دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

n—همریختی‌های جوردن تقریبی روی جبرهای باناخ

نگارنده

سعیده موذنی

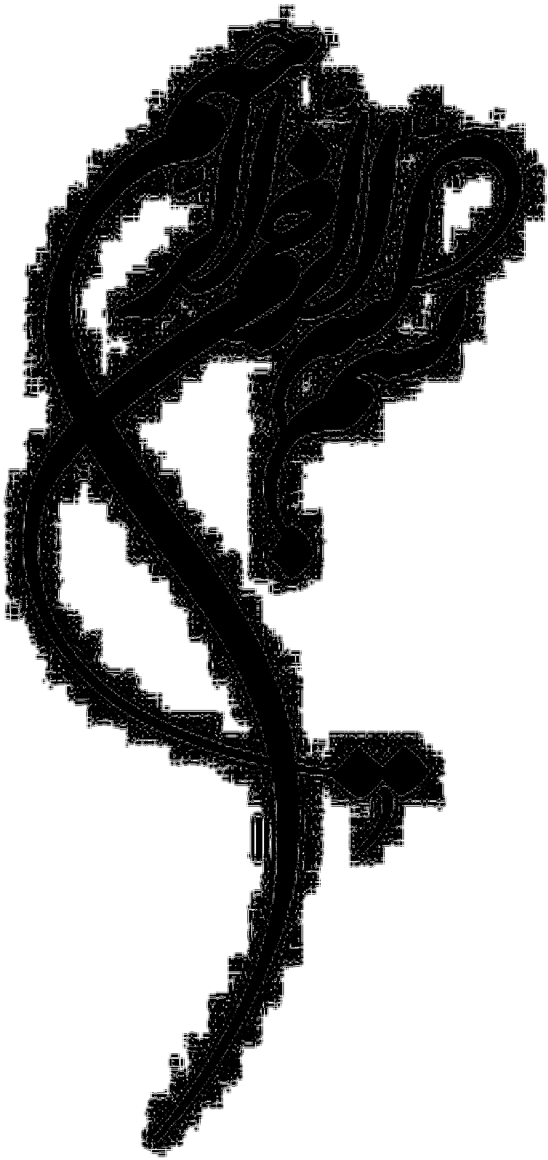
استاد راهنما

دکتر علی غفاری

استاد مشاور

دکتر محمود بیدخام

بهمن ماه ۱۳۸۹



قدردانی

حمد و سپاس خالق هستی را که با موهبت‌هایش مرا یاری نمود تا در راه علم و دانش گامی دیگر بردارم.

پس از تقدیر از پدر ومادرم که همواره وام‌دار مهرشان هستم از استاد راهنمایم جناب دکتر غفاری که دو سال در محضر ایشان افتخار شاگردی را داشتم کمال سپاسگزاری را دارم.

همچنین آقای دکتر بیدخام (استاد مشاور) و آقای دکترحبیبیان (داور داخلی) و آقای دکتر کامران شریفی (داور خارجی) از دانشگاه شاهرود داوری این پایان نامه را به عهده داشتند بدین وسیله از ایشان سپاسگزارم.

از درگاه خداوند متعال برای این اساتید طلب توفیق روز افزون و طول عمر با عزت را خواستارم.

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

که همواره راهنمایی‌هایشان، روشنگر راهم و دعاهایشان، بدرقه راهم بوده است.

چکیده

هدف اصلی در این پایان‌نامه، پرداختن به پایداری هایرز[۱]-اولام[۲]-راسیاس[۳] از n—همریختی‌های جوردن روی جبرهای باناخ است. همچنین پایداری همریختی‌ها و مشتق‌های جوردن توسعه یافته روی R—مدول‌های باناخ و جبرهای باناخ بررسی می‌کنیم.

سپس شرایطی را می‌یابیم که تحت آن شرایط همریختی‌هایی که در معادله تابعی درجه سوم صدق می‌کند پایدار می‌شوند

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x).$$

واژه‌های کلیدی: پایداری هایرز—اولام—راسیاس، همریختی، (θ,ϕ)—مشتق، معادله تابعی درجه سوم، فضای باناخ

---

[۱] Hyers
[۲] Ulam
[۳] Rassias

مقدمه

در سال ۱۹۴۰، اولام [۳۸] برای نخستین بار مسئله پایداری معادلات تابعی را به صورت زیر مطرح کرد:

فرض کنیم $(G_۱, *)$ یک گروه، $(G_۲, \diamond, d)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ و $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آیا $\delta(\varepsilon) > ۰$ موجود است به طوری که اگر نگاشت $h : G_۱ \to G_۲$ در رابطه

$$d(h(x * y), h(x) \diamond h(y)) < \delta, \qquad (x, y \in G_۱)$$

صدق کند، آن‌گاه همریختی $H : G_۱ \to G_۲$ موجود باشد به قسمی که

$$d(h(x), H(x)) < \varepsilon, \qquad (x \in G_۱)?$$

در سال ۱۹۴۱ هایرز [۱۸] مساله نگاشت‌های تقریباً جمعی $f : E_۱ \to E_۲$ را به صورت زیر درنظر گرفت:

اگر $E_۱$ و $E_۲$ فضاهای باناخ و $\varepsilon, \delta > ۰$ و نگاشت f برای هر $x, y \in E_۱$ در نامعادله

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

صدق کند، آن‌گاه حد $L(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$ برای هر $x \in E_۱$ وجود دارد و L یک نگاشت جمعی منحصربه‌فرد است به طوری که برای هر $x \in X$،

$$\|f(x) - L(x)\| \leq \varepsilon.$$

در سال ۱۹۷۸، تمیستکلیس راسیاس[۴] [۳۳] حالت کلی قضیه هایرز را اثبات کرد. این مفهوم جدید به پایداری هایرز–اولام–راسیاس معروف است.

گاورتا[۵] [۱۴] این نتایج را تعمیم داد او به جای تابع کنترل در قضیه کلی هایرز–اولام–راسیاس که به صورت $\varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ است، تابع کنترل $\phi(x, y)$ را جایگزین کرد (برای جزئیات بیشتر [۳۵، ۳۴، ۳۲، ۳۱، ۳۰، ۲۱، ۱۹، ۱۵، ۱۳، ۳] را ببینید).

معادله تابعی درجه دوم برای مشخص کردن فضاهای حاصل‌ضرب داخلی مورد استفاده قرار می‌گیرد

---

[۴] Themistocles M. Rassias

[۵] Gavruta

[۱، ۲، ۲۲]. همچنین معادلات تابعی دیگری هستند که فضاهای حاصل‌ضرب داخلی را مشخص می‌کنند. در فضای حاصل‌ضرب داخلی رابطه زیر

$$\|x+y\|^{۲}+\|x-y\|^{۲}=۲(\|x\|^{۲}+\|y\|^{۲})$$

برقرار است. معادله تابعی

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)+۲f(y) \qquad (۰.۰.۱)$$

با یک تابع دو–جمعی متقارن ارتباط داده می‌شود.[۱]

هر حل از معادله درجه دوم فوق، یک تابع درجه دوم[۶] نامیده می‌شود. تابع f بین فضاهای برداری حقیقی، درجه دوم است اگر و تنها اگر یک تابع دو– جمعی متقارن و منحصربه‌فرد B وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x، $f(x)=B(x,x)$. تابع B با ضابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$B(x,y)=\frac{۱}{۴}[f(x+y)-f(x-y)].$$

مساله پایداری هایرز–اولام برای معادله تابعی درجه دوم از فضاهای نرمدار به فضاهای باناخ توسط اسکوف[۷] ثابت شده است [۳۷].

چولوا [۸] نشان داد که در قضیه اسکوف، به جای فضای نرمدار گروه آبلی هم می‌توان قرار داد [۶].

چرویک[۹] پایداری معادله‌ی تابعی هایرز–اولام–راسیاس از نوع درجه دوم را ثابت کرد [۸].

قدیمی‌ترین معادله تابعی درجه سوم به صورت

$$f(x+۲y)+۳f(x)=۳f(x+y)+f(x-y)+۶f(y)$$

است که توسط راسیاس معرفی شد.[۲۹]

جان[۱۰] و کیم[۱۱] معادله تابعی درجه سوم

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x) \qquad (۰.۰.۲)$$

[۶] Quadratic functional

[۷] Skof

[۸] Cholewa

[۹] Czerwik

[۱۰] Jun

[۱۱] Kim

را معرفی کرده و به حل عمومی و پایداری هایرز-اولام-راسیاس این معادله پرداختند.[۲۳]
واضح است که تابع $f(x) = x^{۳}$ در معادله تابعی (۲.۰.۰) صدق می‌کند. هر جواب از معادله درجه سوم (۲.۰.۰) را تابع درجه سوم می‌نامند. جان و کیم ثابت کردند که تابع f بین فضاهای برداری حقیقی درجه سوم است اگر و تنها اگر تابع یکتایی c موجود باشد به قسمی که به ازای هر x، $f(x) = c(x, x, x)$. که در آن c به ازای هر یک متغیر ثابت، متقارن و به‌ازای هر دو متغیر ثابت، جمعی است.

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل است:

در فصل اول خواننده با مفاهیم و تعاریفی که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آشنا می‌شود.

در فصل دوم، ابتدا n-همریختی‌های جوردن تقریبی روی جبرهای باناخ را تعریف کرده و پس از بررسی پایداری هایرز-اولام-راسیاس آن نشان می‌دهیم که برای هر ۳-همریختی جوردن تقریبی f از یک جبرباناخ درون یک جبرباناخ جابجایی نیم‌ساده، یک ۳-همریختی حلقه منحصربه‌فردی نزدیک به f وجود دارد و اگر $n \in \{۳, ۴, ۵\}$، در آن صورت برای هر n-همریختی جوردن تقریبی f بین دو جبرباناخ جابجایی، یک n-همریختی حلقه منحصربه‌فردی نزدیک به f وجود دارد. [۱۰]

در فصل سوم، پایداری همریختی‌ها و مشتق‌های جوردن توسعه یافته روی R-مدول‌های باناخ را بررسی می‌کنیم. [۲۸]

در فصل چهارم، به پایداری همریختی‌ها و مشتق‌های جوردن توسعه یافته در جبرهای باناخ می‌پردازیم. [۲۷]

در فصل پنجم به نتایج جدیدی دست پیدا می‌کنیم، پایداری همریختی را نشان می‌دهیم که در یک معادله تابعی درجه سوم صدق می‌کند و به ذکر یک مثال می‌پردازیم. [۱۲]

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

این فصل شامل تعاریف و قضایای مقدماتی در مورد جبرهای باناخ و هم‌چنین پایداری معادلات تابعی می‌باشد. سعی شده است تا آن چه به عنوان پیش نیاز جهت مطالعه این پایان نامه ضروری است در این فصل گنجانده شود.

۱.۱ جبرهای باناخ

در این بخش منظور از میدان $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ می‌باشد، مگر آنکه یکی از آنها قید گردد.

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ را نرمدار گوییم، هرگاه نگاشت $\|.\|$ از A به توی اعداد حقیقی موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in A$ و هر اسکالر λ، سه خاصیت زیر برقرار باشد:

۱) $\|x\| \geq 0$، $\|x\| = 0$ اگرو تنها اگر $x = 0$،

۲) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ و

۳) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

زوج $(A, \|.\|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم. با قرار دادن $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای نرمدار A به یک فضای متریک با متر d تبدیل می‌شود. این متر را متر تعریف شده توسط نرم می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ هر فضای نرمدار را که نسبت به متر تعریف شده توسط نرمش کامل باشد، فضای باناخ گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر گوییم، هرگاه نگاشت $\pi : (x,y) \to xy$ از $A \times A$ به توی A وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x,y,z \in A$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $x(yz) = (xy)z$،

۲) $x(y+z) = xy + xz \ , \ (x+y)z = xz + yz$ و

۳) $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$.

نگاشت π را معمولاً ضرب در A می‌نامیم. اگر $F = \mathbb{R}$، آن‌گاه A را جبر حقیقی گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ جبر A را تعویض‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر $x,y \in A$ داشته باشیم:

$$xy = yx$$

تعریف ۵.۱.۱ جبر A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر نرمدار گوییم، هرگاه A به عنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $\|.\|$ در شرط زیر صدق کند:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x,y \in A).$$

تعریف ۶.۱.۱ جبر نرمدار A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر باناخ گوییم، هرگاه A یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم A,B دو جبر با میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت یک همریختی از A به توی B، نگاشت خطی ϕ است به طوری که:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \qquad (x,y \in A).$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و M یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت M را یک A–مدول چپ می‌نامیم هرگاه نگاشت $A \times M \to M$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $a \in A$، نگاشت $(a, m) \to am$ روی M خطی باشد،

۲) برای هر $m \in M$، نگاشت $(a, m) \to am$ روی A خطی باشد و

۳) برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $m \in M$، $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$.

به طور مشابه می‌توان A–مدول راست را تعریف نمود. M را A–دو مدول می‌نامیم، هرگاه A–مدول راست و A–مدول چپ باشد و در رابطه زیر نیز صدق کند:

$$a_1(ma_2) = (a_1m)a_2.$$

تذکر ۹.۱.۱ به جای A–دو مدول، از A–مدول استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم A جبر باناخ و X فضای باناخ باشد. در آن صورت X را A–مدول چپ باناخ گوییم، هرگاه X یک A–مدول چپ باشد و به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|ax\| \leq \|a\|\|x\| \tag{۱.۱.۱}$$

به همین ترتیب X را A–مدول راست باناخ گوییم، هرگاه X یک A–مدول راست باشد و به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|xa\| \leq \|x\|\|a\| \tag{۱.۱.۲}$$

X را یک A–مدول باناخ گوییم، هرگاه X یک A–مدول باشد و در روابط (۱.۱.۱) و (۱.۱.۲) نیز صدق کند.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم A جبر باناخ و X یک A–مدول باناخ باشد. عملگر خطی $D : A \to X$ را یک مشتق گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ (ایدآل ماکزیمال): زیر مجموعه‌ی J از جبر مختلط جابجایی A را ایدآل نامیم اگر

۱) J زیرفضایی از A (به مفهوم فضای برداری) بوده، و

۲) هروقت $x \in A$ و $y \in J$، $xy \in J$.

اگر $J \neq A$، J یک ایدآل حقیقی است. ایدآل‌های ماکزیمال، ایدآل‌هایی حقیقی‌اند که مشمول هیچ ایدآل حقیقی بزرگتر نیستند.

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنید A جبر باناخ جابجایی یکدار بوده و Δ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های مختلط A باشد. در این صورت هر ایدآل ماکزیمال در A هسته $h \in \Delta$ی است.

برهان . فرض کنیم M یک ایدآل ماکزیمال A باشد. در این صورت M بسته است (بنا به قضیه، هرگاه A یک جبرباناخ جابجایی باشد، آن‌گاه هر ایدآل ماکزیمال A بسته است) و لذا A/M یک جبرباناخ می‌باشد. $x \in A$ که x عضوی از M نباشد را اختیار کرده و قرار می‌دهیم

$$J = \{ax + y : a \in A, y \in M\}$$

در این صورت J یک ایدآل در A است که از M بزرگتر است زیرا $x \in J$. ($a = e$ و $y = 0$ را اختیار می‌کنیم.) لذا $J = A$ و به ازای $y \in M, a \in A$ای، $ax + y = e$. اگر $\pi : A \to A/M$ نگاشت خارج قسمتی باشد. نتیجه می‌شود که $\pi(a)\pi(x) = \pi(e)$. لذا هر عنصر ناصفر $\pi(x)$ از جبرباناخ A/M در A/M معکوس‌پذیر است. بنا به قضیه گلفاند—مازور(هرگاه A یک جبرباناخ باشد که در آن هر عنصر ناصفر معکوس‌پذیر است، آن‌گاه A مساوی (به‌طور طولپا یکریخت) با میدان مختلط است) یک یکریختی مانند J از A/M به روی $\mathbb{C}$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $h = J \circ \pi$ در این صورت $h \in \Delta$، و M فضای پوچ h است. ∎

تعریف ۱۴.۱.۱ (جبر نیم ساده): جبر A نیم ساده است هرگاه اشتراک تمام ایدآل‌های ماکزیمال A برابر صفر باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم A و B دو جبر باناخ باشند. در این صورت نگاشت $f : A \to B$ را همریختی درجه سوم می‌نامیم، هرگاه f تابع درجه سوم باشد و هم‌چنین برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد دراین‌صورت تابع $d : X \times X \to [0, \infty]$ را متریک توسعه یافته روی X گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$،

۲) برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$ و

۳) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

تذکر ۱۷.۱.۱ متریک توسعه یافته با متریک معمولی متفاوت است زیرا، برد آن شامل بینهایت نیز می‌باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک توسعه یافته باشد. تابع $T : X \to X$ در شرط لیپشیتز، با ثابت لیپشیتز $L \geq 0$ صدق می‌کند اگر برای هر $x, y \in X$، داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y).$$

تذکر ۱۹.۱.۱ تابع T را یک تابع انقباضی گوییم هرگاه در شرط لیپشیتز صدق کند و $L \leq 1$. به علاوه اگر ثابت لیپشیتز کمتر از ۱ باشد، آن‌گاه تابع T یک تابع انقباضی اکید نامیده می‌شود.

۲.۱ پایداری معادلات تابعی

معادله‌ی $f(x + y) = f(x) + f(y)$ یک معادله تابعی معروف و شناخته شده است که آن را معادله کوشی[۱] می‌نامیم، به طوری که هر جواب از این معادله، یک تابع جمعی نامیده می‌شود. برای توابع

[۱] Cauchy

حقیقی مقدار، هر جواب اندازه پذیر لبگ از معادله فوق به صورت $f(x) = cx$ می‌باشد که در آن c عددی ثابت است. البته جواب‌های اندازه ناپذیر نیز وجود دارند که آنها را توابع وحشی می‌نامیم، این توابع ناپیوسته و بیکران هستند.

پایداری معادله‌های تابعی اولین بار برای معادله تابعی کوشی مطرح شده است و بعد از آن روی معادلات تابعی دیگر مطرح شد و هم اکنون تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه روی فضاهای مختلف انجام می‌گیرد.

تذکر ۱.۲.۱ در این بخش $X, X_۱, X_۲$ را فضای برداری نرمدار حقیقی و Y را فضای باناخ در نظر می گیریم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید $\epsilon > ۰$ و $f : X \to Y$ تابعی دلخواه باشد. تابع f را ϵ−جمعی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ در نامعادله‌ی زیر صدق کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

قضیه ۳.۲.۱ تابع $f : X_۱ \to X_۲$ بین فضاهای برداری نرمدار حقیقی:

۱) درجه دوم است یعنی در معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر یک تابع دو−جمعی متقارن و منحصربه‌فرد $B : X_۱ \times X_۱ \to X_۲$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X_۱$، $f(x) = B(x, x)$؛

۲) درجه سوم است یعنی در معادله تابعی

$$f(۲x+y) + f(۲x-y) = ۲f(x+y) + ۲f(x-y) + ۱۲f(x)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر تابع منحصربه‌فرد $c : X_۱ \times X_۱ \times X_۱ \to X_۲$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X_۱$، $f(x) = c(x, x, x)$ و تابع c نسبت به هر یک متغیر ثابت متقارن و برای دو متغیر ثابت جمعی است؛

۳) درجه‌چهارم است یعنی در معادله تابعی

$$f(2x+y)+f(2x-y)=4f(x+y)+4f(x-y)+24f(x)-6f(y)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر یک تابع دو–درجه دوم متقارن و منحصربه‌فرد $D : X_1 \times X_1 \to X_2$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X_1$، $f(x)=D(x,x)$.

برهان . برای اثبات (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب به مراجع [۱]، [۲۳] و [۲۴] رجوع کنید. ■

اگر تابع کنترل را به صورت ϵ در نظر بگیریم، قضیه زیر حاصل می‌شود که به قضیه هایرز–اولام معروف است.

قضیه ۴.۲.۱ اگر $f : X \to Y$ تابع ϵ–جمعی باشد. آن‌گاه تابع جمعی و منحصربه‌فرد $A : X \to Y$ که به صورت

$$A(x)=\lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

برای هر $x \in X$ تعریف می‌شود وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$،

$$\|f(x)-A(x)\| \leq \epsilon.$$

برهان . بنا به فرض، برای هر $x,y \in X$ داریم:

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leq \epsilon \tag{۱.۲.۳}$$

در (۱.۲.۳) قرار دهید $x=y$، در آن صورت برای هر $x \in X$ خواهیم داشت:

$$\|f(2x)-2f(x)\| \leq \epsilon \tag{۱.۲.۴}$$

لذا (۱.۲.۴) را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، بنابراین برای هر $x \in X$ داریم:

$$\left\|\frac{f(2x)}{2}-f(x)\right\| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{۱.۲.۵}$$

اکنون در (۱.۲.۵) به جای x مقدار $2x$ قرار داده و نتیجه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، در نتیجه برای هر $x \in X$ بدست می‌آید:

$$\left\|\frac{f(2^2x)}{2^2}-\frac{f(2x)}{2}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2^2} \tag{۱.۲.۶}$$

با استفاده از روابط (۱.۲.۵) و (۱.۲.۶) بدست می آید:

$$\left\|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - f(x)\right\| \le \epsilon(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲}) = \epsilon(۱ - ۲^{-۲}) \qquad (۱.۲.۷)$$

روند فوق را ادامه می‌دهیم و به روش استقرا برای هر $x \in X$ خواهیم داشت:

$$\|۲^{-n}f(۲^nx) - f(x)\| \le \epsilon(۱ - ۲^{-n}) \qquad (۱.۲.۸)$$

قرار می‌دهیم $A_n(x) = ۲^{-n}f(۲^nx)$ و ثابت می‌کنیم $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله همگرا است. برای این منظور از محک همگرایی کوشی استفاده می‌کنیم. در (۱.۲.۸) به جای x مقدار ۲^mx قرار می‌دهیم و نتیجه را بر ۲^m تقسیم می‌کنیم، در این صورت برای هر $x \in X$،

$$\|۲^{-(m+n)}f(۲^{m+n}x) - ۲^{-m}f(۲^mx)\| \le \epsilon(۱ - ۲^{-n})۲^{-m} \qquad (۱.۲.۹)$$

از آنجا که Y فضای باناخ است، بنا به محک همگرایی کوشی $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$ وجود دارد. بنابراین می‌توان تابع $A : X \to Y$ را با ضابطه‌ی $A(x) := \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$ تعریف نمود. در نتیجه اگر در (۱.۲.۸)، $n \to \infty$ آن‌گاه برای هر $x \in X$ خواهیم داشت:

$$\|A(x) - f(x)\| \le \epsilon$$

نشان می‌دهیم A، جمعی است.

برای این منظور در (۱.۲.۳) به جای x و y به ترتیب مقادیر ۲^nx و ۲^ny قرار می‌دهیم و حاصل را بر ۲^n تقسیم می‌کنیم، برای هر $x, y \in X$ بدست می آوریم:

$$\|۲^{-n}f(۲^n(x+y)) - ۲^{-n}f(۲^nx) - ۲^{-n}f(۲^ny)\| \le ۲^{-n}\epsilon$$

اگر در نامعادله اخیر، $n \to \infty$ درآن صورت برای هر $x, y \in X$،

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

حال ثابت می‌کنیم A، منحصربه‌فرد است.

فرض کنیم $A' : X \to Y$ تابع جمعی دیگری باشد که برای هر $x \in X$، در $\|A'(x) - f(x)\| \le \epsilon$ صدق

می‌کند. عنصری مانند y متعلق به X وجود دارد که، $A^{'}(y) \neq A(y)$. از آنجا که برای هر $x \in X$، $\|A^{'}(x) - f(x)\| \leq \epsilon$. بنابراین

$$\|A(x) - A^{'}(x)\| \leq \|A(x) - f(x)\| + \|A^{'}(x) - f(x)\| \leq ۲\epsilon$$

برای هر $x \in X$ برقرار است. عدد $k > ۰$ را طوری اختیار می‌کنیم که برای $y \in X$،

$$k\|A(y) - A^{'}(y)\| > ۲\epsilon$$

چون هر دو تابع A و $A^{'}$ جمعی‌اند، بنابراین

$$\|A(ky) - A^{'}(ky)\| = k\|A(y) - A^{'}(y)\| > ۲\epsilon$$

که این تناقض است و لذا برای هر $x \in X$، $A(x) = A^{'}(x)$. ■

اگر تابع کنترل را به صورت $\epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ در نظر بگیریم، قضیه زیر حاصل می‌شود که به قضیه هایرز—اولام—راسیاس معروف است.

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنیم $f : X \to Y$ تابعی دلخواه باشد که برای هر $x, y \in X$ در رابطه‌ی

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

صدق کند. در این صورت تابع منحصربه‌فرد جمعی $A : X \to Y$ وجود دارد به طوری که در نامعادله‌ی

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\epsilon\|x\|^p$$

برای هر $x \in X$ صدق می‌کند که در آن $۰ \leq p < ۱$، $k = \frac{۲}{۲-۲^p}$ و ϵ ثابت است. به علاوه اگر $p < ۰$، آن‌گاه نامعادله اخیر برای هر $x \neq ۰$ برقرار است.

برهان . ر.ک.[۲۰]. ■

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی دلخواه باشد که برای هر $x, y \in X$ در رابطه‌ی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

صدق کند. آن‌گاه تابع منحصربه‌فرد جمعی $A : X \to Y$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ در نامعادله‌ی

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\epsilon\|x\|^p$$

صدق می‌کند که در آن $p > ۱$، $k = \frac{۲}{۲^p - ۲}$ و ϵ ثابت است.

برهان . ر.ک. [۲۰]. ■

فرض کنید $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ باشد و تابع کنترل را بصورت $[\psi(\|x\|) + \psi(\|y\|)]$ در نظر بگیرید، دراین صورت قضیه زیر حاصل می‌شود که به قضیه ایساک—راسیاس معروف است.

قضیه ۷.۲.۱ اگر $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ نگاشتی باشد به‌طوری که

۱) $\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} = ۰$،

۲) $\psi(ts) \leq \psi(t)\psi(s)$ که در آن $t, s > ۰$ و

۳) $\psi(t) < t, t > ۱$.

هم‌چنین اگر نگاشت $f : X \to Y$ برای هر $x, y \to X$ در شرط

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon[\psi(\|x\|) + \psi(\|y\|)]$$

صدق کند، آن‌گاه نگاشت جمعی و منحصربه‌فردی مانند $A : X \to Y$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$،

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\psi(\|x\|)$$

که در آن $k = \frac{۲}{۲ - \psi(۲)}$.