بِسمِ اللّه الرَّحمنِ الرَّحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

(شاخهٔ جبر)

عنوان:

هم‌موضعی‌سازی، هم محمل‌ها و همولوژی موضعی

استادراهنما:

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

تدوین:

معصومه هدایتی

اسفند ۱۳۸۷

چکیده

فرض کنیم حلقه A جابجایی، یکدار و نوتری باشد. تعریفی از هم محمل را ارائه می‌کنیم که مشابه رابطه محمل با کوهمولوژی موضعی، رابطه‌ای با فانکتور هومولوژی موضعی دارد. همچنین فانکتور هم موضعی سازی که از تعریف هم محمل ناشی شده است را بررسی می‌کنیم این فانکتور همانند فانکتور موضعی سازی معمولی که ساختار نوتری نوع را به دست می‌دهد ساختار آرتینی نوع را به دست می‌دهد. و این دوگانی، به یک چیزی بین هم محمل ومحمل معمولی توسیع داده می‌شود.

حال فرض می‌کنیم I ایده‌الی از A و M یک Aـ مدول باشد در این صورت فانکتور Iـادیک کمال Λ_I که به صورت $\Lambda_I = \varprojlim_t \frac{M}{I^t M}$ تعریف می‌شود، همورد و جمعی است و روی کاتگوری Aـ مدولهای با تولید متناهی دقیق است. در حالت کلی فانکتور Λ_I نه دقیق راست است و نه دقیق چپ. باوجود این می‌توانیم دنباله‌ای از فانکتورهای مشتق شدهٔ چپ $\{L_i^I\}$ از Λ_I را مورد مطالعه قرار دهیم. L_0^I دقیق راست است ولی در حالت کلی $L_0^I \neq \Lambda_I$. i ـامین مدول هومولوژی موضعی M را به صورت $H_i^I(M) = \varprojlim_t \mathrm{Tor}_i^A(\frac{A}{I^t}, M)$ تعریف می‌کنیم.

این تعریف دوگان تعریف مدولهای کوهمولوژی موضعی روی مدولهای با تولید متناهی می‌باشد.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰: 13D07, 13E10

واژه‌های کلیدی: هم موضعی سازی، هم محمل، هومولوژی موضعی، کوهمولوژی موضعی، دوگان ماتلیس.

مقدمه

فرض کنیم A حلقه‌ای جابجایی و یکدار و I یک ایده‌ال از Aو M یک Aـمدول باشد. در این صورت فانکتور Iـادیک کمال Λ_I که به صورت $\Lambda_I(M) = \varprojlim_t \frac{M}{I^t M}$ تعریف می‌شود، فانکتوری همورد و جمعی است و روی کاتگوری Aـ مدولهای با تولید متناهی دقیق می‌باشد، به شرط آن که A نوتری نیز باشد. Λ_I روی کاتگوری Aـمدولها و A ـهمومورفیسمها نه دقیق راست است و نه دقیق چپ. باوجود این، می‌توانیم دنباله‌ای از فانکتورهای مشتق شدهٔ چپ $\{L_i^I\}$ از Λ_I را مورد بررسی قرار دهیم که $L_\circ^I$ دقیق راست است. امّا در حالت کلی کارکردن با این فانکتور بسیار دشوار می‌باشد.

ماتلیس ثابت کرد در صورتی که A یک حلقه موضعی و نوتری با ایده‌ال ماکسیمال m بوده و I توسط یک دنباله منظم تولید شده باشد آنگاه:

$$L_i^I(D(M)) \cong D(H_I^i(M))$$

که در آن $D(-) = \mathrm{Hom}_A(-; E(\frac{A}{m}))$ فانکتور دوگان ماتلیس است و همچنین

$$L_i^I(M) \cong \mathrm{Ext}_A^{n-i}(\varinjlim \frac{A}{I^t}; M)$$

ای. ام. سیمون نشان داد که برای هر $i > \circ$، $L_i^I(M) = \circ$ و $L_\circ^I(M) = M$ به شرط آن که M نسبت به Iـادیک توپولوژی، کامل باشد.

هدف این پایان‌نامه هم موضعی‌سازی، مطالعه هم‌محمل و همچنین مطالعهٔ مدولهای همولوژی موضعی می‌باشد.

روش‌های متعددی در معرفی هم‌ـموضعی‌سازی و هم‌ـمحمل برای مدولها روی یک حلقه جابجایی ارائه گردیده که آغاز آن با مقاله‌ای از L. Melkersson و P.Schenzel (مرجع [۱۳] را ببینید) بوده است که نتایج موفقیت آمیزی برای مدولهای آرتینی داشته است. در مقاله‌ای که در این پایان نامه به بررسی آن می‌پردازیم، روشی متفاوت و جالب در این خصوص ارائه گردیده است.

این روش از ساختن، چندین خاصیت جالب و کاربردهای متعدد دارد که در روش $M-S$ چنین نیست:

۱ـ هم‌ـموضعی‌سازی یک Aـمدول آرتینی M یک $S^{-1}A$ـمدول آرتینی است، وقتی که A کامل و $S^{-1}A$ نیم‌ـموضعی باشد. البته درحالت کلی این خاصیت برقرار نیست.

۲ـ این روش هم‌ـموضعی‌سازی، هم‌ـمحمل بسیار بهتری را برای مدول‌های غیر آرتینی می‌دهد.

۳ـ کاربردی برای هم موضعی سازی برای "Shifted Localization Principle" شارپ برای کوهمولوژی موضعی می‌دهد و ....

در فصل اول قضایای مقدماتی مورد نیاز فصلهای آینده را مطرح خواهیم کرد.

در فصل دوم ابتدا فانکتور دوگان ماتلیس را تعریف کرده و قضایایی را در ارتباط با آن اثبات می‌کنیم.

همچنین در این فصل تعمیم قضیه دوگان اصلی ماتلیس ثابت شده بوسیلهٔ Ooishi در [۱.۶و ۱۰] را می‌آوریم.

در فصل سوم تعریف هم‌موضعی و هم‌ـمحمل را آورده و اشاره می‌کنیم که $S_{-1}(-)$ فانکتوری دقیق و جمعی می‌باشد و به قضایایی در مورد صفرشدن و صفر نشدن این فانکتور خواهیم پرداخت.

در فصل چهارم ابتدا فانکتور Iـادیک کمال را تعریف و نیز اثبات کرده‌ایم که: $H_j^I(M^*) = H_I^j(M)^*$

در این پایان نامه مقالهٔ

Andrew. S. Richardson Co-Localization, Co-Support and local Homology, Rocky mountain Journal of Mathematics, Volume 36, Number 5, 2006. 1679-1703.

بررسی شده است.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و قضایای مورد نیاز

۱-۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

در سراسر این پایان‌نامه منظور از حلقهٔ A، حلقه‌ای جابجایی و یکدار است و همواره عضو یکهٔ حلقه مخالف صفر فرض شده است.

۱-۱-۱ تعریف. فرض کنیم $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از Aـ مدولها و $\{f_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}\}$ یک خانواده از Aـهمومورفیسمها باشد به طوری که $f_i \circ f_{i+1} = 0$ به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$. در این صورت

$$\cdots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots$$

را یک همبافت از $A-$ مدولها و $A-$ همومورفیسمها می‌نامیم و آن را با $X_\bullet$ نشان می‌دهیم. به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$ ، $i-$امین همولوژی مدول همبافت $X_\bullet$ را با $H_i(X)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$H_i(X) = \frac{\mathrm{Ker} f_i}{Im f_{i+1}}$$

۱-۱-۲ تعریف. فرض کنیم $T:\varepsilon(A)\longrightarrow\varepsilon(A')$ یک فانکتور همورد و جمعی باشد که A' حلقه‌ای جابجایی و یکدار و $\varepsilon(A)$ کاتگوری $A-$ مدولها و $A-$ همومورفیسمها است. همچنین فرض کنیم M یک $A-$ مدول باشد و

$$P_M:\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}0$$

یک رزولوشن تصویری برای M باشد. در این صورت همبافت زیر را خواهیم داشت:

$$\cdots\longrightarrow T(P_2)\xrightarrow{T(d_2)}T(P_1)\xrightarrow{T(d_1)}T(P_0)\longrightarrow 0$$

و برای هر عدد صحیح و مثبت n تعریف می‌کنیم $L_nT(M)=\frac{\mathrm{Ker}T(d_n)}{ImT(d_{n+1})}$. حال اگر $f:M\longrightarrow N$ یک $A-$ همومورفیسم باشدو

$$P_N:\cdots\longrightarrow P'_2\xrightarrow{d'_2}P'_1\xrightarrow{d'_1}P'_0\xrightarrow{d'_0}0$$

یک رزولوشن تصویری برای N باشد. آنگاه تبدیل $\bar{f}:P_M\longrightarrow P_N$ موجود است که با تقریب هموتوپیک منحصر بفرد است؛ و لذا به ازای هر $n\geq 0$ همریختی منحصر بفردی مانند

$$L_nT(f):L_nT(M)\longrightarrow L_nT(N)$$

با ضابطهٔ $L_nT(f)(z_n+ImT(d_{n+1}))=T(\bar{f})(z_n)+ImT(d'_{n+1})$ موجود است. که در آن $z_n\in KerT(d_n)$، به وضوح L_nT فانکتوری همورد و جمعی از $\varepsilon(A)$ به $\varepsilon(A')$ است که آن را $n-$امین فانکتور مشتق شدهٔ چپ فانکتور T می‌نامیم.

۱-۱-۳ تعریف. فرض کنیم

$$\cdots\longrightarrow P_{i+1}\xrightarrow{d_{i+1}}P_i\xrightarrow{d_i}P_{i-1}\xrightarrow{d_{i-1}}\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\longrightarrow 0$$

یک رزولوشن تصویری برای $A-$ مدول M بوده و N یک $A-$ مدول دلخواه باشد. در این صورت با تأثیر فانکتور $N\otimes_A -;\varepsilon(A)\longrightarrow\varepsilon(A')$، که در آن A' حلقه‌ای جابجایی و یکدار است، همبافت زیر

بدست می‌آید.

$$\cdots \longrightarrow N \otimes_A P_{i+1} \longrightarrow N \otimes_A P_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow N \otimes_A P_1 \longrightarrow N \otimes_A P_0 \longrightarrow 0$$

$i-$امین هومولوژی مدول این همبافت را با $\mathrm{Tor}_i^A(N, M)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که این مدول مستقل از نحوهٔ انتخاب رزولوشن تصویری برای M است.

تذکّر. در تعریف (۱ـ۱ـ۲)، به روشی مشابه، اگر با رزولوشنهای انژکتیو برای $A-$ مدولها کار کنیم آنگاه $n-$امین فانکتور مشتق شدهٔ راست T قابل تعریف است که آن را با A^nT نشان می‌دهیم و فانکتوری همورد و جمعی است. حال اگر فانکتور همورد وجمعی $HOM_A(M, -)$ را در نظر بگیریم آنگاه برای هر $n \geq 0$، $n-$امین فانکتور مشتق شدهٔ راست این فانکتور را با $\mathrm{Ext}_A^n(M, -)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۴ قضیه. اگر $A-$ مدول F یکدست باشد آنگاه برای هر $A-$ مدول M و هر $n \geq 1$ ، $\mathrm{Tor}_n^A(F, M) = 0$.

برهان. ر.ک. [۱۷ ، ۸.۷].□

۱-۱-۵ قضیه. اگر برای هر $A-$ مدول M، $\mathrm{Tor}_1^A(F, M) = 0$ آنگاه F یکدست است.

برهان. ر.ک. [۱۷ ، ۸ .۹].□

۱-۱-۶ قضیه. فرض کنیم $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ یک رشتهٔ دقیق از $A-$ مدولها و $A-$ همومورفیسمها باشد. در این صورت به ازاء فانکتور همورد و جمعی T، رشتهٔ دقیق و طولانی زیر را داریم:

$$\cdots \longrightarrow L_{n+1}T(M) \longrightarrow L_{n+1}T(M'') \xrightarrow{\Delta_{n+1}} L_nT(M') \longrightarrow L_nT(M) \longrightarrow L_nT(M'')$$
$$\longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow L_0T(M') \longrightarrow L_0T(M) \longrightarrow L_0T(M'') \longrightarrow 0$$

که در آن Δ_{n+1} برای هر $n \geq 0$، همومورفیسم همبند (Connecting homomorphism) و $L_nT(-)$، $n-$امین فانکتور مشتق شدهٔ چپ T می‌باشد.

برهان. ر.ک. [۲۱. ۶، ۱۷].□

۱-۱-۷ نتیجه. به ازای هر فانکتور همورد و جمعی T، فانکتور مشتق شدهٔ چپ $L_\circ T$ دقیق راست است.

برهان. بنابر قضیه(۱ـ۱ـ۶) برای هر رشتهٔ دقیق و کوتاه $\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ از $A-$ مدولها و $A-$ همومورفیسمها، رشتهٔ زیر دقیق است:

$$L_\circ T(M') \longrightarrow L_\circ T(M) \longrightarrow L_\circ T(M'') \longrightarrow \circ$$

و لذا $L_\circ T$ یک فانکتور دقیق راست است. □

۱-۱-۸ گزاره. فرض کنیم T فانکتوری همورد و جمعی و دقیق راست باشد. در این صورت

$$L_\circ T(-) \cong T(-)$$

برهان. فرض کنیم M یک $A-$ مدول و $P_\circ : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_\circ \xrightarrow{\varepsilon} \circ$ یک رزولوشن تصویری برای M باشد. در این صورت چون T دقیق راست است لذا همبافت دقیق زیر را خواهیم داشت:

$$\cdots \longrightarrow T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_\circ) \xrightarrow{T(\varepsilon)} T(M) \longrightarrow \circ$$

و لذا داریم:

$$L_\circ T(M) = \frac{\mathrm{Ker}T(\varepsilon)}{ImT(d_1)} = \frac{T(P_\circ)}{ImT(d_1)} = \frac{T(P_\circ)}{\mathrm{Ker}T(\varepsilon)}$$
$$\cong T(M) \qquad (1)$$

حال فرض کنیم $\mu_M : L_\circ T(M) \longrightarrow T(M)$ همان یکریختی (۱) باشد در این صورت برای هر $\alpha = \mathrm{Ker}T(\varepsilon) + a \in L_\circ T(M) \quad (a \in T(P_\circ))$ ، داریم:

$$\mu_M(\alpha) = T(\varepsilon)(a)$$

حال فرض کنیم M'، $A-$ مدول دیگری باشد و $f: M \longrightarrow M'$ یک $A-$ همومورفیسم و همبافت $\cdots \longrightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} M' \longrightarrow 0$ دقیق باشد. در این صورت تبدیلی از همبافتها مانند $(f_i)_{i\geq 0}: P \longrightarrow P'$ روی f موجود است.

و لذا دیاگرام جابجایی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} T(P_0) & \xrightarrow{T(\varepsilon)} & T(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T(f_0)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ T(P'_0) & \xrightarrow{T(\varepsilon')} & T(M') \end{array}$$

و از آنجا دیاگرام جابجایی:

$$\begin{array}{cccc} L_0T(M) = & \frac{T(P_0)}{\mathrm{Ker}T(\varepsilon)} & \xrightarrow{\mu_M} & T(M) \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle T(f_0)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ L_0T(M') = & \frac{T(P'_0)}{\mathrm{Ker}T(\varepsilon')} & \xrightarrow{\mu_{M'}} & T(M') \end{array}$$

را خواهیم داشت و لذا $L_0T(-) \cong T(-)$. $\square$

۱-۱-۹ گزاره. فرض کنیم T یک فانکتور هموردو جمعی و دقیق راست باشد. در این صورت برای هر $i > 0$، فانکتورهای مشتق شدهٔ چپ T با فانکتورهای مشتق شدهٔ چپ L_0T یکسان است.

برهان. فرض کنیم $P_\bullet: \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ یک رزولوشن تصویری برای $A-$ مدول M باشد. در این صورت همبافت دقیق

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است. حال بنابر (۱ـ۱ـ۷) فانکتور $L_0T(-)$ دقیق راست است و لذا همبافت

$$\cdots \longrightarrow L_0T(P_1) \longrightarrow L_0T(P_0) \longrightarrow L_0T(M) \longrightarrow 0$$

دقیق است. از طرفی چون $L_0T(P_i) \cong T(P_i)$ ولذا همبافت

$$\cdots \longrightarrow T(P_2) \longrightarrow T(P_1) \longrightarrow T(P_0) \longrightarrow L_0T(M) \longrightarrow 0$$

را خواهیم داشت. بنابراین برای هر $i > 0$، فانکتورهای مشتق شدهٔ چپ T با فانکتورهای مشتق شدهٔ چپ L_0T یکسان است. □

۱-۱-۱۰ لم پنج. فرض کنیم:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow{f_1} & & \downarrow{f_2} & & \downarrow{f_3} & & \downarrow{f_4} & & \downarrow{f_5} \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

یک دیاگرام جابجایی از $A-$ مدولها با سطرهای دقیق باشد. در این صورت:

(آ) اگر f_2 وf_4 پوشا و f_5 یک به یک باشد آنگاه f_3 پوشاست.

(ب) اگر f_2 و f_4 یک به یک و f_1 پوشا باشد آنگاه f_3 یک به یک است.

(ج) اگر f_1 و f_2 و f_4 و f_5 یکریختی باشند آنگاه f_3 نیز یکریختی است.

برهان. به [۱۷، ۳.۳۲] مراجعه شود.□

۱-۱-۱۱ گزاره. فرض کنیم T یک فانکتور هموردا و جمعی و دقیق و $X_\bullet$ یک همبافت باشد. در این صورت برای هر $n \geq 0$،

$$H_nT(X_\bullet) \cong TH_n(X_\bullet)$$

برهان. فرض کنیم

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{f} X_n \xrightarrow{g} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

یک همبافت باشد. در این صورت نشان می‌دهیم $T(\frac{\mathrm{Ker}g}{ImT(f)}) \cong \frac{\mathrm{Ker}T(g)}{ImT(f)}$ برای این کار رشته‌های دقیق زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0 \longrightarrow Imf \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathrm{Ker}g \xrightarrow{\pi} \frac{\mathrm{Ker}g}{Imf} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Imf \overset{\lambda}{\hookrightarrow} X_n \text{ و } X_{n+1} \xrightarrow{\tilde{f}} Imf \longrightarrow 0 \text{ و}$$

$$0 \longrightarrow Kerg \overset{\mu}{\hookrightarrow} X_n \xrightarrow{g} X_{n-1}$$

. بنابراین‌دیاگرام جابجایی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & T(X_{n+1}) & \xrightarrow{T(f)} & T(X_n) & \xrightarrow{T(g)} & T(X_{n-1}) & & \\
 & & T(\tilde{f})\big\downarrow & T(\lambda) & T(\mu) & & & & \\
0 & \longrightarrow & T(Imf) & \longrightarrow & T(\mathrm{Ker}g) & \longrightarrow & T(\frac{\mathrm{Ker}g}{Imf}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$0 \qquad 0 \qquad\qquad 0$$

حال چون $T(\lambda)$ یک به یک است پس $\widetilde{T(\lambda)} : T(Imf) \longrightarrow ImT(f)$ ، یکریختی است. و چون $T(\mu)$ یک به یک است پس $\widetilde{T(\mu)} : T(\mathrm{Ker}g) \longrightarrow \mathrm{Ker}T(g)$ یکریختی است. و لذا $\frac{T(\mathrm{Ker}g)}{T(Imf)} = \frac{\mathrm{Ker}T(g)}{ImT(f)}$ حال از رشتهٔ دقیق

$$0 \longrightarrow ImT(f) \hookrightarrow \mathrm{Ker}T(g) \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}T(g)}{ImT(f)} \longrightarrow 0$$

دیاگرام

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T(Imf) & \xrightarrow{T(\rho)} & T(\mathrm{Ker}g) & \xrightarrow{T(\phi)} & T(\frac{\mathrm{Ker}g}{Imf}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \widetilde{T(\lambda)}\big\downarrow\cong & & \widetilde{T(\mu)}\big\downarrow\cong & & & & \\
0 & \longrightarrow & ImT(f) & \hookrightarrow & \mathrm{Ker}T(g) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{Ker}T(g)}{ImT(f)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

را خواهیم داشت. بنابراین $A-$ هومورفیسم $\varphi : T(\frac{\mathrm{Ker}g}{Imf}) \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}T(g)}{ImT(f)}$ وجود دارد که دیاگرام بالا را جابجایی کند. حال بنابر لم (۱ـ۱ـ۱۰) داریم $T(\frac{\mathrm{Ker}g}{Imf}) = \frac{\mathrm{Ker}T(g)}{ImT(f)}$. $\square$

۱-۱-۱۲ تعریف. فرض کنیم A' حلقه‌ای جابجایی و یکدار و $f : A \longrightarrow A'$ همومورفیسم حلقه‌ای باشد در این صورت برای هر ایده‌آل I از A، توسیع ایده‌آل I (تحت همومورفیسم f) در A' را با $(IA')I^e$ نشان می‌دهیم توجه شود که I^e مجموعه عناصری به صورت $f(a_1)b_1 + \cdots + f(a_n)b_n$ است که درآن $n \in \mathbb{N}$ و $b_1, \cdots, b_n \in A'$ و $a_1, \cdots, a_n \in I$ در واقع I^e ایدالی از A' است که توسط $f(I)$ تولید می‌شود.

۱-۱-۱۳ تعریف. دنبالهٔ فانکتورهای همورد $\{T_n | n \in \mathbb{Z}\}$ از کاتگوری $A-$ مدولها و $A-$ همومورفیسمها را همبند گوییم هر گاه برای هر رشتهٔ دقیق $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ همومورفیسم همبند $\Delta_n : T_n(M'') \longrightarrow T_{n-1}(M')$ موجود باشد به طوری که اوّلاً رشته طولانی $\cdots \longrightarrow T_n(M) \longrightarrow T_n(M'') \longrightarrow T_{n-1}(M') \longrightarrow \cdots$ همبافت باشد و ثانیاًبرای هر دیاگرام جابجایی با سطرهای دقیق

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} T_n(M'') & \longrightarrow & T_{n-1}(M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_n(N'') & \longrightarrow & T_{n-1}(N') \end{array}$$

جابجایی باشد. حال این دنباله را مثبت گوییم هر گاه برای هر $n < 0$ ، $T_n = 0$ و منفی گوییم هر گاه برای هر $T_n = 0, n > 0$ و بالاخره این دنباله را قویاً همبند گوییم هر گاه همبافت $\cdots \longrightarrow T_n(M) \longrightarrow T_n(M'') \longrightarrow T_{n-1}(M') \longrightarrow \cdots$ "acyclic" باشد.

۱-۱-۱۴ لم. فرض کنیم M و N و E، Aـمدول‌هایی باشند به طوری که M با تولید متناهی و E انژکتیو است، در این صورت داریم:

$$M \otimes_A \operatorname{Hom}_A(N, E) \cong \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M, N), E)$$

برهان. ر.ک. [۳، ۱.۳، ۱۴]. $\square$

۱-۱-۱۵ تعریف. فرض کنیم I یک مجموعه و $\leq$یک رابطه در I باشد. در این صورت $(I, \leq)$ را یک مجموعه جهت دار می‌گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(آ) به ازای هر $i \in I$ ، $i \leq i$

(ب) به ازای هر $i, j, k \in I$ اگر $i \leq j$ و $j \leq k$ آنگاه $i \leq k$

(ج) به ازای هر $i, j \in I$ عضوی مانند $k \in I$ موجود باشد به طوری که $i \leq k$ و $j \leq k$.

۱-۱-۱۶ تعریف. فرض کنیم I یک مجموعهٔ جهت دار و $\{M_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از $A-$ مدولها باشد. فرض کنیم برای هر $i, j \in I$ که $i \leq j$ ، هomomorفیسم $\varphi_{ji} : M_j \longrightarrow M_i$ موجود باشد بطوریکه اوّلاً $\varphi_{ii} : M_i \longrightarrow M_i$ همانی باشد و ثانیاً برای هر $i, j, k \in I$ که $i \leq j \leq k$ دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} M_k & \xrightarrow{\varphi_{ki}} & M_i \\ \varphi_{kj} \searrow & & \nearrow \varphi_{ji} \\ & M_j & \end{array}$$

جابجایی باشد. در این صورت دستگاه $\{M_i, \varphi_{ji}\}_{i \leq j}$ را یک دستگاه معکوس می‌گوییم.

توجه. به طور مشابه تعریف فوق را می توان برای یک خانواده از مجموعه‌ها نیز بیان کرد که در این صورت یک دستگاه معکوس از مجموعه‌ها را خواهیم داشت.(برای اطلاعات بیشتر به ر.ک. [۳].)

۱-۱-۱۷ تعریف. فرض کنیم I مجموعه‌ای جهت دار و $\{M_i, \varphi_{ji}\}_{i \leq j}$ یک دستگاه معکوس باشد که در آن $i, j \in I$. در این صورت حد این دستگاه معکوس را با $M = \varprojlim_i M_i$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varprojlim_i M_i = \{\{m_i\} \in \Pi_{i \in I} M_i | \varphi_{ji}(m_j) = m_i; i \leq j \text{ برای هر}\}$$

که در خاصیت زیر صدق می‌کند:

اگر X یک $A-$ مدول دلخواه باشد و هومورفیسمهای $\{\psi_i : X \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$ موجود باشند به طوریکه برای هر $j \geq i$ داشته باشیم

$$\psi_i = \psi_{ji} \circ \psi_j$$

آنگاه هومورفیسم منحصر بفرد $\psi : X \longrightarrow M$ موجود است که برای هر $i \in I$، $\psi_i = p_i \circ \psi$ که در آن $p_i : M \longrightarrow M_i$ تحدید تابع تصویر $\Pi M_i \longrightarrow M_i$ می‌باشد.

تذکّر. با توجه به تعریف حد معکوس واضح است فانکتور حد معکوس از کاتگوری دستگاههای معکوس از $A-$ مدولها و $A-$ هومورفیسمها به کاتگوری Aـمدولها همورد و جمعی می‌باشد.

۱-۱-۱۸ قضیه. هر دو حد معکوس تعویضپذیرند (مجموعه‌های جهت دار آنها لزوماً یکی نیستند).

برهان. ر.ک. [۲.۲۶، ۱۷]. □

۱-۱-۱۹ قضیه. فرض کنیم $0 \longrightarrow \{M'_n\} \longrightarrow \{M_n\} \longrightarrow \{M''_n\} \longrightarrow 0$ یک رشتهٔ دقیق از دستگاههای معکوس باشد در این صورت رشتهٔ $0 \longrightarrow \varprojlim_n M'_n \longrightarrow \varprojlim_n M_n \longrightarrow \varprojlim_n M''_n$ از $A-$ مدولها و $A-$ هومورفیسمها دقیق است.

برهان. ر.ک. [۲.۱۰، ۱]. □

تذکّر. فانکتور حد معکوس روی کاتگوری $A-$ مدولها و $A-$ هومومورفیسمها، دقیق چپ است.

۱-۱-۲۰ گزاره. فرض کنیم F یک فانکتور دقیق چپ و هموورد از کاتگوری $A-$ مدولها و $A-$ هومومورفیسمها به خودش باشد که حاصلضرب مستقیم را حفظ می‌کند. در این صورت F حد معکوس را نیز حفظ می‌کند.

برهان. فرض کنیم I یک مجموعه جهت دار و $i, j \in I$ به طوریکه $j \leq j$. فرض کنیم $\{M_i, \varphi_{ji}\}_{i\leq j}$ یک دستگاه معکوس باشد. در این صورت $\{F(M_i), F(\varphi_{ji})\}_{i\leq j}$ نیز یک دستگاه معکوس است. حال با توجه به تعریف حاصلضرب مستقیم $A-$ هومومورفیسم $\varphi : F(\Pi_{i\in I}M_i) \longrightarrow \Pi_{i\in I}F(M_i)$ موجود است. فرض می‌کنیم φ یکریختی است. حال هومومورفیسم $f : \Pi_{i\in I}M_i \longrightarrow \Pi_{i\in I}M_i$ را با ضابطهٔ $f((m_i)_{i\geq \circ}) = (m_i - \varphi_{i+1i}(m_{i+1}))$ تعریف می‌کنیم که در آن $(m_i)_{i\geq \circ} \in \Pi_{i\in I}M_i$. چون $\mathrm{Ker}f \cong \varprojlim_i M_i$ لذا رشتهٔ دقیق زیر را خواهیم داشت:

$$\circ \longrightarrow \varprojlim_i M_i \overset{g}{\hookrightarrow} \Pi_i M_i \overset{f}{\longrightarrow} \Pi_i M_i$$

حال می‌توان هومومورفیسم $\Theta : \Pi_{i\in I}F(M_i) \longrightarrow \Pi_{i\in I}F(M_i)$ را مشابه f تعریف کرد و در نتیجه رشتهٔ دقیق $\circ \longrightarrow \varprojlim_i F(M_i) \hookrightarrow \Pi_{i\in I}F(M_i) \longrightarrow \Pi_{i\in I}F(M_i)$ را بدست آورد. حال چون F دقیق چپ است دیاگرام زیر راخواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & F(\varprojlim_i M_i) & \hookrightarrow & F(\Pi_{i\in I}M_i) & \longrightarrow & F(\Pi_{i\in I}M_i) \\
\downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} & & & & \downarrow{\varphi} & & \downarrow{\varphi} \\
\circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \varprojlim_i F(M_i) & \longrightarrow & \Pi_{i\in I}F(M_i) & \longrightarrow & \Pi_{i\in I}F(M_i)
\end{array}$$

حال بنا بر تعریف حد معکوس هومومورفیسم $\psi : F(\varprojlim_i M_i) \longrightarrow \varprojlim_i F(M_i)$ موجود است که دیاگرام بالا را جابجایی کند و لذا بنابر لم (۱-۱-۱۰)، خواهیم داشت: $F(\varprojlim_i M_i) \cong \varprojlim_i F(M_i)$. $\square$

۱-۱-۲۱ نتیجه. فانکتور حد معکوس با فانکتور حاصلضرب مستقیم(روی کاتگوری $A-$ مدولها و $A-$ هومورفیسمها) تعویض پذیراست.

برهان. با توجه به اینکه فانکتور حاصلضرب مستقیم روی کاتگوری $A-$ مدولها و $A-$ هومورفیسمها دقیق و همورد است و با خودش تعویض پذیر است پس بنابر (۱ـ۱ـ۲۰)، با فانکتور حد معکوس تعویض پذیر است. $\square$

۱-۱-۲۲ لم. فرض کنیم B یک $A-$ مدول و J یک خانوادهٔ اندیسگذار و برای هر $j \in J$ ، $\{A_j\}$ خانواده‌ای از $A-$ مدولها باشد. در این صورت

$$HOM_A(\bigoplus_j A_j, B) \cong \prod_j HOM_A(A_j, B)$$

برهان. ر. ک. [۲.۴، ۱۷]. $\square$

۱-۱-۲۳ گزاره. برای هر $A-$ مدول B و هر دستگاه معکوس $\{A_j, \varphi_{ji}\}_{i\leq j}$ که $i, j \in J$ و J یک مجموعهٔ جهت دار باشد داریم:

$$HOM_A(\varinjlim_j A_j, B) \cong \varprojlim_j HOM_A(A_j, B)$$

برهان. برای اثبات نشان می‌دهیم اگر F فانکتوری پادورد و دقیق چپ باشد به طوری که مجموع را به حاصلضرب تبدیل کند آنگاه F حاصلضرب مستقیم را به حد معکوس تبدیل می‌کند. برای این کار با توجه به هومورفیسم طبیعی $p_i : A_j \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} A_j$ ، هومورفیسم $F(p_j) : F(\bigoplus_{j\in J} A_j) \longrightarrow F(A_j)$ را خواهیم داشت همچنین هومورفیسم طبیعی $\pi_j : \Pi F(A_j) \longrightarrow F(A_i)$ را نیز داریم. حال هومورفیسم $\varphi : F(\bigoplus_{j\in J} A_j) \longrightarrow \Pi_{j\in J} F(A_j)$ موجود است. فرض کنیم φ یکریختی است. حال با توجه به تعریف حد مستقیم هومورفیسم پوشای $\sigma : \bigoplus_j A_j \longrightarrow \frac{\bigoplus_j A_j}{D} = \varinjlim_j A_j$ راکه D زیر مدول رابطه‌ای از $\bigoplus_j A_j$ می‌باشد، را داریم. چون F پادورد و دقیق چپ است لذا رشتهٔ دقیق $F(\bigoplus_j A_j) \hookleftarrow F(\varinjlim_j A_j) \longleftarrow \circ$ را خواهیم داشت. و از طرفی از هومورفیسم

$\Pi_j F(A_j) \longrightarrow \Pi_j F(A_j) : \varphi$ با تعریف ضابطهٔ مناسب، مشابه روشی که در لم (۲۰ـ۱ـ۱) گفته شد، داریم $\varprojlim_j F(A_j) \cong \mathrm{Ker}\varphi$ و لذا هومورفیسم شمول $\varprojlim_j F(A_j) \hookrightarrow \Pi_j F(A_j)$ راخواهیم داشت. حال با توجه به هومورفیسم $\lambda_j : A_j \longrightarrow \varinjlim_j A_j$، هومورفیسم $F(A_j) \xrightarrow{F(\lambda_j)} F(\varinjlim_j A_j)$ را خواهیم داشت و با استفاده از هومورفیسم $\mu_j : \varprojlim_j F(A_j) \longrightarrow F(A_j)$ و تعریف حد معکوس، هومورفیسم $\psi : F(\varinjlim_j A_j) \longrightarrow \varprojlim_j F(A_j)$ وجود دارد و دیاگرام زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & F(\varinjlim_j A_j) & \xrightarrow{F(\sigma)} & F(\bigoplus_j A_j) \\ & & \Big\downarrow \psi & & \\ \circ & \longrightarrow & \varprojlim_j F(A_j) & \hookrightarrow & \Pi_j F(A_j) \end{array}$$

حال داریم:

$$\varphi(F(\sigma)(x)) = (F(p_j)(F(\sigma)(x)))_{j\in J}$$

$$(F(\sigma\circ p_j)(x))_{j\in J} = (F(\lambda_j)(x))_{j\in J} = \psi(x)$$

و بنابراین دیاگرام فوق جابجایی است و لذا φ یکریختی است. حال فانکتور $HOM_A(-,B)$ پادورد و دقیق چپ است و همچنین از لم (۱ـ۱ـ۲۲) داریم $HOM_A(\oplus_j A_j, B) \cong \Pi_j HOM_A(A_j, B)$ و چون φ یکریختی است پس حکم به اثبات می‌رسد.□

۱-۱-۲۴ تعریف. فرض کنیم M یک $A-$ مدول باشد. د راین صورت

$$Supp_A(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) | M_p \neq \circ\}$$

۱-۱-۲۵ قضیه. فرض کنیم M $A-$ مدول با تولید متناهی باشد دراین صورت

$$Supp_A(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) | \mathfrak{p} \supseteq (\circ \underset{A}{:} M)\}$$