دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

استفاده از روش اختلال هموتوپی و برخی گونه‌های آن برای برخی معادلات انتگرال و دیفرانسیل و مقایسه‌ی آن با روش آنالیز هموتوپی

استاد راهنما

دکتر ناصر آقازاده

استاد مشاور

دکتر مجتبی رنجبر

پژوهشگر

صدیقه محمدی سنگدهی

شهریور ۱۳۹۰

تبریز- ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

مادر مهربانم

و پدر بزرگوارم

پروردگارا...

در پناه مهربانی توست که می‌توانم شکر نعمت‌هایت را به شایستگی انجام دهم و آینه‌ی غبار گرفته‌ی جانم را تطهیر نمایم و با طنین زمزمه‌های نامت در تکرارهای عاشقانه به آن‌جا رسم که لحظه به لحظه قامت خویش را در برابرت بشکنم و سجده‌های بسیار گزارم و در طواف این تسبیح‌های عارفانه طریق هدایت بجویم و بخواهم تا مرا از بازیچه‌ی تباهی و گناه حفظ گردانی.

الهی! امروز بیناتر از من کیست که تو را می‌بینم و شنواتر از من کیست که سخن تو می‌شنوم و گویاتر از من کیست که از تو سخن می‌گویم و داراتر از من کیست که تو را دارم.

پرودگارا! دعایم به درگاه تو این است:

نیرویی به من ارزانی فرما تا عشق خود را در خدمت و کمک، ثمر بخش سازم.

و قدرتی به من بخشا تا نیرو و توان خود را از روی کمال عشق و نهایت محبت تسلیم خواسته‌ها و رضای تو کنم.

الهی! هر چه دانستم نادان‌تر شدم، بر نادانیم بیفزای .

اگر تنهاترین تنهایان شوم، باز هم خدا هست

او جانشین تمام نداشته‌های من است.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

الهی شکرت که فهمیدم که نفهمیدم، و رسیدم که نرسیدم.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایتهای بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر ناصر آقازاده سپاس گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. و از آقای دکتر مهرداد لکستانی نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم کنارم بودند. همچنین تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایانشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

صدیقه محمدی سنگدهی

شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا روش‌های آنالیز هموتوپی و اختلال هموتوپی برای حل انواع معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال به کار برده شده است و همچنین اصلاحاتی برای این دو روش آورده شده است. سپس این دو مقایسه شده‌اند.

متفاوت از همه‌ی روش‌های تحلیلی، روش پیشنهادی لیائو، راه ساده‌ای برای کنترل و تنظیم همگرایی سری جواب ایجاد می‌کند و روش پیشنهادی هی یك روش ساده و کارا می‌باشد.

در فصل اول تعاریف و مطالب مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

در فصل دوم روش آنالیز هموتوپی و اصلاحاتی برای روش و کاربرد آن‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال ارائه شده است.

در فصل سوم روش اختلال هموتوپی و اصلاحاتی برای روش و کاربرد آن‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال، ارائه شده است.

در فصل چهارم دو روش آنالیز هموتوپی و اختلال هموتوپی باهم مقایسه شده‌اند.

کلید واژه‌ها: معادله دیفرانسیل، معادله انتگرال، روش اختلال هموتوپی، روش آنالیز هموتوپی

فهرست مطالب

فهرست مطالب ب

۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۱

۲ روش آنالیز هموتوپی ۵

۱.۲ ساختار روش آنالیز هموتوپی ۵

۱.۱.۲ همگرایی روش آنالیز هموتوپی ۲۶

۲.۱.۲ روش آنالیز هموتوپی برای معادلات انتگرال ۲۹

۳.۱.۲ روش آنالیز هموتوپی برای معادله انتگرال-دیفرانسیل ۳۲

۲.۲ اصلاح روش آنالیز هموتوپی ۳۵

۱.۲.۲ اصلاح اول ۳۵

۲.۲.۲ اصلاح دوم ۳۹

۳ روش اختلال هموتوپی ۴۳

۱.۳ ساختار کلی روش اختلال هموتوپی ۴۳

۱.۱.۳ همگرایی روش برای معادلات دیفرانسیل ۴۶

۲.۱.۳ روش اختلال هموتوپی برای معادلات انتگرال فردهلم و ولترا ۵۰

۳.۱.۳ همگرایی روش برای معادلات انتگرال ۵۵

۴.۱.۳ روش اختلال هموتوپی برای معادله انتگرال-دیفرانسیل مرتبه ی n ۵۸

۲.۳ اصلاحاتی بر روش اختلال هموتوپی ۶۴

۱.۲.۳ روش اصلاحی برای معادلات مختلف ۶۴

۲.۲.۳ روش اصلاحی برای معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ۷۱

۳.۲.۳ روش اصلاحی برای معادلات انتگرال فردهلم نوع اول ۷۸

۴.۲.۳ روش اصلاحی برای معادلات انتگرال غیرخطی ۸۲

۵.۲.۳ روش اصلاحی برای معادلات انتگرال دوگانه ۸۷
۶.۲.۳ روش اصلاحی برای دستگاه معادلات انتگرال فردهلم ۹۱

۴ مقایسه بین روش آنالیز هموتوپی و روش اختلال هموتوپی ۹۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۶

مراجع ۱۰۸

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

مدل‌های ریاضی معمولا از زندگی واقعی و در مسائل فیزیکی و مهندسی به دست می‌آیند. بسیاری از فرمول‌های ریاضی پدیده‌های فیزیکی به معادلات دیفرانسیل جزئی و معمولی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل و ... تبدیل می‌شوند. این معادلات اغلب در دینامیک سیال، مدل‌های بیولوژی و... به دست می‌آیند. معمولا این معادلات پیچیده‌تر از آن هستند که به طور دقیق حل شوند. حتی اگر جواب دقیقی به دست آوریم محاسبات مورد نظر ممکن است خیلی پیچیده باشد. البته برخی روش‌های تحلیلی تقریبی مانند روش تابعی، روش تجزیه آدومیان، روش آنالیز هموتوپی، روش اختلال هموتوپی و ... برای حل این معادلات پیشنهاد می‌شوند.

در سال ۱۹۹۲ لیائو [۱] نظریات اساسی هموتوپی را برای ساخت یک روش تحلیلی، به نام روش آنالیز هموتوپی برای حل مسائل غیرخطی بیان کرد [۲۴] و در سال‌های ۱۹۹۷ و ۱۹۹۹ اصلاحاتی روی این روش انجام داد [۱۹]، و در سال ۲۰۰۴ کتاب خود را با نام مقدمه‌ای بر آنالیز هموتوپی ارائه کرد[۲۰].

روش آنالیز هموتوپی یک روش کلی است که روش‌های اختلال هموتوپی، پارامتر کوچک مصنوعی لیاپونف، تجزیه آدومیان و ... حالت‌های خاصی از آن هستند. این روش، در حل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی و معادلات انتگرال خطی و غیرخطی کارا و سودمند است و جواب‌هایی با دقت بالا می‌دهد.

در دهه‌های اخیر، با توسعه‌ی مسائل غیرخطی، دانشمندان و مهندسین به تکنیک‌های تحلیلی برای حل مسائل خطی و غیر خطی علاقه فراوانی پیدا کرده‌اند. در بسیاری از موارد تکنیک‌های روش اختلال به کار برده می‌شود اما همانند دیگر تکنیک‌های تحلیلی، این روش نیز دارای محدودیت‌هایی است از جمله این‌که تقریبا همه روش‌های اختلال براساس یک پارامتر کوچک که باید در معادله وجود داشته باشد، پایه گذاری می‌شوند ولی در اکثر مسائل غیرخطی پارامتر کوچک وجود ندارد و همچنین وارد کردن پارامتر کوچک به مسئله نیازمند تکنیک‌های خاصی است. یک انتخاب مناسب پارامترهای کوچک می‌تواند ما را به نتیجه‌ی ایده‌آل برساند، و یک انتخاب نامناسب تاثیر بدی در نتیجه خواهد داشت. بدیهی است این نواقص، ناشی از ایجاد یک پارامتر کوچک در مسئله است.

[۱] S. Liao

برای رفع چنین محدودیت‌هایی، در سال ۱۹۹۸ جی‌هوان هی [۲] روش اختلال هموتوپی را معرفی کرد [۱۲]. این روش نیاز به پارامتر کوچک در معادله ندارد در این روش طبق هموتوپی در توپولوژی یک هموتوپی با یک پارامتر $p \in [0, 1]$ ساخته می‌شود و این پارامتر به صورت یک پارامتر کوچک فرض می‌شود. این روش در واقع ترکیب هموتوپی و روش اختلال می‌باشد که در حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال خطی و غیرخطی سودمند و کاراست. این روش در سال‌های اخیر برای حل اکثر مسائل غیرخطی توسط بسیاری از دانشمندان مورد استفاده قرار گرفته است.

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز می‌شود، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. در حالت کلی معادله انتگرال خطی به صورت زیر است

$$h(x)g(x) = f(x) + \lambda \int_a k(x,t)g(t)dt \qquad (1.1)$$

که در آن کران بالا ممکن است متغیر یا ثابت باشد. و توابع f و h و کرنل k، توابعی معلومند و تابع g مجهول می‌باشد.

در معادله انتگرال فردهلم، کران بالای انتگرال در معادله‌ی (۱.۱)، عدد ثابت b است. در معادله انتگرال فردهلم نوع اول، $h(x) = 0$ و در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم، $h(x) = 1$ می‌باشد.

اگر در معادله انتگرال فردهلم $b = x$ قرار دهیم، معادله انتگرال ولترا به دست می‌آید.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند، دو نگاشت f و g از X به Y هموتوپیک نامیده می‌شوند، اگر یک نگاشت F از $X \times [0, 1]$ به Y وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر x داشته باشیم

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x),$$

در این‌جا F یک هموتوپی از f به g است.

تعریف ۳.۱. فضای خطی نرم‌دار X را فضای باناخ گویند، هر گاه X با متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش یک فضای تام باشد.

قضیه ۴.۱. *(قضیه نقطه ثابت): فرض کنید*

(i) X *یک فضای باناخ باشد.*

(ii) T *یک نگاشت از* $X \to X$ *باشد.*

(iii) T *در گوی* $\bar{d}(x_0, r)$ *یک نگاشت انقباض باشد. (با ضرائب انقباض* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$*)*

(iv) $\frac{1}{1-\theta}\|x_1 - x_0\| = r_0 \leqslant r$

[۲] J. He

آن‌گاه

(۱) *T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد $\tilde{x}$، درون گوی $\bar{d}(x_\circ, r)$ است.*

(۲) *به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ دنباله‌ی $x_n = Tx_{n-۱}$ به نقطه ثابت $\tilde{x}$ همگراست.*

(۳) $||x_n - \tilde{x}|| \leqslant \theta^n r_\circ$

اثبات. [۳۱]. □

تعریف ۵.۱. فرض کنید تابع $f(x)$ دارای مشتقات مراتب بالا در نقطه‌ی a باشد در این صورت بسط سری تیلور آن در این نقطه به صورت زیر می‌باشد

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^۳ + \ldots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

سری تیلور برای توابعی با بیش از یك متغیر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_d) = \sum_{n_۱=\circ}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=\circ}^{\infty} \frac{(x_۱-a_۱)^{n_۱} \ldots (x_d-a_d)^{n_d}}{n_۱! \ldots n_d!} \Big(\frac{\partial^{n_۱+\ldots+n_d}}{\partial x_۱^{n_۱} \ldots \partial x_d^{n_d}}\Big)(a_۱, \ldots a_d)$$

قضیه ۶.۱. (قضیه تیلور): *اگر تابع f در همسایگی نقطه $x_\circ$ مشتق مرتبه‌ی $(n+۱)$ام متناهی داشته باشد، در این صورت مقدار f در هر نقطه متعلق به این همسایگی، به صورت*

$$f(x) = f(x_\circ) + (x-x_\circ)f'(x_\circ) + \frac{۱}{۲!}(x-x_\circ)^۲ f''(x_\circ) + \ldots + \frac{۱}{n!}(x-x_\circ)^n f^{(n)}(x_\circ) + R_n(x),$$

به دست می‌آید، که در آن

$$R_n(x) = \frac{۱}{(n+۱)!}(x-x_\circ)^{n+۱} f^{(n+۱)}(\xi),$$
$$f^{(k)}(x_\circ) = \frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=x_\circ}$$

و ξ نقطه‌ای بین x و $x_\circ$ است.

تعریف ۷.۱. اگر f و g دو تابع مشتق پذیر مرتبه n باشند. مشتق مرتبه‌ی n، تابع حاصل‌ضرب fg به صورت زیر به دست می‌آید

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=\circ}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

به این روش، قاعده‌ی لایب نیتز گویند.

تعریف ۸.۱. فرض کنید $\psi_۱$ و $\psi_۲$ دو تابع انتگرال‌پذیر حقیقی در بازه $[\circ, ۱]$ باشند آنگاه نامساوی شوارتز به

صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Big[\int_a^b \psi_۱(x)\psi_۲(x)dx\Big] \leqslant \int_a^b \big[\psi_۱(x)\big]^۲ dx \int_a^b \big[\psi_۲(x)\big]^۲ dx$$

فصل ۲

روش آنالیز هموتوپی

۱.۲ ساختار روش آنالیز هموتوپی

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{A}[u(t)] = \circ, \tag{۱.۲}$$

که در آن $\mathcal{A}$ عملگر غیرخطی، t نمایشگر زمان و $u(t)$، تابع مجهول می‌باشد. فرض کنید $u_\circ(t)$ تقریب اولیه‌ی $u(t)$ و $\mathcal{L}$ عملگر خطی کمکی با ویژگی زیر باشد

$$\mathcal{L}f = \circ \Longrightarrow f = \circ \tag{۲.۲}$$

آن‌گاه هموتوپی را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$\tilde{\mathcal{H}}[\phi(t;q);q] = (۱ - q)\mathcal{L}[\phi(t;q) - u_\circ(t)] + q\mathcal{A}[\phi(t;q)], \tag{۳.۲}$$

که در آن $q \in [\circ, ۱]$، پارامتر هموتوپی یا پارامتر تعبیه نامیده می‌شود و $\phi(t;q)$، تابعی بر حسب t و q است و آزادی زیادی برای انتخاب تقریب اولیه‌ی $u_\circ$ و عملگر خطی $\mathcal{L}$داریم.
وقتی $q = \circ$ باشد، از رابطه‌ی (۳.۲) داریم

$$\tilde{\mathcal{H}}[\phi(t;q);q]\big|_{q=\circ} = \mathcal{L}[\phi(t;q) - u_\circ(t)]\big|_{q=\circ},$$

با توجه به رابطه‌ی (۲.۲)،

$$\phi(t;0) = u_0(t)$$

جواب معادله‌ی زیر است

$$\tilde{\mathcal{H}}[\phi(t;q);q]|_{q=0} = 0$$

و وقتی $q=1$ باشد، از رابطه‌ی (۳.۲) داریم

$$\tilde{\mathcal{H}}[\phi(t;q);q]|_{q=1} = \mathcal{A}[\phi(t;1)]$$

با توجه به رابطه‌ی (۱.۲)،

$$\phi(t;1) = u(t)$$

جواب معادله‌ی زیر است

$$\tilde{\mathcal{H}}[\phi(t;q);q]\big|_{q=1} = 0$$

بنابراین وقتی که پارامتر تعبیه از صفر به یک، افزایش می‌یابد، $\phi(t;q)$، جواب معادله‌ی $\tilde{\mathcal{H}}[\phi(t;q);q] = 0$، از جواب اولیه‌ی $u_0(t)$ به $u(t)$ که جواب معادله‌ی (۱.۲) است، تغییر می‌کند. در توپولوژی چنین تغییری را دگردیسی یا تغییر شکل می‌گویند.

از آن‌جا که $\phi(t;q)$ بر حسب q است، می‌توان آن‌را به وسیله‌ی سری مکلورن به صورت زیر بسط داد

$$\phi(t;q) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) q^m \tag{۴.۲}$$

که در آن $\phi(t;0) = u_0(t)$ و

$$u_m(t) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(t;q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0} \tag{۵.۲}$$

اگر سری (۴.۲) در $q=1$ همگرا باشد، از رابطه‌ی $\phi(t;1) = u(t)$ استفاده می‌کنیم و داریم که

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \tag{۶.۲}$$

جواب معادله‌ی (۱.۲) می‌باشد.

این روش دارای محدودیت‌هایی است از جمله این‌که ممکن است سری (۴.۲)، در $q=1$ همگرا نباشد و یا

هیچ راه مناسبی برای تنظیم و کنترل حوزه و سرعت همگرایی سری (۶.۲) ارائه نمی‌دهد.
برای رفع چنین محدودیت‌هایی، لیائو در سال ۱۹۹۷، در هموتوپی (۳.۲)، تغییراتی ایجاد کرد و آن‌را به صورت زیر تعریف نمود

$$\mathcal{H}(\phi; q, \hbar, H) = (1 - q)\mathcal{L}[\phi(t; q, \hbar, H) - u_0(t)] - q\hbar H(t)\mathcal{A}[\phi(t; q, \hbar, H)], \qquad (۷.۲)$$

که در آن $H(t)$ تابع کمکی و $\hbar$ پارامتر کمکی غیر صفر می‌باشد و آزادی زیادی برای انتخاب آن‌ها داریم.
به طور مشابه وقتی q از صفر به یک افزایش می‌یابد، $\phi(t; q, \hbar, H)$ از تقریب اولیه‌ی $u_0(t)$ به $u(t)$ که جواب معادله‌ی غیرخطی عمومی (۱.۲) می‌باشد، تغییر می‌کند. معادله‌ی (۷.۲) را معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی صفر می‌گویند.
همان طور که گفته شد آزادی زیادی برای انتخاب چهار فاکتور تقریب اولیه $u_0(t)$، عملگر خطی $\mathcal{L}$، تابع کمکی $H(t)$ و پارامتر کمکی $\hbar$ داریم که در همین بخش توضیحاتی در نحوه‌ی انتخاب آن‌ها داده خواهد شد. برای تشکیل معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی صفر، در وهله‌ی اول سه فاکتور تقریب اولیه، عملگر خطی و تابع کمکی را انتخاب می‌کنیم بنابراین $\phi(t; q, \hbar, H)$ که جواب معادله‌ی $\mathcal{H}(\phi; q, \hbar, H) = 0$ است، نه تنها به پارامتر تعبیه‌ی q وابسته است بلکه به پارامتر کمکی $\hbar$ نیز وابسته می‌باشد بنابراین در $q = 1$ جواب باز هم به پارامتر کمکی $\hbar$ وابسته می‌شود پس برخلاف هموتوپی (۳.۲)، هموتوپی کلی (۷.۲) دسته‌ای از سری‌های تقریبی که حوزه‌ی همگرایی آن وابسته به پارامتر کمکی $\hbar$ است، ایجاد می‌کند بنابراین به خاطر آزادی انتخاب برای $\hbar$ ، این هموتوپی راه ساده‌ای را برای تنظیم و کنترل حوزه و سرعت همگرایی سری‌های جواب، فراهم می‌کند از این‌رو به پارامتر کمکی $\hbar$، پارامتر کنترل همگرایی نیز می‌گویند.
بعد از تشکیل هموتوپی (۷.۲) و رفع محدودیت بیان شده، جواب مسئله به صورت رابطه‌ی (۶.۲) خواهد بود که در آن u_mها مجهولند. برای به دست آوردن آن‌ها، «معادله‌ی تغییر شکل مراتب بالاتر» را به دست می‌آوریم بدین منظور مفهوم مشتق هموتوپی را بیان کرده و بعضی از لم‌ها و قضایا راجع به مشتق هموتوپی و معادله‌ی تغییر شکل را اثبات می‌نماییم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید تابع ϕ بر حسب پارامتر q باشد آن‌گاه

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi}{\partial q^m}\Big|_{q=0} \qquad (۸.۲)$$

را مشتق هموتوپی مرتبه‌ی m، ϕ می‌نامند که در آن $m \geqslant 0$ صحیح است.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\mathcal{A}[u] = 0$ معادله‌ی غیرخطی باشد و ϕ تابعی از پارامتر هموتوپی $q \in [0, 1]$ باشد

سری مکلورن ϕ به صورت زیر است

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t) q^m \tag{۹.۲}$$

مجموعه معادلات

$$\mathcal{H}(\phi; q, \hbar, H) = (1-q)\mathcal{L}[\phi(t; q, \hbar, H) - u_0(t)] - q\hbar H(t)\mathcal{A}[\phi(t; q, \hbar, H)],$$

را معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی صفر $\mathcal{A}[u] = 0$ می‌نامند. اگر $q = 1$ باشد، این رابطه با معادله‌ی کلی $\mathcal{A}[u] = 0$ معادل است، بنابراین داریم

$$u = \phi\big|_{q=1} = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t) \tag{۱۰.۲}$$

که سری (۹.۲) را سری هموتوپی و سری (۱۰.۲) را جواب سری هموتوپی $\mathcal{A}[u] = 0$ می‌نامند.

قضیه ۳.۲. *سری‌های هموتوپی زیر مفروض‌اند*

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) q^i, \quad \psi = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(t) q^j$$

آن‌گاه داریم

$$(i) \quad D_m(\phi) = u_m(t),$$

$$(ii) \quad D_m(q^k \phi) = D_{m-k}(\phi),$$

$$(iii) \quad D_m(\phi\psi) = \sum_{i=0}^{m} D_i(\phi) D_{m-i}(\psi) = \sum_{i=0}^{m} D_i(\psi) D_{m-i}(\phi),$$

$$(iv) \quad D_m(\phi^n \psi^l) = \sum_{i=0}^{m} D_i(\phi^n) D_{m-i}(\psi^l) = \sum_{i=0}^{m} D_i(\psi^l) D_{m-i}(\phi^n).$$

که در آن $m \geqslant 0, n \geqslant 0, l \geqslant 0, 0 \leqslant k \leqslant m$ *صحیح‌اند.*

اثبات. (i) باتوجه به قضیه‌ی تیلور، ضرائب یکتای u_m از سری‌های مکلورن ϕ به صورت زیر به دست می‌آید

$$u_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi}{\partial q^m}\Big|_{q=0}$$

که این همان تعریف $D_m(\phi)$ می‌باشد

(ii) داریم

$$q^k\phi = q^k\sum_{i=\circ}^{\infty} u_i q^i = \sum_{i=\circ}^{\infty} u_i q^{i+k} = \sum_{m=k}^{\infty} u_{m-k} q^m$$

با استفاده از (i) داریم

$$D_m(q^k\phi) = u_{m-k} = D_{m-k}(\phi)$$

(iii) با توجه به روش لایب نیتز برای مشتق‌های حاصل‌ضرب داریم

$$\frac{\partial^m(\phi\psi)}{\partial q^m} = \sum_{i=\circ}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{\partial^i\phi}{\partial q^i}\frac{\partial^{m-i}\psi}{\partial q^{m-i}} = \sum_{i=\circ}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{\partial^i\psi}{\partial q^i}\frac{\partial^{m-i}\phi}{\partial q^{m-i}}$$

با استفاده از تعریف (۱.۲) داریم

$$D_m(\phi\psi) = \frac{۱}{m!}\frac{\partial^m(\phi\psi)}{\partial q^m}\Big|_{q=\circ} = \sum_{i=\circ}^{m}\left(\frac{۱}{i!}\frac{\partial^i\phi}{\partial q^i}\Big|_{q=\circ}\right)\left(\frac{۱}{(m-i)!}\frac{\partial^{m-i}\psi}{\partial q^{m-i}}\Big|_{q=\circ}\right) = \sum_{i=\circ}^{m} D_i(\phi)D_{m-i}(\psi).$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$D_m(\phi\psi) = \sum_{i=\circ}^{m} D_i(\psi)D_{m-i}(\phi).$$

(iv) قرار می‌دهیم $\Phi=\phi^n$ و $\Psi=\psi^l$ با توجه به (iii) داریم

$$D_m(\phi^n\psi^l) = D_m(\Phi\Psi) = \sum_{i=\circ}^{m} D_i(\Phi)D_{m-i}(\Psi) = \sum_{i=\circ}^{m} D_i(\phi^n)D_{m-i}(\psi^l).$$

به طور مشابه داریم

$$D_m(\phi^n\psi^l) = \sum_{i=\circ}^{m} D_i(\psi^l)D_{m-i}(\phi^n).$$

□

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $\mathcal{L}$ عملگر خطی مستقل از پارامتر هموتوپی q باشد برای سری هموتوپی*

$$\phi = \sum_{k=\circ}^{\infty} u_k q^k$$

داریم

$$D_m(\mathcal{L}\phi) = \mathcal{L}[D_m(\phi)]$$

اثبات. چون $\mathcal{L}$ مستقل از q است داریم

$$\mathcal{L}\phi=\sum_{k=0}^{\infty}[\mathcal{L}(u_k)]q^k$$

از طرفین رابطه‌ی بالا مشتق هموتوپی مرتبه‌ی m می‌گیریم و با استفاده از قضیه‌ی ۳.۲ و تعریف ۱.۲ داریم $D_m(\mathcal{L}\phi)=\mathcal{L}(u_m)$ از طرفی دیگر با توجه به قضیه‌ی ۳.۲ داریم $\mathcal{L}[D_m(\phi)]=\mathcal{L}(u_m)$ بنابراین نتیجه می‌گیریم $D_m(\mathcal{L}\phi)=\mathcal{L}[D_m(\phi)]$. □

قضیه ۵.۲. *اگر دو سری هموتوپی*

$$\phi=\sum_{i=0}^{\infty}u_iq^i,\quad \psi=\sum_{j=0}^{\infty}v_jq^j$$

در $\phi=\psi$ روی بازه‌ی $q\in[0,a)$، صدق کنند آن‌گاه برای هر عدد صحیح $m\geqslant 0$ و عدد حقیقی $a>0$، $u_m=v_m$ و $D_m(\phi)=D_m(\psi)$.

اثبات. زمانی‌که $\phi=\psi$ باشد داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty}(u_k-v_k)q^k=0$$

این رابطه برای همه‌ی نقاط $q\in[0,a)$ برقرار است اگر و تنها اگر

$$u_m=v_m,\quad m\geqslant 0$$

با توجه به قضیه (۳.۲) داریم

$$D_m(\phi)=D_m(\psi)$$

□

لم ۶.۲. *فرض کنید*

$$\phi=\sum_{m=0}^{\infty}u_m(t)q^m$$

نمایش سری هموتوپی باشد، که $q\in[0,1]$ پارامتر هموتوپی و u_m تابعی از t است. فرض کنید $\mathcal{L}$ نمایش عملگر خطی نسبت به t و u_0 حدس اولیه باشد آن‌گاه

$$D_m\{(1-q)\mathcal{L}[\phi-u_0]\}=\mathcal{L}[u_m(t)-\mathcal{X}_m u_{m-1}(t)]$$

که در آن عملگر D_m به وسیله‌ی (۸.۲) تعریف شده و $\mathcal{X}_m$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} ۰ & m \leqslant ۱ \\ ۱ & m > ۱ \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

اثبات. چون $\mathcal{L}$ عملگر خطی مستقل از q است پس داریم

$$(۱-q)\mathcal{L}[\phi - u_۰] = \mathcal{L}[\phi - q\phi + u_۰ q - u_۰]$$

با توجه به خطی بودن D_m و با توجه به قضایای ۳.۲ و ۴.۲ داریم

$$\begin{aligned} D_m\{(۱-q)\mathcal{L}[\phi - u_۰]\} &= D_m\{\mathcal{L}[\phi - q\phi + u_۰ q - u_۰]\} = \mathcal{L}\{D_m[\phi - q\phi + u_۰ q - u_۰]\} \\ &= \mathcal{L}[D_m(\phi) - D_m(q\phi) + u_۰ D_m(q)] = \mathcal{L}[u_m - u_{m-۱} + u_۰ D_m(q)] \end{aligned}$$

وقتی $m = ۱$ است رابطه‌ی فوق با $\mathcal{L}[u_m]$ و وقتی $m > ۱$ است با $\mathcal{L}[u_m - u_{m-۱}]$ معادل می‌باشد. بنابراین با استفاده از تعریف (۱۱.۲) داریم

$$D_m\{(۱-q)\mathcal{L}[\phi - u_۰]\} = \mathcal{L}[u_m - \mathcal{X}_m u_{m-۱}]$$

□

قضیه ۷.۲. *فرض کنید*

$$\phi = \sum_{m=۰}^{\infty} u_m(t) q^m$$

که در آن $q \in [۰, ۱]$ پارامتر هموتوپی باشد و فرض کنید $\mathcal{L}$ عملگر خطی و $\mathcal{A}$ عملگر غیرخطی و $u_۰(t)$ حدس اولیه و $\hbar$ پارامتر کنترل همگرایی مستقل از q و $H(t)$ تابع کمکی مستقل از q باشد. اگر معادله تغییر شکل مرتبه صفر را در نظر بگیرید

$$(۱-q)\mathcal{L}[\phi - u_۰] = q\hbar H(t)\mathcal{A}[\phi]$$

آن‌گاه معادله تغییر شکل مرتبه m $(m \geqslant ۱)$ متناظر است با

$$\mathcal{L}[u_m(t) - \mathcal{X}_m u_{m-۱}(t)] = \hbar H(t) D_{m-۱}(\mathcal{A}[\phi]) \tag{۱۲.۲}$$

که در آن عملگر $D_{m-۱}$ به وسیله‌ی رابطه‌ی (۸.۲) و $\mathcal{X}_m$ به وسیله‌ی رابطه‌ی (۱۱.۲) تعریف شده است.

اثبات. با استفاده از قضیه ۵.۲ داریم

$$D_m\{(1-q)\mathcal{L}[\phi-u_0(t)]\} = D_m(q\hbar H(t)\mathcal{A}[\phi]) \tag{۱۳.۲}$$

با توجه به لم ۶.۲ داریم

$$D_m\{(1-q)\mathcal{L}[\phi-u_0(t)]\} = \mathcal{L}[u_m(t)-\mathcal{X}_m u_{m-1}(t)] \tag{۱۴.۲}$$

با توجه به خطی بودن عملگر D_m و با توجه به قضیه‌ی ۳.۲ داریم

$$D_m(q\hbar H(t)\mathcal{A}[\phi]) = \hbar H(t) D_{m-1}(\mathcal{A}[\phi]) \tag{۱۵.۲}$$

با جایگذاری (۱۴.۲) و (۱۵.۲) در (۱۳.۲)، معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی m به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mathcal{L}[u_m(t)-\mathcal{X}_m u_{m-1}(t)] = \hbar H(t) D_{m-1}(\mathcal{A}[\phi])$$

□

همان طور که قبلا بیان شد هدف، به دست آوردن u_mها می‌باشد بدین منظور ابتدا نشان می‌دهیم معادله‌ی تغییر شکل مرتبه m یک رابطه‌ی بازگشتی است و سپس این معادله را حل کرده و u_mها را به دست می‌آوریم: با توجه به تعریف D_m در (۸.۲) و سری هموتوپی (۹.۲) داریم

$$D_{m-1}(\mathcal{A}[\phi]) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}}\mathcal{A}[\phi(t;q)]\Big|_{q=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}}\mathcal{A}\left[\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)q^m\right]\Bigg|_{q=0} \tag{۱۶.۲}$$

حال مجموع جزئی $S_M(t)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S_M(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{M} u_m(t) \tag{۱۷.۲}$$

S_M در واقع تقریب مرتبه‌ی M جواب سری هموتوپی (۱۰.۲) است. عملگر غیرخطی $\mathcal{A}$ را می‌توانیم به دو عملگر خطی و عملگر غیرخطی تقسیم کنیم $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ که در آن $\mathcal{A}_1$ عملگر خطی و $\mathcal{A}_2$ عملگر غیرخطی است. بنابراین معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی m را با توجه به رابطه‌ی (۱۶.۲) می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mathcal{L}[u_m(t)-\mathcal{X}_m u_{m-1}(t)] = \hbar H(t)\mathcal{A}_1[u_{m-1}(t)] + \hbar H(t)\mathcal{A}_2[S_{m-1}(t)]$$