. و در بخش دیگر این فصل به این نتیجه می رسیم که اگر گراف توانی بی جهت دو گروه یکریخت باشند آنگاه گراف توانی جهت دار آنها نیز یکریخت اند.
در فصل پنجم در مورد خودریختی گراف های توانی صحبت می کنیم و نشان می دهیم که تنها گروه متناهی که در شرط $Aut(G) \cong Aut(\mathcal{P}(G))$ صدق می کند گروه

چهارتایی کلاین است.
در فصل آخر عدد خوشه ای را در گراف توانی بی جهت و جهت دار متناظر با گروه های دووجهی و کواترنیون تعمیم یافته به دست می آوریم.
فصل های دوم تا پنجم شرح تفضیلی این مقالات می باشند:

[1] P. J. Cameron, The power graph of a finite group, *J.Group Theory* 13(2010), 779-783

[2] P.J. Cameron and S.Ghosh. The power graph of a finite group. *Discrete Math* 311(2011)1220-1222

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ معرفی مفاهیم اولیه گراف

بسیاری از وضعیت های دنیای واقعی را می توان به راحتی به وسیله نموداری متشکل از مجموعه ای از نقاط و خطوطی که زوج های معینی از این نقاط را به هم وصل می کنند توصیف کرد. مثلا نقاط می توانند معرف افراد باشند و خطوط واصل بین زوج ها می توانند معرف دوستی ها باشند، و یا نقاط ممکن است مراکز ارتباطی و خطوط معرف ارتباط های بین آنها باشند، توجه کنید در چنین نمودار هایی آنچه بیشتر مورد توجه است، آن است که آیا دو نقطه مشخص به وسیله یک خط به هم وصل شده اند یا نه، شیوه وصل نقاط به هم مهم نیست. در علوم ریاضی وضعیت هایی از این نوع به پیدایش مفهوم گراف منجر شده است.

تعریف ۱.۱.۱

گراف G از دو بخش تشکیل شده است:

(۱) مجموعه $V(G)$ که عناصرش رئوس نام دارند.

(۲) مجموعه $E(G)$ از جفت های نامرتب از رئوس متمایز که یال نامیده می شوند.

تعریف ۲.۱.۱

دو راس v و u را مجاور می گوئیم هرگاه $\{u,v\} \in E(G)$ و از این به بعد $\{u,v\}$ را با uv نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱.۱

فرض کنید G یک گراف و x و y راس های G باشند، یک راه بین x و y دنباله ای چون $x = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = y$ از راس های متمایز G است که در آن $x_i x_{i+1}$، $0 \leq i \leq n-1$ یالی از G است.

تعریف ۴.۱.۱

یک مسیر راهی است که در آن همه رئوس متمایز باشند، مسیر با n راس را با نماد P_n نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱

اگر در مسیر P_n، ابتدا و انتهای مسیر یک راس باشد آنگاه دنباله تولید شده در مسیر را یک دور می نامیم و با C_n نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱

یالی با دو انتهای یکسان را طوقه می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱

اگر گراف G دارای طوقه نباشد و هیچ دوتائی از یال هایش به یک زوج راس متصل نباشد آنگاه گراف G را ساده می نامیم.

تعریف ۸.۱.۱

گراف ساده ای که بین هر دو راس دلخواه آن یک مسیر وجود داشته باشد را یک گراف همبند می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱

گراف کامل گراف ساده ای است که هر دو راس آن باهم مجاورند و آن را با نماد K_n نشان می دهیم که n تعداد رئوس می باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱

گوییم گراف G دو بخشی است اگر رئوس V را بتوان به دو زیر مجموعه‌ی N و M چنان افراز کرد که هر یال G یک راس M را به یک راس N وصل کند، و هیچ دو راس از N و همچنین M در G مجاور نباشند.

منظور از گراف دو بخشی تام یعنی از هر راس M به هر راس N یالی وجود داشته باشد، این گراف را با $K_{m,n}$ نشان می دهیم که در آن m تعداد رئوس در M و n تعداد رئوس در N است.

تعریف ۱۱.۱.۱

همسایگی بسته راس v دریک گراف شامل v و همه رئوسی است که به v وصل می شوند.

تعریف ۱۲.۱.۱

زیر مجموعه N را یک زیر گراف وابسته به گروه G گوییم هرگاه $E(N) \subseteq E(G)$ و $V(N) \subseteq V(G)$.

تعریف ۱۳.۱.۱

اگر در یک زیر گراف همه رئوس به هم متصل باشند آنگاه زیر گراف حاصل را زیر گراف کامل وابسته به گروه می نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱

در بین تمام زیر گراف های گراف π، زیر گراف کاملی که مجموعه رئوس آن دارای بیشترین عضو باشد را یک خوشه ماکسیمال می نامیم و تعداد رئوس آن را عدد خوشه ای گراف گوییم و با نماد $W(\pi)$ نمایش می دهیم.

۲.۱ گراف های یکریخت

فرض کنیم $G(V,E)$ و $G^*(V^*,E^*)$ دو گراف باشند و $f: V \longrightarrow V^*$ یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی رئوس باشد به طوریکه $\{u,v\}$ یک یال G است اگروتنهااگر $\{f(u),f(v)\}$ یک یال از G^* باشد، در این صورت f را یکریختی بین G و G^* می نامیم و می گوئیم گراف های G و G^* یکریختند.(و می نویسیم $G \cong G^*$.)

نکته ۱.۲.۱

اگر G و G^* گراف های یکریخت باشند آنگاه رئوس نظیر از خواص گرافی یکسان بهره مند هستند.

۳.۱ نمایش آزاد گروه ها

تعریف ۱.۳.۱

فرض کنیم F یک گروه، X یک مجموعه و $\theta : X \to F$ یک تابع باشد. در این صورت (F,θ) را بر X آزاد گوییم، هرگاه به ازای هر گروه مانند G و هر تابع مانند $\alpha : X \to G$ یک همریختی منحصر به فرد مانند $\beta : F \to G$ موجود باشد به طوری که $\alpha = \beta\theta$.

قضیه ۲.۳.۱

فرض کنیم G یک گروه، و X زیرمجموعه‌ای از G باشد به طوری که $G = \langle X \rangle$. در این صورت یک بروریختی مانند $\beta : F(X) \to G$ وجود دارد به طوری که β مجموعه‌ی X را نقطه به نقطه ثابت نگه می دارد.

برهان : [۱] قضیه ۳.۱.۷. □

علامت : گروه آزاد F را با علامت $F(X)$ نشان خواهیم داد.

قضیه ۳.۳.۱

هر گروه تصویر همریخت یک گروه آزاد است.

برهان : [۱۳] صفحه ی ۱٦٠. □

تعریف ۴.۳.۱

فرض کنیم X یک مجموعه و $R \subseteq F(X)$. در این صورت گروه خارج قسمتی $F(X)/\overline{R}$ را با

علامت $\langle X \mid R\rangle$ نشان می‌دهیم و آن را یک نمایش آزاد گروه $F(X)/\overline{R}$ می‌گوییم. ($\overline{R}$ یعنی بستار نرمال R در $F(X)$.)

تعریف ۵.۳.۱

فرض کنیم G یک گروه باشد و $G \cong \langle X \mid R\rangle$ که در آن $R \subseteq F(X)$. در این صورت $\langle X \mid R\rangle$ را یک نمایش آزاد (یا مختصراً نمایش) G می‌نامیم. هر عضو X را یک مولد و هر عضو R را یک رابطه‌ی G می‌نامیم. گروه G را متناهی نمایش می‌نامیم هرگاه نمایشی داشته باشد که در آن مجموعه‌ی مولدها و مجموعه‌ی رابطه‌ها هر دو متناهی باشند.

قضیه ٦.۳.۱

هر گروه متناهی، متناهی نمایش است.

برهان : [۱۳] صفحه ی ١٦۳. □

قضیه ۷.۳.۱

فرض کنیم $G = \langle X \mid R\rangle$ و هم‌چنین $C = \{[x,y] \mid x,y \in X, x \neq y\}$. در این صورت $G/G' \cong \langle X \mid R \cup C\rangle$.

برهان : [۱۳] صفحه ی ١٦۵. □

قضیه ۸.۳.۱

(قضیه‌ی جایگذاری)

فرض کنیم $G = \langle X \mid R\rangle$، H یک گروه و $\theta : X \to H$ نگاشتی مفروض باشد. در این صورت اگر به ازای هر x از X و هر r از R حاصل جایگذاری $\theta(x)$ به جای x در r عضو همانی H

باشد. آن‌گاه یک همریختی مانند $\gamma : G \to H$ وجود دارد به طوری که به ازای هر x از X، $\gamma(\overline{R}x) = \theta(x)$. به علاوه هرگاه $H = \langle \theta(X) \rangle$ آن‌گاه γ برپوشا است.

برهان : [۱۳] صفحه ی ۱۶۵. □

قضیه ۹.۳.۱

فرض کنیم $G = \langle X \mid R \rangle$ و $H = \langle Y \mid S \rangle$. در این صورت

$$G \times H \cong \langle X \cup Y \mid R \cup S \cup [X, Y] \rangle$$

که در آن $[X, Y] = \{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\}$.

برهان : [۱۳] صفحه ی ۱۶۶. □

مثال ۱۰.۳.۱ می‌دانیم به ازای هر n طبیعی $C_n \cong \langle x \mid x^n \rangle$. بنابراین به ازای هر دو عدد طبیعی m و n،

$$C_n \times C_m \cong \langle x, y \mid x^n, y^m, [x, y] \rangle.$$

تعریف ۱۱.۳.۱

فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $n \geq 3$. در این صورت زیرگروهی از S_n که توسط دو عضو زیر تولید می‌شود گروه دو وجهی (از درجه‌ی n) نامیده می‌شود و آن را با D_{2n} نشان می‌دهند:

$$a = (1\ 2\ ...\ n), \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

قضیه ۱۲.۳.۱

گروه D_{2n} دارای نمایش زیراست:

$$\langle x, y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle.$$

برهان : [۱۳] صفحه‌ی ۱۷۲.□

لم ۱۳.۳.۱

فرض کنیم $G = D_{2n}$، در این صورت داریم:

(الف) $Z(G) = \begin{cases} 1 & (2 \nmid n) \\ \langle x^{\frac{n}{2}} \rangle & (2 \mid n) \end{cases}$،

(ب) $G/G' \cong \begin{cases} C_2 & (2 \nmid n) \\ C_2 \times C_2 & (2 \mid n) \end{cases}$،

(ج) $Aut(D_8) \cong D_8$.

برهان : با توجه به نمایش G.□

تعریف ۱۴.۳.۱

فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $n \geq 2$. در این صورت زیرگروهی از گروه $GL(2, \mathbb{C})$ که با دو ماتریس زیر تولید می‌شود گروه کواترنیون تعمیم یافته نامیده می‌شود و آن را با Q_{4n} نشان می‌دهند:

$$\xi = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن $\omega = e^{i\pi/n}$.

قضیه ۱.۳.۱۵

گروه Q_{4n} دارای نمایش زیر است:

$$\langle x, y \mid x^{2n} = 1, x^n = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle.$$

برهان : [۱۳] صفحه‌ی ۱۷۳.□

۱.۴ p ـگروه ها، گروه های متناهی، نمای گروه

قضیه ۱.۴.۱

فرض کنیم G یک p ـگروه متناهی غیر بدیهی و $a \in G$ در این صورت اگر مرتبه‌ی a از مرتبه ی هر عضو G ناکمتر باشد آنگاه G زیر گروهی مانند H دارد به طوری که $G \cong \langle a \rangle \times H$.

برهان : [۱۳] صفحه ی ۱۲٦. □

قضیه ۲.۴.۱

قضییه اساسی گروه های آبلی متناهی (در مورد p ـگروه ها):

فرض کنیم G یک p ـگروه آبلی متناهی غیر بدیهی باشد در این صورت G را به یک و تنها یک صورت می توان به حاصل ضرب مستقیم تعدادی از زیر گروه های دوری غیر بدیهی اش تجزیه کرد.

برهان : [۱۳] صفحه ی ۱۲۹. □

تعریف ۳.۴.۱

فرض می کنیم G یک pـگروه آبلی و m عدد طبیعی باشد در این صورت G_m را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G_m = \{g | g^m = 1\}$$

لم ۴.۴.۱

فرض کنیم G یک pـگروه آبلی متناهی باشد و $G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_r \rangle$ تجزیه ای از G به حاصل ضرب مستقیم r زیر گروه دوری غیر بدیهی G باشد و به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $m | n_i$ که در آن $n_i = |a_i|$ آنگاه $G_m = \langle a_1^{n_1/m} \rangle \times \cdots \times \langle a_r^{n_r/m} \rangle$.

برهان : [۱۳] صفحه ی ۱۲۹. □

لم ۵.۴.۱

اگر G یک pـگروه آبلی متناهی باشد آنگاه:

(a) تعداد اعضای از مرتبه p در G برابر با $|G_p| - 1$ است.

(b) تعداد اعضای از مرتبه p^i ($2 \leq i$) در G برابر با $|G_{p^i}| - |G_{p^{i-1}}|$ است.

برهان :

(a) فرض کنیم $x \in G$ و $|x| = p$ در این صورت $x^p = 1$ در نتیجه $x \in G_p$. برعکس فرض کنیم $1 \neq x \in G_p$ لذا $x^p = 1$ در این صورت $|x| = p$.

(b) فرض کنیم $x \in G$ و $|x| = p^i$ لذا $x^{p^i} = 1$ و $x^{p^{i-1}} \neq 1$ در این صورت $x \in G_{p^i} - G_{p^{i-1}}$ و برعکس فرض کنیم $x \in G_{p^i} - G_{p^{i-1}}$ پس $x \in G_{p^i}$ و $x \notin G_{p^{i-1}}$ پس $x^{p^i} = 1$ و $x^{p^{i-1}} \neq 1$ در این صورت $|x| = p^i$. □