به نامِ خدا

٤٢٤٢۴

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

# دگردیسی‌های ژئودزیکی خمینه‌های ریمانی



پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

**جعفر زنجانی**

**استاد راهنما: دکتر سعاد ورسایی**



اسفند ۱۳۸۰

تقدیم به

پدر، مادر

و همسر گرامی‌ام

از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر ورسایی به خاطر تعلیماتشان و زحماتی که در انجام این پایان نامه متحمل شده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.
از زحمات مسئولین و کارمندان مرکز قدردانی می‌کنم.
و همچنین از دوستان عزیزم رضا محمودی ، یونس ایمانی ، داریوش زارعی و جعفر ملکی که مرا در تایپ پایان نامه یاری نمودند متشکرم.

# چکیده

نظریه دگردیسی ابزاری برای بررسی ساختار فضای مدولای از طریق مطالعه دگردیسی‌های بی‌نهایت کوچک است و ارتباط نزدیکی با مساله رده‌بندی در بخشهای مختلف ریاضی از جمله هندسه جبری، هندسه دیفرانسیل، جبر و توپولوژی دارد.

در این رساله ضمن معرفی مفاهیمی اساسی از هندسه ریمان، ابزار لازم برای بررسی دگردیسی‌های ژئودزیکی و شرط وجود موضعی آنها با تقریب مرتبه اول فراهم شده است.

# فهرست مطالب

عنوان | صفحه

# مقدّمه

نظریه دگردیسی ابزاری برای مطالعه ساختار فضای مدولای است و ارتباط نزدیکی با مساله رده‌بندی در بخشهای مختلف ریاضی از جمله هندسه جبری، هندسه دیفرانسیل، جبر و توپولوژی دارد.

اگر $\mathcal{M}$ کلاسی از اشیاء هندسی و یا جبری مانند زیر خمینه‌های ریمانی یک فضای ریمانی باشد، در اینصورت مساله اصلی توصیف $\mathcal{M}$ است. در واقع وجود خانواده‌هایی (هموار) از عناصر $\mathcal{M}$ نشان می‌دهد که $\mathcal{M}$ تنها یک مجموعه نیست و حامل نوعی ساختار نیز می‌باشد. بهترین حالت آن است که $\mathcal{M}$ خود یک خمینه باشد. در اینصورت آن را فضای مدولای (برای مساله رده‌بندی مورد نظر) می‌نامیم. البته در اغلب موارد $\mathcal{M}$ خمینه نیست. در توضیح این مطلب ابتدا لازم است مفهوم خانواده (هموار) روشن شود. البته این مفهوم برای کلاسهای مختلف $\mathcal{M}$ متفاوت است ولی در تمام موارد در ارتباط با اشیائی هندسی یا جبری است که می‌توانند با تغییر ضرایب معادلات معرف خود تغییر یابند. برای مثال در مورد زیرخمینه‌های ریمانی، یک خانواده هموار عبارت است از سوبمرسیون پوشای $\pi : V \longrightarrow S$ که در آن $V$ یک خمینه ریمانی و $S$ یک خمینه هموار می‌باشند. در اینجا $V$ را فضای کل و $S$ را فضای پارامتر این خانواده می‌نامیم. اگر $S$ همبند باشد، برای هر $s_\circ \in S$، $\pi$ را خانواده دگردیسی‌های $\pi^{-1}(s_\circ)$ می‌نامیم.

دو خانواده (هموار) $\pi : V \longrightarrow S$ و $\pi' : V' \longrightarrow S$ هم‌ارز (یکریخت) هستند هرگاه یکریختی (طول پای) $\varphi : V \longrightarrow V'$ موجود باشد به قسمی که $\pi = \pi' o \varphi$.

اکنون فانکتور پادورد از رسته خمینه‌های هموار مانند $S$ به رسته مجموعه‌ها را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد:

$F(S) = \{$ کلاس هم‌ارزی خانواده‌ها(ی هموار) از اشیاء $\mathcal{M}$ روی $S$ $\}$

برای هر ریخت $f : T \longrightarrow S$، ریخت $F(f)$ از $F(S)$ به $F(T)$ با کمک برگرداندن خانواده‌های روی $S$ به روی $T$ بوسیله $f$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر

$$F(f)[V \longrightarrow S] = [T \times_S V \longrightarrow T]$$

که برای آن نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc} T \times_S V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & S \end{array}$$

و در آن $T \times_S V = \{(t, v), f(t) = \pi(v)\}$ می‌باشد.

منظوراز نمایش فانکتور $F$، بوسیله خمینه $M$، یکریختی $\mu$ از فانکتور $Hom(-, M)$ به $F$ است. در واقع پرسش از یکریختی $\mu$، نقطه شروع گسترش نظریه دگردیسی، توسط گروتندیک (Grothendieck) است. وجود چنین یکریختی ناشی از وجود خانواده یونیورسال $\xi : W \longrightarrow M$ است، در اینصورت $[\xi] = \mu(M)(id_M)$. خانواده $\xi$ را کامل نیز می‌نامیم. در این حالت نقاط $M$، که آنرا فضای مدولای $\mathcal{M}$ می‌نامیم در تناظر دوسوئی با اشیاء $\mathcal{M}$ می‌باشند. به جز مواردی نادر، چنین فضاهائی وجود ندارند و به این دلیل در اغلب موارد $F$ نمایش پذیر نیست و $M$ دارای ساختاری ضعیف تر از یک خمینه است. با این حال چنانچه $M$ موجود باشد از فانکتور $F$ می‌توان برای مطالعه خواص و ساختار آن استفاده کرد. بخصوص خواص موضعی حول نقطه $m$ در $M$ را می‌توان با بررسی خانواده‌های معینی از دگردیسی‌های $W(m)$، مربوط به خانواده یونیورسال $\xi$، بدست آورد. برای مثال فضای مماس $T_m M$ را می‌توان از دگردیسی‌های مرتبه اول و یا معادلا دگردیسی‌های بی‌نهایت کوچک بدست آورد. منظوراز دگردیسی مرتبه اول ابر رویه ریمانی $V_n$ (از فضای $n+1$–بعدی $V$) ابر رویه ریمانی $\bar{V}_n$ با معادله زیر است:

$$\bar{y}^\alpha = y^\alpha(x) + \epsilon \xi^\alpha(x)$$

که در آن $y^\alpha(x) = y^\alpha(x_1, \cdots, x_n)$ و $\alpha = 1, \cdots, n+1$ معادلات $V_n$ و $\xi^\alpha(x) = \xi^\alpha(x_1, \cdots, x_n)$ یک میدان پادورد فضای $V$ روی $V_n$ است. پس به عبارت دقیق تر نظریه دگردیسی ابزاری برای بررسی ساختار فضای مدولای از طریق مطالعه دگردیسی‌های بی‌نهایت کوچک است[9]. نکته جالب اینجاست که با وجود نمایش پذیر نبودن $F$ و حتی بدون دانستن آن می‌توان دگردیسی‌های بی‌نهایت کوچک را محاسبه نمود. در مورد

دگردیسی‌های فضاهای ریمانی، بررسی دگردیسی‌های طول پای یک رویه با کارهای گاوس (Gauss) شروع و با کارهای لیبمان (Liebmann) و هیلبرت (Hilbert) ادامه یافت.

در این پایان‌نامه با مروری بر تعاریف و قضایای اساسی مورد نیاز از هندسه ریمان ابزار لازم برای بررسی دگردیسی‌های ژئودزیکی و شرط وجود موضعی آنها با تقریب مرتبه اول فراهم شده است، که در زیر بطور خلاصه به مفاهیم مطرح شده اشاره می‌شود.

فصل اول شامل مفاهیم اساسی می‌باشد. در بخش اول به معرفی فضاهای ریمانی می‌پردازیم و مثالهایی از ساختار ریمانی برای خمینه‌های هموار ارائه می‌دهیم. در بخش دوم مروری بر تانسورها و محاسبات مربوطه خواهیم داشت که در ساده کردن معادلات بدست آمده در فصل آخر مفید می‌باشند. در دو بخش آخر به جهت ارائه مفاهیم مورد نیاز در فصول بعدی به معرفی مشتق‌گیری همورد، نمادهای کریستوفل و التصاق ریمانی می‌پردازیم.

در فصل دوم ژئودزیکها بررسی می‌شوند. در بخش اول این فصل معادلات موضعی ژئودزیکها بیان می‌شود و در بخش دوم شرط لازم برای فضاهای با ژئودزیک یکسان را بدست می‌آوریم و در بخش آخر این فصل با فرم بنیادی دوم و نمایش موضعی آن برای خمینه‌های غوطه‌ورشده آشنا می‌شویم.

در بخش اول فصل سوم دگردیسی بی‌نهایت کوچک یک زیر خمینه غوطه‌ورشده را تعریف می‌کنیم و معادلات مربوطه را بدست می‌آوریم و در بخش پایانی این فصل معادلات دگردیسی ژئودزیکی بی‌نهایت کوچک ابررویه‌ها محاسبه شده است.

# فصل ۱

# مفاهیم و قضایای مقدماتی

در بخشهای مختلف این فصل با مفاهیم اولیه و قضایای کلیدی لازم که در فصلهای آینده مورد استفاده قرار خواهند گرفت آشنا می‌شویم. در ابتدا مفهوم فضاهای ریمانی را خواهیم دید، زیرا که محاسبات خود را در این فضا انجام داده‌ایم و در بکار گیری نمادها و رابطه‌ها در شکل موضعی دقیق‌تر می‌شویم.

## ۱.۱ فضاهای ریمانی

از نقطه نظر تاریخی می‌توان گفت هندسه ریمان بسط طبیعی از هندسه دیفرانسیل رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. فرض کنیم $S$ یک رویه در $\mathbb{R}^3$ باشد، برای اندازه‌گیری طول بردارهای مماس به $S$ طبیعی‌ترین روش استفاده از ضرب داخلی این بردارها در نقطه‌ای مفروض می‌باشد که در واقع ضرب داخلی این بردارهای مماس به عنوان بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

نماد $\langle\ ,\ \rangle$ که از آن برای نمایش ضرب داخلی دو بردار استفاده می‌کنیم علاوه بر اینکه بوسیله آن می‌توان طول خمها در $S$، مساحت نواحی در $S$ و زاویه بین دو خم را محاسبه کرد ما را در تعریف خمهایی خاص که آنها را ژئودزیک[1] می‌نامیم یاری می‌کند و نیز در تعریف ساختار ریمانی برای خمینه‌های دیفرانسیل پذیر مفید می‌باشد.

منظور از خمینه[2] دیفرانسیل پذیر که آنرا معمولاً با $N, M, \dots$ نمایش می‌دهیم، فضایی هاسدورف و همبند با پایه شمارا می‌باشد که دارای اطلس $C^\infty$ است و به آن خمینه هموار نیز می‌گوییم. خمینه هموار از بعد $n$ را با $M^n$ نمایش می‌دهیم.

### ۱.۱.۱ تعریف

فرض کنیم $M$ یک خمینه هموار و $g$ یک متر ریمانی روی آن باشد، زوج $(M, g)$ و یا به اختصار $M$ را یک خمینه ریمانی یا فضای ریمانی و $g$ را ساختار ریمانی $M$ می‌نامیم. در تعریف فوق متر $g$ تناظری است که به هر نقطه $p$ از $M$ یک ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_p$ روی فضای مماس در این نقطه یعنی $T_pM$ نظیر می‌کند.

به عنوان یک مثال بدیهی می‌توان $M = \mathbb{R}^n$ را در نظر گرفت که برای تعریف متر روی آن کافی است میدانهای برداری را $p \mapsto (p, e_i)$ برای هر $1 \leq i \leq n$ در نظر بگیریم، که درآن $e_i$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ می‌باشد و قرار دهیم:

$$\langle (p, e_i), (p, e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

---

[1] geodesic
[2] manifold

### ۲.۱.۱ تعریف

فرض کنیم $(M,g)$ یک خمینه ریمانی باشد، $(N,h)$ را یک زیر خمینه ریمانی آن می‌نامیم اگر :

الف $-$ $N$ زیر خمینه $M$ باشد.

ب$-$ برای هر $m$ در $N$ داشته باشیم $h_m = g_m|_{T_mN}$

در ادامه چند مثال از خمینه‌های ریمانی را ارایه می‌دهیم:

### ۳.۱.۱ مثال

فرض کنیم نگاشت $h : M^{n+k} \longrightarrow N^k$ دیفرانسیل پذیر و $q$ یک مقدار منظم برای $h$ باشد، یعنی برای هر $p$ در $h^{-1}(q)$ نگاشت $dh_p$ پوشاست در اینصورت $h^{-1}(q)$ یک زیر خمینه $n$ بعدی $M$ می‌باشد که روی آن یک ساختار ریمانی از $M$ القاء می‌شود.

با توجه به این مثال ساختار ریمانی کره واحد به عنوان زیر خمینه‌ای از $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر است:

فرض کنیم نگاشت $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر داده شده باشد:

$$h(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$$

در اینصورت صفر یک مقدار منظم $h$ می‌باشد و داریم:

$$h^{-1}(0) = \{x \in R^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

### ۴.۱.۱ مثال

فرض کنیم نگاشت $f : N \longrightarrow M$ یک غوطه‌وری[۳] باشد، یعنی $f$ دیفرانسیل پذیر و برای هر $p$ در $N$ نگاشت $df_p$ یک به یک باشد و فرض کنیم $M$ دارای ساختار ریمانی باشد، در اینصورت $f$ یک ساختار ریمانی روی $N$ القاء می‌کند بدین ترتیب که برای هر $u$ و $v$ در $T_pN$ قرار می‌دهیم:

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(P)}$$

[۳] Immersion

اگر $M_1$ و $M_2$ دو خمینه ریمانی باشد در اینصورت حاصلضرب دکارتی آنها یعنی $M_1 \times M_2$ نیز یک خمینه ریمانی با ساختار حاصلضرب می‌باشد، نگاشتهای تصویری زیر را در نظر بگیرید:

$$\Pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$$

$$\Pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$$

فرض کنیم زوج $(p, q)$ نقطه‌ای در $M_1 \times M_2$ و $u$ و $v$ بردارهای مماس در $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ باشند در اینصورت کافی است قرار دهیم:

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 u, d\pi_1 v\rangle_p + \langle d\pi_2 u, d\pi_2 v\rangle_q$$

همانطور که گفته شد $S^1$ به عنوان زیرخمینه $\mathbb{R}^2$ دارای ساختار ریمانی می‌باشد، پس با توجه به مطالب فوق چنبره $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ نیز دارای ساختار ریمانی می‌باشد که‌از حاصلضرب مترها بدست می‌آید.

### ۵.۱.۱ تعریف

فرض کنیم $M$ و $N$ دو خمینه ریمانی باشند در اینصورت وابرریختی[۴] $f : M \longrightarrow N$ را حافظ طول[۵] یا طولپا می‌گوییم هر گاه برای هر $p$ در $M$ و $u$ و $v$ در $T_pM$ داشته باشیم:

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$$

نگاشت هموار $g : M \longrightarrow N$ را در نقطه $p \in M$ بطور موضعی حافظ طول[۶] می‌گوئیم، اگر همسایگی $U \subset M$ از $p$ وجود داشته باشد بطوریکه $g : U \longrightarrow g(U)$ یک وابرریختی باشد و در شرایط تعریف فوق صدق کند.

همانطور که می‌دانیم گروه لی $G$، گروهی به همراه یک ساختار دیفرانسیل پذیر است بطوریکه نگاشت زیر برای هر $x$ و $y$ در $G$ دیفرانسیل پذیر باشد.

---

[۴] Diffeomorphism
[۵] Isometry
[۶] local isometry

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \mapsto xy^{-۱}$$

هموار بودن این نگاشت به برقراری ارتباط میان ساختار جبری و توپولوژیک کمک می‌کند.

دو نگاشت $L_x$ و $\mathbf{R}_x$ را که به ترتیب آنها را انتقال از چپ و انتقال از راست می‌نامیم، وابرریختیهایی هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$L_x : G \longrightarrow G \qquad R_x : G \longrightarrow G$$
$$L_x(y) = xy \qquad R_x(y) = yx$$

میدان $X$ را روی $G$ ناوردای چپ[۷] می‌گوئیم، هر گاه برای هر $x$ در $G$ داشته باشیم :

$$dL_x(X) = X(L_x)$$

میدانهای برداری ناوردای چپ در گروههای لی فقط با مقدار آن در نقطه $e$ (عضو خنثی گروه) کاملا مشخص می‌شوند، با توجه به اینکه $L_x$ وابرریختی است، در نتیجه $dL_x$ یکریختی میان کلافهای برداری می‌باشد، به کمک یکریختی اخیر می‌توان بدیهی بودن کلاف مماس $G$ را نشان داد:

$$TG \longrightarrow G \times T_eG$$
$$X \mapsto (x, dL_{x^{-۱}}(X))$$

که در آن $x$ پایه $X$ است. واضح است که نگاشت اخیر یکریختی است[10].

بنابراین هر ضرب داخلی روی $T_eG$ یک ساختار ریمانی روی $G$ معین می‌کند، در واقع ضرب داخلی در هر نقطه دیگر، از انتقال چپ ضرب در $e$ بدست می‌آید. فرض کنیم $x$، $y$ در $G$ و $u$، $v$ دو بردار در $T_yG$ باشند، متر ریمانی روی $G$ را ناوردای چپ می‌گوییم اگر داشته باشیم:

$$\langle u, v \rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v \rangle_{xy}$$

---

[۷] left invariant